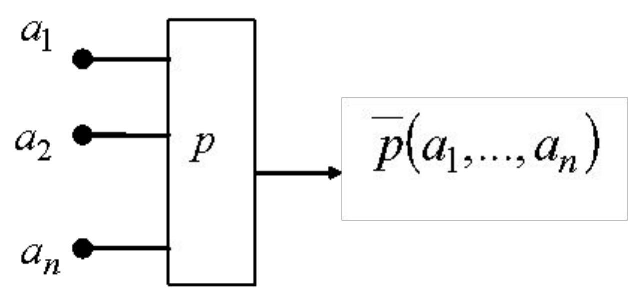
Переключательные схемы и логические элементы

Переключательную схему с функцией проводимости, $p = p(x_1,\ldots,x_n)$, можно представлять в виде устройства с n входами и одним выходом, которое преобразует входные булевы значения $x_1 = a_1,\ldots,x_n = a_n$ в выходное булево значение $\overline{p}(a_1,\ldots,a_n)$.

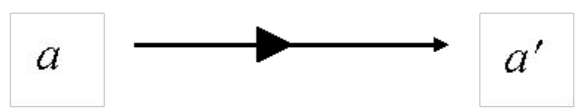
Графически такое устройство изображается диаграммой:



Простейшие булевы многочлены моделируют ПС, которые называются *логическими элементами* (или *вентилями*) и обозначаются специальными диаграммами.

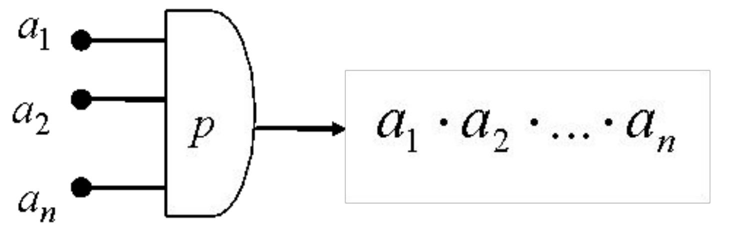
Примеры.

Булев многочлен $p(x) = x'$ моделирует устройство с одним входом и одним выходом, которое изображается диаграммой



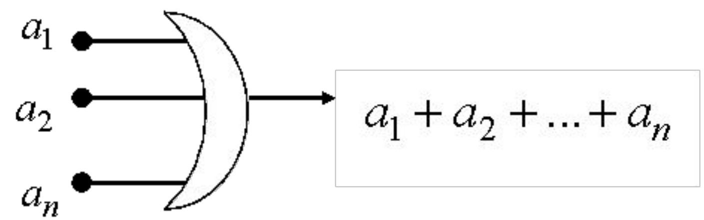
и называется *NOT-элементом.*

Булев многочлен $p(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ моделирует устройство с *n* входами и одним выходом, которое изображается диаграммой



и называется *AND-элементом.*

Булев многочлен $p(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ моделирует устройство с n входами и одним выходом, которое изображается диаграммой



и называется *OR-элементом.*

Примеры.

1. Построим ПС, которая моделирует сложение двух двоичных цифр и называется *полусумматором*. Такая ПС имеет два входа a_1, a_2 и два выхода $\bar{s}(a_1, a_2), \bar{c}(a_1, a_2)$, которые описывают два разряда суммы $a_1 + a_2$. Таблица этих булевых функций имеет следующий вид:

