



17.6. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Вычисление объемов тел

Из геометрического смысла двойного интеграла следует, что любой двойной интеграл задает объем тела, ограниченного сверху графиком подынтегральной функции, снизу - областью D , с боков - цилиндрической поверхностью с направляющими по границе области D .



Пример.

*Вычислить объем тела,
ограниченного поверхностями*

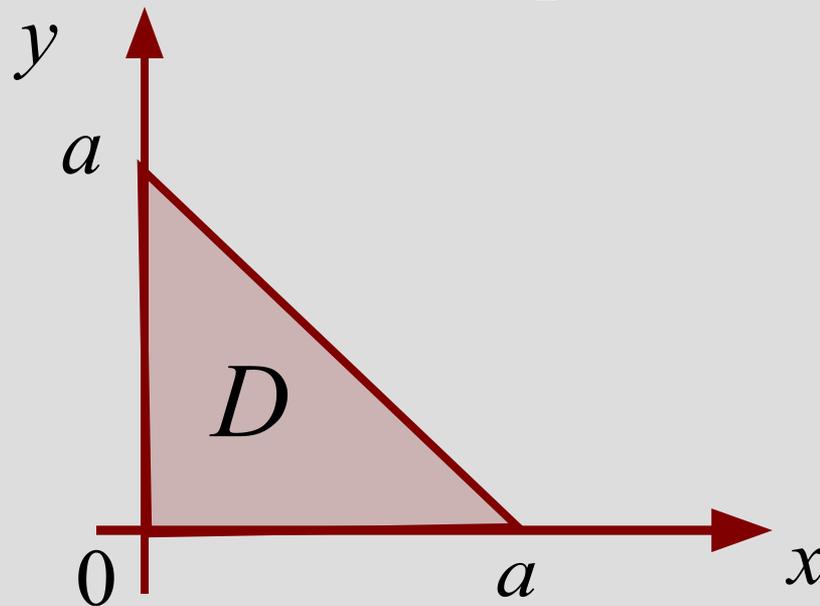
$$z = x \cdot y, \quad x + y = a, \quad (a > 0)$$

$$z = 0$$



Решение.

Поскольку подынтегральная функция должна быть не отрицательна, то область интегрирования ограничена на плоскости xOy прямоугольным равнобедренным треугольником с катетами, равными a .





$$\begin{aligned}\iint_D x \cdot y \, dx dy &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} x \cdot y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^a dx x \cdot y^2 \Big|_0^{a-x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a dx \cdot x \cdot (a-x)^2 = \frac{1}{2} \int_0^a dx \cdot (x^3 - 2ax^2 + a^2 \cdot x) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{a^2 x^2}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{a^4}{24} \text{ (куб.ед.)}\end{aligned}$$



2. Вычисление площадей фигур

Площадь некоторой области D может быть найдена по формуле:

