Введение в асимптотические методы. Лекция 9

Метод растянутых координат

1. Основная идея метода

Метод предполагает, что $f(x;\varepsilon)$ имеет тот же вид, что $f(x;0)$, но координата x при этом слабо сдвинута (растянута).

Примеры

Сдвиг

$$f(x;\varepsilon)=\frac{1}{x+\varepsilon}\approx\frac{1}{x}-\frac{\varepsilon}{x^2}+\frac{\varepsilon^2}{x^3}\qquad(\varepsilon\to 0)$$

Не равномерно пригодное разложение. Неприятности при $x\propto\varepsilon$

Растяжение

$$f(x;\varepsilon)=\sin(1+\varepsilon)x\approx\sin x+\varepsilon x\cos x-\frac{1}{2}\varepsilon^2x^2\sin x\qquad(\varepsilon\to 0)$$

Не равномерно пригодное разложение. Неприятности при $x\propto\varepsilon^{-1}$

АР конструируется в виде $f(x;\varepsilon)\approx f_0(s)+\varepsilon f_1(s)+\ldots$ так, чтобы разложение для f было равномерным. $x\approx s+\varepsilon x_1(s)+\ldots$

Метод **не работает** если $f(x;\varepsilon)$ существенно отличается от $f(x;0)$ (например в задачах с пограничным слоем)

2. Осциллятор Дюффинга.

$$\ddot{x}+x-\varepsilon x^3=0,\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=0$$

Регулярное разложение: $x=\cos t+\varepsilon x_1(t)+\ldots$

$$\ddot{x}_1+x_1=\cos^3 t=\tfrac{3}{4}\cos t+\tfrac{1}{4}\cos 3t,\quad x_1(0)=0,\quad \dot{x}_1(0)=0$$

резонансные члены

$$x_1=\tfrac{3}{8}t\sin t+\tfrac{1}{32}\left(\cos t-\cos 3t\right)$$

Не равномерно пригодное разложение. Неприятности при $t\propto\varepsilon^{-1}$ связаны с тем, что период осцилляций слабо отличается от 2π

$$x(t;\varepsilon)\sim x_0(s)+\varepsilon x_1(s)+\varepsilon^2 x_2(s)+\ldots$$

$$t\sim s+\varepsilon t_1(s)++\varepsilon^2 t_2(s)\ldots$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}=\frac{1}{t'(s)}\frac{d}{ds},\quad \frac{d^2}{dt^2}=\left(\frac{1}{t'(s)}\right)^2\frac{d^2}{ds^2}-\frac{t''}{(t')^3}\frac{d}{ds}=$$

$$=\left(1-2\varepsilon t_1'+O\left(\varepsilon^2\right)\right)\frac{d^2}{ds^2}+\left(-\varepsilon t_1''+O\left(\varepsilon^2\right)\right)\frac{d}{ds}$$

3. Осциллятор Дюффинга.

$$\ddot{x} + x - \varepsilon x^3 = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$\varepsilon^0 : \ \ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad x_0(0) = 1, \quad \dot{x}_0(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0(s) = \cos s$$

$$\varepsilon^1 : \quad x_1'' + x_1 = x_0^3 + 2t_1' x_0'' + t_1'' x_0' = \left(\tfrac{3}{4} - 2t_1'\right)\cos s - t_1''\sin s + \tfrac{1}{4}\cos 3s$$

Для равномерной пригодности разложения нужно за счет выбора t_1 удалить из правой части резонансные члены $\Rightarrow$ $\boxed{t_1'' = 0, \quad t_1' = \tfrac{3}{8}}$

Удобно выбрать t_1 так чтобы $t_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = \tfrac{3}{8}s}$

$$t \sim s + \varepsilon \tfrac{3}{8} s + O\left(\varepsilon^2\right) \quad \Rightarrow \quad s \sim t - \varepsilon \tfrac{3}{8} t + O\left(\varepsilon^2\right)$$

$$1 = x\big|_{t=0} = x\big|_{s=O\left(\varepsilon^2\right)} = x\big|_{s=0} + O\left(\varepsilon^2\right) = x_0(0) + \varepsilon x_1(0) + O\left(\varepsilon^2\right)$$

