ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

1. Определение первообразной

В курсе алгебры и начал анализа 10-го класса мы, руководствуясь различными формулами и правилами, находили производную заданной функции и убедились в том, что производная имеет многочисленные применения: производная — это скорость движения, скорость протекания любого процесса (или, обобщая, скорость изменения функции), производная — это угловой коэффициент касательной к графику функции; с помощью производной можно исследовать функцию на монотонность и экстремумы; производная помогает решать задачи на оптимизацию.

Но в реальной жизни приходится решать и обратные задачи: например, наряду с задачей об отыскании скорости по известному закону движения встречается и задача о восстановлении закона движения по известной скорости. Рассмотрим одну из таких задач.

Пример 1. По прямой движется материальная точка, скорость ее движения в момент времени t задается формулой $v = gt$. Найти закон движения.

Решение. Пусть $s = s(t)$ — искомый закон движения. Известно, что $s'(t) = v(t)$. Значит, для решения задачи нужно подобрать функцию $s = s(t)$, производная которой равна gt. Нетрудно догадаться, что $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. В самом деле,

$$s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}(t^2)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Ответ: $s = \frac{gt^2}{2}$.

Сразу заметим, что пример решен верно, но неполно. Мы получили, что $s = \frac{gt^2}{2}$. На самом деле задача имеет бесконечно много решений: любая функция вида $s = \frac{gt^2}{2} + C$, где C — произвольная константа, может служить законом движения, поскольку

$$\left(\frac{gt^2}{2} + C\right)' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' + C' = gt + 0 = gt.$$

Чтобы задача стала более определенной, нам надо было зафиксировать исходную ситуацию: указать координату движущейся точки в какой-либо момент времени, например при $t = 0$. Если, скажем, $s(0) = s_0$, то из равенства $s(t) = \frac{gt^2}{2} + C$ получаем: $s(0) = 0 + C$, т. е. $C = s_0$. Теперь закон движения определен однозначно: $s = \frac{gt^2}{2} + s_0$.

В математике взаимно обратным операциям присваивают разные названия, придумывают специальные обозначения: например, возведение в квадрат (x^2) и извлечение квадратного корня $\left(\sqrt{x}\right)$, синус ($\sin x$) и арксинус ($\arcsin x$) и т. д. Процесс отыскания производной по заданной функции называют *дифференцированием*, а обратную операцию, т. е. процесс отыскания функции по заданной производной, — *интегрированием*.

Сам термин «производная» можно обосновать «по-житейски»: функция $y = f(x)$ «производит на свет» новую функцию $y' = f'(x)$. Функция $y = f(x)$ выступает как бы в качестве «родителя», но математики, естественно, не называют ее «родителем» или «производителем», они говорят, что это, по отношению к функции $y' = f'(x)$, *первичный образ*, или *первообразная*.

ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

Функцию F(x) называют первообразной для функции f(x) на интервале (a; b), если на нем производная функции F(x) равна f(x):

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Операцию, обратную производной называют интегрированием.

Приведем примеры.

1) Функция $y = x^2$ является первообразной для функции $y = 2x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^2)' = 2x$.

2) Функция $y = x^3$ является первообразной для функции $y = 3x^2$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^3)' = 3x^2$.

3) Функция $y = \sin x$ является первообразной для функции $y = \cos x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(\sin x)' = \cos x$.

Примеры

1. $f(x) = 2x$; $F(x) = x^2$

   $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

2. $f(x) = -\sin x$; $F(x) = \cos x$

   $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x)$

3. $f(x) = 6x^2 + 4$; $F(x) = 2x^3 + 4x$

   $F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 6x^2 + 4 = f(x)$

4. $f(x) = 1/\cos^2 x$; $F(x) = \mathrm{tg}\, x$

   $F'(x) = (\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x = f(x)$

Вообще, зная формулы для отыскания производных, нетрудно составить таблицу формул для отыскания первообразных:

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
0	C
1	x
$x^r,\ r \neq -1$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x
$a^x (a > 0,\ a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$

Надеемся, вы поняли, как составлена эта таблица: производная функции, которая записана во втором столбце, равна той функции, которая записана в соответствующей строке первого столбца (проверьте, не поленитесь, это очень полезно). Например, для функции $y = x^5$ первообразной, как вы установите, служит функция $y = \frac{x^6}{6}$ (см. четвертую строку таблицы).

Особого разговора заслуживает лишь пятая строка таблицы, в которой написано, что первообразной для $\frac{1}{x}$ является $\ln|x|$. Рассмотрим два возможных случая: 1) $x > 0$; 2) $x < 0$. Если $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$ и, следовательно, $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Если $x < 0$, то $\ln|x| = \ln(-x)$ и, следовательно, $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Итак, для любого $x \neq 0$ выполняется равенство $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т. е. первообразной для функции $y = \frac{1}{x}$ является функция $y = \ln|x|$.

ПРАВИЛА ОТЫСКАНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

ПРАВИЛО 1. *Первообразная суммы равна сумме первообразных.*

Обращаем ваше внимание на некоторую «легковесность» этой формулировки. На самом деле следовало бы сформулировать теорему: *если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют на промежутке X первообразные соответственно $y = F(x)$ и $y = G(x)$, то и сумма функций $y = f(x) + g(x)$ имеет на промежутке X первообразную, причем одной из этих первообразных является функция $y = F(x) + G(x)$.* Но обычно, формулируя правила (а не теоремы), оставляют только ключевые слова — так удобнее для применения правила на практике.

Пример 2. Найти первообразную для функции $y = 2x + \cos x$.