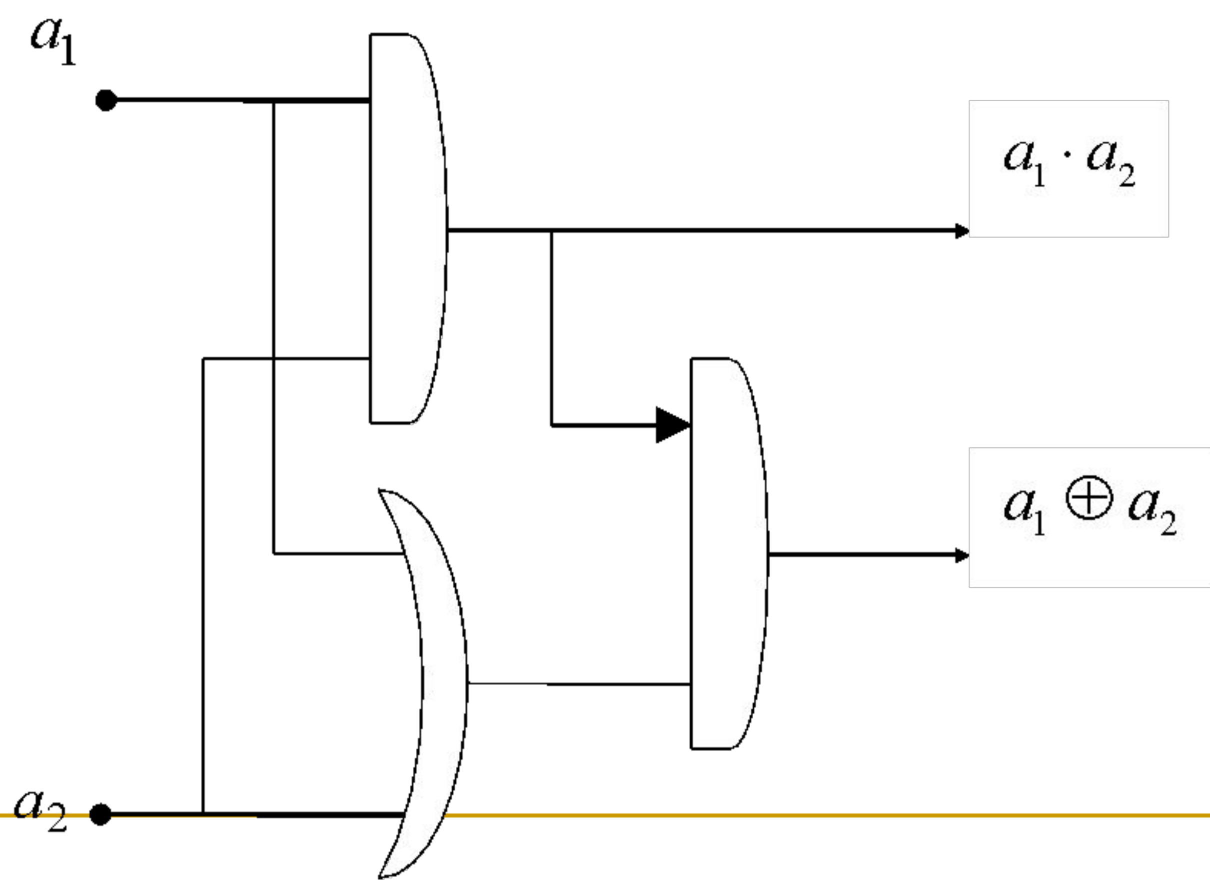
a_1	a_2	$\bar{s}(a_1, a_2)$	$\bar{c}(a_1, a_2)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Получаем булевы функции:

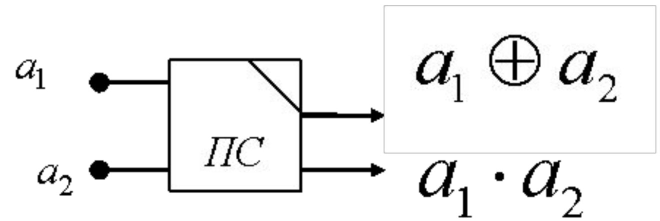
$$c(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2, \;\; s(x_1, x_2) = x_1' x_2 + x_1 x_2'.$$

$$s(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = (x_1 \leftrightarrow x_2)' = (x_1 \cdot x_2 + x_1' \cdot x_2')' = c' \cdot (x_1 + x_2),$$

Полусумматор представляется диаграммой:



Символически полусумматор изображается диаграммой:



Сложностью ПС называется число логических элементов в этой схеме.

Полусумматор реализуется ПС сложности 4.

Примеры.

2. Построим ПС, которая моделирует сложение трех двоичных цифр и называется *сумматором*. Такая ПС имеет три входа a_1, a_2, a_3 и два выхода $\overline{s}(a_1, a_2, a_3)$, $\overline{c}(a_1, a_2, a_3)$, которые описывают два разряда суммы $a_1 + a_2 + a_3$.

Легко проверить, что

$$s(x, y, z) = (x \oplus y) \oplus z,$$

$$c(x, y, z) = xyz' + xy'z + x'yz + xyz$$

$$= xy + \left(xy' + x'y\right)z = xy + (x \oplus y)z.$$

Реализуется сумматор ПС сложности 9.

Теорема 1. Суммирование двух *n*-разрядных двоичных чисел реализуется ПС сложности $9n-5$, которая обозначается S_n и называется *сумматором* порядка *n*.

Теорема 2. Умножение двух *n*-разрядных двоичных чисел реализуется ПС сложности $O\left(n^{\log_2 3}\right)$, которая обозначается M_n и называется *умножителем* порядка *n*.

Минимизация булевых многочленов

Рассмотрим вопрос минимизации ДНФ p. Конъюнкт q называется *импликантом* формы p, если $pq = q$. Импликанты, минимальные по числу вхождений в них булевых переменных, называются *простыми импликантами*. Дизъюнкция всех простых импликант формы p называется *сокращенной ДНФ*.

Лемма 1. Любая ДНФ p эквивалентна некоторой сокращенной ДНФ.