$\Rightarrow$ $x_0(0) = 1$, $\boxed{x_1(0) = 0}$

$$0 = \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{dx}{ds}\bigg|_{t=0} \cdot \frac{ds}{dt}\bigg|_{t=0} = \left(\dot{x}(0)\big|_{s=0} + O\left(\varepsilon^2\right)\right)\cdot\left(1 - \tfrac{3}{8}\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right)\right)$$

$\Rightarrow$ $\dot{x}_0(0) = 0$, $\boxed{\dot{x}_1(0) = 0}$

4. Осциллятор Дюффинга.

$$\dot{x} + x - \varepsilon x^3 = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$x_1 = \tfrac{1}{32}\left(\cos s - \cos 3s\right)$$

Аналогично, для ε^2

$$\boxed{t_2 = \tfrac{57}{256} s, \qquad x_1 = \tfrac{1}{1024}\left(23\cos s - 24\cos 3s + \cos 5s\right)}$$

Период колебаний $\qquad T = 2\pi\left(1 + \tfrac{3}{8}\varepsilon + \tfrac{57}{256}\varepsilon^2\right)$

Обратим внимание, что все t_k оказались прямо пропорциональны s . Поэтому изначально можно было искать решение *данной задачи* в более простом виде

$$x(t;\varepsilon) \approx x_0(s) + \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_2(s) + \ldots$$

$$t(t;\varepsilon) \approx s\left(1 + t_1\varepsilon + +t_2\varepsilon^2 \ldots\right)$$

В такой форме метод растянутых координат называют методом Линдштедта – Пуанкаре.

5. Задача Лайтхилла: внешнее разложение

$$(x+\varepsilon y)\frac{dy}{dx}+(2+x)y=0,\quad y(1)=Ae^{-1}>0 \qquad 0<x<1$$

Регулярное разложение: $y=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots$

$$x\frac{dy_0}{dx}+(2+x)y_0=0 \;\Rightarrow\; \frac{dy_0}{y_0}=-\frac{(2+x)dx}{x} \;\Rightarrow\; y_0=\text{const}\,x^{-2}e^{-x} \;\Rightarrow\; y_0=Ax^{-2}e^{-x}$$

$$x\frac{dy_1}{dx}+(2+x)y_1=-y_0\frac{dy_0}{dx}=A^2e^{-2x}\left(x^{-4}+2x^{-5}\right),\quad y_1(1)=0$$

Метод вариации произвольной постоянной $y_1=-A^2e^{-x}x^{-2}\int_x^1 e^{-t}\left(t^{-3}+2t^{-4}\right)dt$

$$y_1\sim -A^2e^{-x}x^{-2}\int_x^1 2t^{-4}dt\sim -\frac{2}{3}A^2x^{-5} \qquad x\to 0$$

Принятое ФАР непригодно в окрестности нуля, оно разваливается при $x\propto\varepsilon^{1/3}$

6. Задача Лайтхилла: метод растянутых координат

$$y(x;\varepsilon) \sim y_0(s) + \varepsilon y_1(s) + \varepsilon^2 y_2(s) + \ldots$$

$$x(s;\varepsilon) \sim s + \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_2(s) \ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/ds}{dx/ds} = \frac{y_0' + \varepsilon y_1' + \ldots}{1 + \varepsilon x_1' + \ldots} = y_0' + \varepsilon\left(y_1' - x_1'\right) + \ldots$$

$$\left(x + \varepsilon y\right)\frac{dy}{dx} + (2 + x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} s y_0' + (2+s) y_0 = 0 \\ s y_1' + (2+s) y_1 = -(2+s) y_0 x_1' - \left(y_0 + y_0'\right) x_1 - y_0 y_0' \end{array}}$$

$$x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad s + \varepsilon x_1(s) + O\left(\varepsilon^2\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad s = 1 - \varepsilon x_1(1) + O\left(\varepsilon^2\right)$$

$$Ae^{-1} = y\left(1 - \varepsilon x_1(1) + \ldots\right) = y(1) - \varepsilon x_1(1) y'(1) + \ldots = y_0(1) + \varepsilon\left(y_1(1) - x_1(1) y'(1)\right) + \ldots$$