Решение. Первообразной для $2x$ служит x^2; первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$. Значит, первообразной для функции $y = 2x + \cos x$ будет служить функция $y = x^2 + \sin x$ (и вообще любая функция вида $y = x^2 + \sin x + C$). ∎

Мы знаем, что постоянный множитель можно вынести за знак производной. Это правило порождает соответствующее правило отыскания первообразных.

ПРАВИЛО 2. *Если* $F(x)$ — *первообразная для* $f(x)$, *то* $kF(x)$ — *первообразная для* $kf(x)$.

Пример 3. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = 5\sin x$; б) $y = -\frac{\cos x}{3}$; в) $y = 12x^3 + 8x - 1$.

Р е ш е н и е. а) Первообразной для $\sin x$ служит $-\cos x$; значит, для функции $y = 5 \sin x$ первообразной будет функция $y = -5 \cos x$.

б) Первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$; значит, для функции $y = -\frac{1}{3} \cos x$ первообразной будет функция $y = -\frac{1}{3} \sin x$.

в) Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$; первообразной для x служит $\frac{x^2}{2}$; первообразной для функции $y = 1$ служит функция $y = x$.

Используя первое и второе правила отыскания первообразных, получим, что первообразной для функции $y = 12x^3 + 8x - 1$ служит функция $y = 12 \cdot \frac{x^4}{4} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - x$, т. е. $y = 3x^4 + 4x^2 - x$ (и вообще любая функция $y = 3x^4 + 4x^2 - x + C$). ■

З а м е ч а н и е 3. Как известно, производная произведения не равна произведению производных (правило дифференцирования произведения более сложное) и производная частного не равна частному от производных. Нет и правил для отыскания первообразной от произведения или первообразной от частного двух функций. Будьте внимательны!

Получим еще одно правило отыскания первообразных. Мы знаем, что производная функции $y = f(kx + m)$ вычисляется по формуле

$$(f(kx + m))' = kf'(kx + m).$$

Это правило порождает соответствующее правило отыскания первообразных.

ПРАВИЛО 3. *Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то первообразной для функции $y = f(kx + m)$ служит функция $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$.*

В самом деле,

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+m)\right)' = \frac{kF'(kx+m)}{k} = F'(kx + m) = f(kx + m).$$

Это и означает, что $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$ является первообразной для функции $y = f(kx + m)$.

Смысл третьего правила заключается в следующем. Если вы знаете, что первообразной для $f(x)$ является $F(x)$, а вам нужно найти первообразную для $f(kx + m)$, то действуйте так: берите ту же самую функцию F, но вместо аргумента x подставьте выражение $kx + m$; кроме того, не забудьте перед знаком функции записать «поправочный множитель» $\frac{1}{k}$.

Пример 4. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = \dfrac{1}{5x - 6}$; б) $y = e^{\frac{2x}{3} + 1}$; в) $y = 2^{5 - 3x}$.

Решение. а) Первообразной для $\frac{1}{x}$ является $\ln|x|$, значит, для заданной функции $y = \frac{1}{5x-6}$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{5}\ln|5x-6|$.

б) Первообразной для e^x является e^x, значит, для заданной функции $y = e^{\frac{2x}{3}+1}$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot e^{\frac{2x}{3}+1}$, т. е. $y = \frac{3}{2} \cdot e^{\frac{2x}{3}+1}$.

в) Первообразной для 2^x является $\frac{2^x}{\ln 2}$, значит, для заданной функции $y = 2^{5-3x}$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{-3} \cdot \frac{2^{5-3x}}{\ln 2}$, т. е. $y = -\frac{2^{5-3x}}{3\ln 2}$. ■

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале (a; b) функции f(x) называют любую ее первообразную функцию.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

Где С – произвольная постоянная (const).

Примеры

$$1.\ \int A\,dx = Ax + C; \quad (Ax + C)' = A$$

$$2.\ \int e^x dx = e^x + C; \quad (e^x + C)' = e^x$$

$$3.\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C; \quad (-\cos x + C)' = \sin x$$

$$4.\ \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C; \quad \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 = x^3$$

$$5.\ \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C; \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

F(x)	f(x)	F(x)	f(x)
$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	x^n	a^x+C	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}+C$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x+C$	$\cos x$	e^x+C	e^x
$-\cos x+C$	$\sin x$	C	Cx
$\mathrm{tg}x+C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x+C$	$\frac{1}{x\ln a}$
$-\mathrm{ctg}x+C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\arcsin x+C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Три правила нахождения первообразных

1° Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.

2° Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k – постоянная, то функция $kF(x)$ есть первообразная для kf.

3° Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то функция $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула **Ньютона-Лейбница**.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,

и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x)\Big|_1^2 =$$

$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 6 - 1 = 5$$

$$\int_3^{10} (\sqrt{x+6})dx = \frac{2(x+6)\sqrt{x+6}}{3}\Bigg|_3^{10} =$$

$$= \frac{2(10+6)\sqrt{10+6}}{3} - \frac{2(3+6)\sqrt{3+6}}{3} = \frac{80}{3} - 18 = 7\frac{2}{3}$$

Пример 2:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = (x-2)^2,\ y = 2\sqrt{8-x},\ x = 2,\ x = 8,\ y = 0$

$$= \int_2^4 (x-2)^2\,dx + \int_4^8 2\sqrt{8-x}\,dx = \left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_2^4 - \left.\frac{4(8-x)\sqrt{8-x}}{3}\right|_4^8 =$$

$$= \left(\frac{(4-2)^3}{3} - \frac{(2-2)^3}{3}\right) - \left(\frac{4(8-8)\sqrt{8-8}}{3} - \frac{4(8-4)\sqrt{8-4}}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$