Сокращенную ДНФ формы p можно получить *методом Квайна* с помощью последовательного применения следующих двух видов операций:

1) *операция склеивания*, которая для конъюнктов q и булевых переменных x определяется по формуле:

$$qx + qx' = qx + qx' + q\,;$$

2) *операция поглощения*, которая для конъюнктов q, булевых переменных x и значений $\alpha \in \{0,1\}$ определяется по формуле:

$$qx^{\alpha} + q = q\,.$$

Пример. Найдем сокращенную ДНФ для булева многочлена

$$p = x'yz' + x'yz + xy'z + xyz' + xyz.$$

В результате применения операции склеивания к различным парам конъюнктов многочлена p получим ДНФ

$$x'yz' + x'yz + xy'z + xyz' + xyz + x'y + yz' + yz + xz + xy + y.$$

В результате применения операции поглощения к различным парам конъюнктов последней ДНФ получим булев многочлен $xz + y$, который является сокращенной ДНФ булева многочлена p.

В общем случае сокращенная ДНФ формы p не является минимальной формой, так как она может содержать *лишние* импликанты, удаление которых не изменяет булеву функцию $\overline{p}$. В результате удаления таких лишних импликант получаются *тупиковые ДНФ*.

Тупиковые ДНФ с наименьшим числом вхождений в них булевых переменных называются *минимальными ДНФ*.

Лемма 2. Любая ДНФ p эквивалентна некоторой минимальной ДНФ.

Минимальная ДНФ формы p получается с помощью *матрицы Квайна*:

– столбцы матрицы помечаются конъюнктами $p_1,\dots,p_m$ формы p ;

– строки матрицы помечаются импликантами $q_1,\dots,q_k$ сокращенной ДНФ формы p ;

– на пересечении строки q_i и столбца p_j ставится символ *, если импликант q_i является частью конъюнкта p_j .

Тупиковые ДНФ - дизъюнкции тех минимальных наборов импликант, в строках которых имеются звездочки для всех столбцов матрицы Квайна.

Тупиковые ДНФ с наименьшим числом вхождений булевых переменных являются искомыми минимальными ДНФ формы p .

Пример. Найдем минимальную ДНФ для многочлена $p = x'y'z' + x'y'z + xy'z + xyz$.

В результате применения операции склеивания получим ДНФ $x'y'z' + x'y'z + xy'z + xyz + x'y' + y'z + xz$.

С помощью операции поглощения получим $x'y' + y'z + xz$ - сокращенная ДНФ булева многочлена p. Матрица Квайна:

	$x'y'z'$	$x'y'z$	$xy'z$	xyz
$x'y'$	*	*		
$y'z$		*	*	
xz			*	*

Минимальный набор импликант, в строках которых имеются звездочки для всех столбцов матрицы Квайна, состоит из конъюнктов $x'y'$ и xz . Значит, $x'y' + xz$ - минимальная ДНФ формы p .

Следствие 3. Любая булева функция, не равная тождественно нулю, представима минимальной ДНФ и любая булева функция, не равная тождественно единице, представима минимальной КНФ.

Логика предикатов

Понятие предиката

ПРЕДИКАТ (лат. praedicatum – высказанное) – термин, обозначающий член предложения – сказуемое.

Пример. Студент уныло **слушает** лекцию.

Субъект Атрибут ***Предикат*** *Объект*

Другое значение термина «предикат» – выражение отношения между лицами, предметами, событиями, явлениями.

Пример. Студент уныло ***слушает*** лекцию.

Слушает (кто, кого, как)

Определение. *Предикатом* называется утверждение, содержащее переменные $x_1,\dots,x_n$, которое превращается в высказывание при замене этих переменных конкретными объектами из некоторой области возможных значений.

Обозначаются предикаты $P, Q, \dots$

Переменные $x_1,\dots,x_n$, называются *предметными* или *индивидуальными переменными*. Число предметных переменных в предикате называется его *арностью* или *местностью*.

Более точно, предикат P с n предметными переменными называется *n-арным* или *n-местным предикатом* и обозначается $P(x_1,\dots,x_n)$.

Предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ является функцией, которая каждому набору значений $x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n$ его n предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$ ставит в соответствие некоторое высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$, имеющее определенное истинностное значение $\lambda(P(a_1,\ldots,a_n))$.

Если отвлечься от содержания высказываний и учитывать только их истинностные значения, то предикат можно рассматривать как функцию со значениями в множестве $\{0,1\}$.

Рассматривая такую функцию на некотором фиксированном множестве M допустимых значений предметных переменных предиката, получим n-арное отношение на множестве M, состоящее из всех таких упорядоченных наборов $(a_1,\dots,a_n)$ n элементов $a_1,\dots,a_n \in M$, для которых $P(a_1,\dots,a_n)$ является истинным высказыванием.

Такое n-арное отношение обозначается символом P^+ и называется *множеством истинности* предиката P на множестве M.