$$\iint_D dx dy = S_D$$

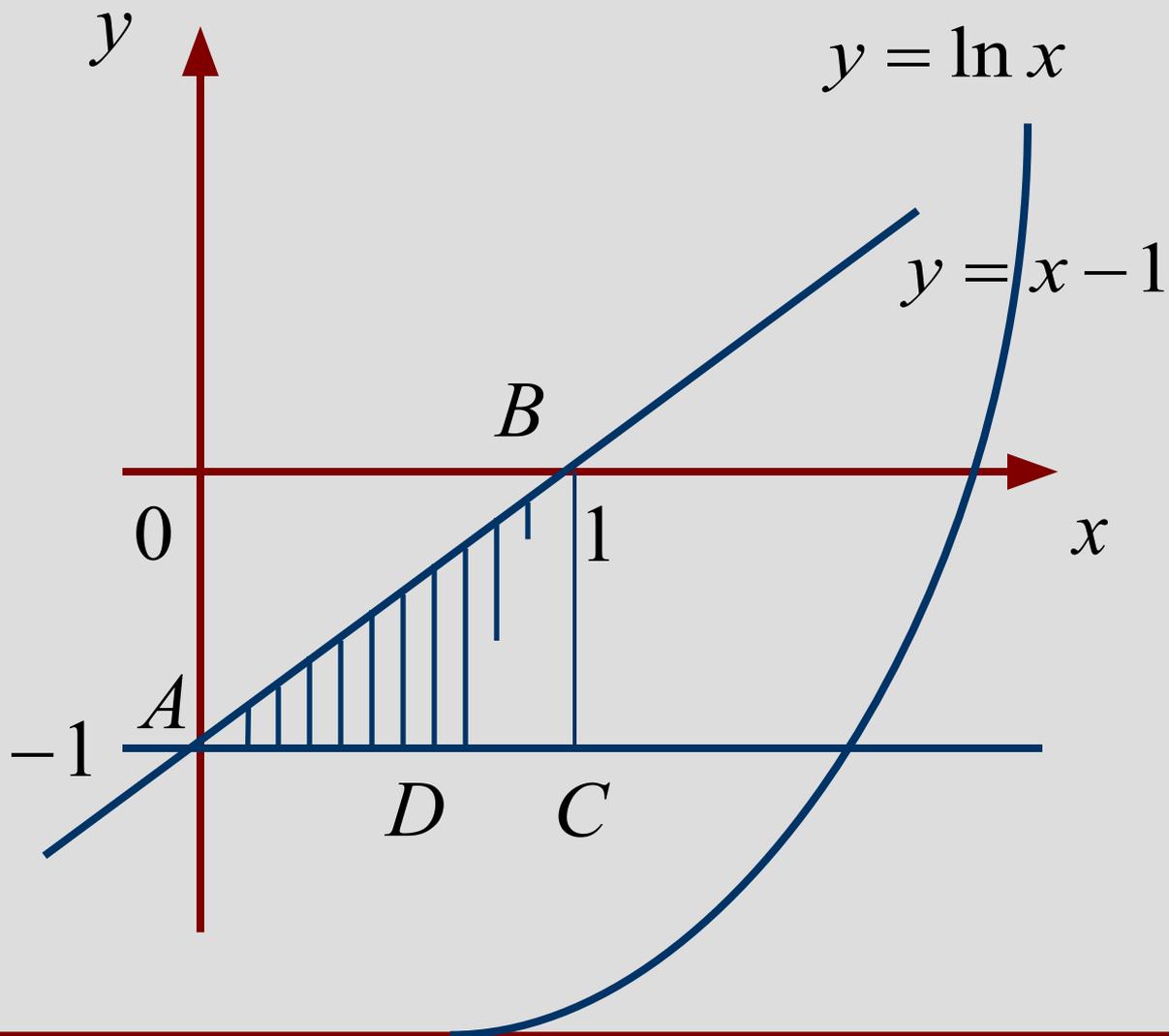


Пример.

*Вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями:*

$$y = \ln x, \quad x - y = 1, \quad y = -1$$

Решение.




$$S_{ABD} = S_{ABC} - S_{BCD}$$

S_{ABC} - площадь прямоугольного треугольника,
катеты которого равны 1.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}$$

S_{BCD} - ограничена снизу прямой $y=-1$ при

$$\frac{1}{e} \leq x \leq 1$$

-сверху кривой $y=\ln x$ и справа прямой $x=1$.


$$S_{ABD} = \frac{1}{2} - \iint_{BCD} dx dy = \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{e}}^1 dx \int_{-1}^{\ln x} dy =$$

$$= \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{e}}^1 dx (y) \Big|_{-1}^{\ln x} = \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{e}}^1 dx \cdot (\ln x + 1) =$$

$$\left| \begin{array}{ll} \ln x + 1 = u & dx = dv \\ du = \frac{1}{x} dx & x = v \end{array} \right|$$



$$= \frac{1}{2} - (x \cdot \ln x) \Big|_{1/e}^1 + \int_{1/e}^1 x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \cdot e + x \Big|_{1/e}^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \text{ (кв.ед.)}$$