Граничное условие $\boxed{y_0(1) = Ae^{-1}, \qquad y_1(1) = y_0'(1) x_1(1)}$

$$\boxed{y_0 = As^{-2} e^{-s}}$$

7. Задача Лайтхилла: метод растянутых координат

$$sy_1' + (2+s)y_1 = -(2+s)y_0 x_1' - \left(y_0 + y_0'\right)x_1 - y_0 y_0' \qquad y_0 = As^{-2}e^{-s}$$

Метод вариации произвольной постоянной $\qquad y_1 = Fy_0$

$$sy_1' + (2+s)y_1 = F\underbrace{\left(sy_0' + (2+s)y_0\right)}_{0} + F'sy_0$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{y_1}{y_0}\right) = \frac{1}{s}\left(-(2+s)x_1' + \frac{2}{s}x_1 + Ae^{-s}\left(2s^{-3} + s^{-2}\right)\right)$$

Выберем x_1 так, чтобы устранить главную особенность в правой части

$$x_1' - \frac{x_1}{s} = \frac{A}{s^3} \quad \Rightarrow \boxed{x_1 = -\frac{A}{3s^2}} \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{y_1}{y_0}\right) = A\left(-\frac{2}{3}s^{-3} - 2s^{-4} + e^{-s}\left(2s^{-4} + s^{-3}\right)\right)$$

$$\boxed{y_1 = A^2 e^{-s} s^{-2}\left(\frac{2}{3s^3} + \frac{1}{3s^2} - \int_s^1 e^{-t}\left(2t^{-4} + t^{-3}\right)dt\right)}$$

8. Задача Лайтхилла: метод растянутых координат

$$y_0 = As^{-2}e^{-s} \qquad y_1 = A^2e^{-s}s^{-2}\left(\frac{2}{3s^3}+\frac{1}{3s^2}-\int_s^1 e^{-t}\left(2t^{-4}+t^{-3}\right)dt\right)$$

$$y_1 \approx A^2e^{-s}s^{-2}\left(\frac{2}{3s^3}+\frac{1}{3s^2}-\int_s^1\left(2t^{-4}-t^{-3}\right)dt\right) \approx \frac{5}{6}A^2s^{-4}$$

По-прежнему для малых *s* равномерной пригодности разложения нет, оно разваливается на этот раз при $s \propto \varepsilon^{1/2}$

Выигрыш состоит в том, что интервал $s \propto \varepsilon^{1/2}$ лежит вне интересующей нас области *0<x<1* решения!

$$0 = x(s_0;\varepsilon) \approx s_0 - \varepsilon\frac{A}{3s_0^{\ 2}}\ldots \quad \Rightarrow \quad s_0 \propto \left(\frac{A\varepsilon}{3}\right)^{1/3} \approx \ \varepsilon^{1/2}$$

Поэтому уже самое грубое приближение

$$y = Ae^{-s}s^{-2}, \qquad x = s - \frac{\varepsilon A}{3s^2}$$

$$y(0) = A\left(\frac{3}{A\varepsilon}\right)^{2/3} + O\left(\varepsilon^{-1/3}\right)$$

оказывается равномерно пригодным

9. Волны на мелкой воде. Постановка

(1)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Сохранение массы

Сохранение импульса

(2) $$t = 0: \quad u = \varepsilon \sin x, \quad h = 1 + \varepsilon \sin x + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin^2 x$$

Чтобы волна двигалась в одном направлении

Регулярное разложение $h = 1 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2, \quad u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial h_1}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial(h_1 + u_1)}{\partial t} + \dfrac{\partial(h_1 + u_1)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial(h_1 - u_1)}{\partial t} - \dfrac{\partial(h_1 - u_1)}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 + u_1 = f_+(x - t) \\ h_1 - u_1 = f_-(x + t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = \sin(x - t) \\ u_1 = \sin(x - t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 1 + \varepsilon \sin(x - t) + \varepsilon^2\left(-\frac{3}{4} t \sin 2(x - t) + \frac{1}{4}\sin^2(x - t)\right) \\ u = 0 + \varepsilon \sin(x - t) - \varepsilon^2 \frac{3}{4} t \sin 2(x - t) \end{cases}$$

Не равномерно пригодное разложение. $\left(t \propto \varepsilon^{-1}\right)$

Из-за того, что характеристики (1) слабо отличаются от $x \pm t = \mathrm{const}$

10. Волны на мелкой воде. Постановка

Причина неудачи состоит в том, что линеаризованное уравнение имеет в качестве характеристик прямые $x \pm t = \text{const}$, в то время как характеристики нелинейного уравнения слабо отличаются от них. Решение типа бегущей волны в своей основе правильно: наше разложение разваливается, потому, что положение этой волны на больших временах дается им неверно. Поэтому рассматриваемая задача может в принципе решаться методом растянутых координат, но такими координатами должны выступать характеристики.

Преобразуем систему исходных уравнений к характеристической форме

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

для некоторой величины Q, распространяющейся со скоростью c

11. Волны на мелкой воде. Характеристики

Преобразование исходных уравнений к характеристической форме

$$\times\lambda \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{cases} +$$

$$\left[u_t + \lambda h_t\right] + \left[\left(u + \lambda h\right)u_x + \left(1 + \lambda u\right)h_x\right] = 0$$

Пара характеристических уравнений

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{u + \lambda h}{1 + \lambda u} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm h^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(u \pm h^{1/2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(u \pm 2h^{1/2}\right) = 0$$

Введение новых независимых переменных (**характеристик**) α, β

$$x = x\left(\alpha, \beta\right) \qquad t = t\left(\alpha, \beta\right)$$

$$t = 0: \quad \alpha = \beta = x$$

(выбор параметризации)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial t}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = \left(u + h^{1/2}\right)\dfrac{\partial t}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \beta} = \left(u - h^{1/2}\right)\dfrac{\partial t}{\partial \beta} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(u + 2h^{1/2}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(u - 2h^{1/2}\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u + 2h^{1/2} = f_+(\beta) = 2 + 2\varepsilon \sin\beta \\ u - 2h^{1/2} = f_-(\alpha) = -2 \end{cases}$$

Из НУ

12. Волны на мелкой воде. Нахождение характеристик

решение задачи

$$\begin{cases} u(\alpha,\beta)=\varepsilon\sin\beta \\ h(\alpha,\beta)=1+\varepsilon\sin\beta+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2\sin^2\beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x&=x(\alpha,\beta) \\ t&=t(\alpha,\beta) \end{aligned}\quad ?$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\alpha}=\left(1+\tfrac{3}{2}\varepsilon\sin\beta\right)\dfrac{\partial t}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\beta}=\left(-1+\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\beta\right)\dfrac{\partial t}{\partial\beta} \end{cases}$$

$$x(\alpha,\beta;\varepsilon)=x_0(\alpha,\beta)+\varepsilon x_1(\alpha,\beta)+\varepsilon^2x_2(\alpha,\beta)$$

$$t(\alpha,\beta;\varepsilon)=t_0(\alpha,\beta)+\varepsilon t_1(\alpha,\beta)+\varepsilon^2t_2(\alpha,\beta)$$

$$\varepsilon^0:\quad \begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial\beta}&=-\frac{\partial t_0}{\partial\beta} \quad\Rightarrow\quad x_0+t_0=f_+(\alpha)=\alpha \\ \frac{\partial x_0}{\partial\alpha}&=\frac{\partial t_0}{\partial\alpha} \quad\Rightarrow\quad x_0-t_0=f_-(\beta)=\beta \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{aligned} x_0&=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \\ t_0&=\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \end{aligned}}$$

$$t=0:\quad \alpha=\beta=x \quad\Rightarrow\quad x_0\big|_{\alpha=\beta}=\alpha=\beta,\ t_0\big|_{\alpha=\beta}=0$$

13. Волны на мелкой воде. Нахождение характеристик

$\varepsilon^1:$ $$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial t_1}{\partial \alpha} = \tfrac{3}{2}\sin\beta\,\frac{\partial t_0}{\partial \alpha} = \tfrac{3}{4}\sin\beta \qquad x_1\big|_{\alpha=\beta} = 0,\ t_1\big|_{\alpha=\beta} = 0$$

$$x_1 = t_1 + \tfrac{3}{4}\alpha\sin\beta + f(\beta) = t_1 + \tfrac{3}{4}(\alpha-\beta)\sin\beta$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \frac{\partial t_1}{\partial \beta} = \frac{1}{2}\sin\beta\,\frac{\partial t_0}{\partial \beta} = -\frac{1}{4}\sin\beta \qquad x_1\big|_{\alpha=\beta} = 0,\ t_1\big|_{\alpha=\beta} = 0$$

$$x_1 = -t_1 + \tfrac{1}{4}\cos\beta + f(\alpha) = -t_1 + \tfrac{1}{4}(\cos\beta - \cos\alpha)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{3}{8}(\alpha-\beta)\sin\beta + \tfrac{1}{8}(\cos\beta - \cos\alpha) \\ t_1 &= -\tfrac{3}{8}(\alpha-\beta)\sin\beta + \tfrac{1}{8}(\cos\beta - \cos\alpha) \end{aligned}}$$

$\varepsilon^2:$ $$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= \tfrac{1}{128}\left[(\alpha-\beta)(21\cos 2\beta - 22) + 11\sin\beta\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha - 12\sin\beta\cos\alpha\right] \\ t_2 &= \tfrac{1}{128}\left[(\alpha-\beta)(14 - 15\cos 2\beta) - 13\sin\beta\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha + 12\sin\beta\cos\alpha\right] \end{aligned}}$$

14. Волны на мелкой воде. Время опрокидывания

Неединственность начинается тогда, когда якобиан преобразования $(t,x)\to(\alpha,\beta)$ обращается в нуль

$$0=\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\beta}-\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial t}{\partial\alpha}=2h^{1/2}\frac{\partial t}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\beta}$$

$$\frac{\partial t}{\partial\alpha}=\tfrac{1}{2}+\varepsilon\left(\tfrac{1}{8}\sin\alpha-\tfrac{3}{8}\sin\beta\right)+\varepsilon^{2}\tfrac{1}{128}(\ldots)>0 \qquad h^{1/2}>0$$

$$0=\frac{\partial t}{\partial\beta}=-\tfrac{1}{2}+\varepsilon\left(-\tfrac{3}{8}(\alpha-\beta)\cos\beta+\tfrac{1}{4}\sin\beta\right)+\varepsilon^{2}\left(\tfrac{15}{64}(\alpha-\beta)\sin 2\beta+O(1)\right)$$

$$\alpha-\beta=-\frac{4}{3\varepsilon\cos\beta}\left(1+\tfrac{3}{4}\varepsilon\sin\beta+O\left(\varepsilon^{2}\right)\right) \qquad t=-\frac{2}{3\varepsilon\cos\beta}\left(1+O\left(\varepsilon^{2}\right)\right)$$

Волна опрокидывается при $\boxed{t=\tfrac{2}{3}\varepsilon^{-1}+O(\varepsilon)}$ в точках

$$x=\tfrac{2}{3}\varepsilon^{-1}+\pi(2n+1)+O(\varepsilon)$$

15. Упражнение к лекции 9

1. Найти третий член асимптотического разложения в задаче об осцилляторе Дюффинга.
2. Функция *y(x)* удовлетворяет уравнению

$$\left(x^2+\varepsilon y\right)\frac{dy}{dx}+y=0, \quad y(1)=e>0$$

Найти *y(0)*

3. Рассмотреть задачу $\left(x+\varepsilon y\right)y'+y=0, \quad y(1)=1$

А) Построить прямое разложение . Найти область, в которой оно разваливается.

Б) Использовать метод растянутых координат для нахождения равномерно пригодного разложения.

В) Построить точное решение, поменяв местами зависимую и независимую переменную, и сравнить его с разложением.