Практика № 10 (после лекции 6)

1122, 5116

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ.

Летучка

(ПИШЕМ ТОЛЬКО ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ!)

1) Вектор - это…
2) МОДУЛЬ (ДЛИНА) вектора - это …
3) Какие векторы называются КОЛЛИНЕАРНЫМИ …
4) Какие векторы называются КОМПЛАНАРНЫМИ…
5) Что такое ОРТ– вектор…

Летучка(ответы)

1) Вектор – это направленный отрезок.

2)МОДУЛЬ (ДЛИНА) вектора - это число (неотрицательное), равное длине отрезка.

3) Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются КОЛЛИНЕАРНЫМИ.

4) Векторы, параллельные одной плоскости, называются КОМПЛАНАРНЫМИ.

5) Вектор $\overline{e}$, модуль которого равен ЕДИНИЦЕ, называется ЕДИНИЧНЫМ, или ОРТ- вектором: $|\overline{e}| = 1$.

Задача 1.

Дано: Вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AD}$ служат сторонами параллелограмма $ABCD$;

M – точка пересечения его диагоналей.

Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вектора $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}, \overline{MD}$.

Задача 2.

Дано: $\overline{a} \perp \overline{b}, |\overline{a}| = 5, |\overline{b}| = 12.$

Найти: $|\overline{a} + \overline{b}|,\ |\overline{a} - \overline{b}|$.

Задача 3.

Дано: треугольник $\Delta\, ABC$; AD, BE, CF – медианы.

Доказать: $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$.

Задача 4.

Дано: треугольник $\Delta\, ABC$; M – точка пересечения медиан; O – любая точка.

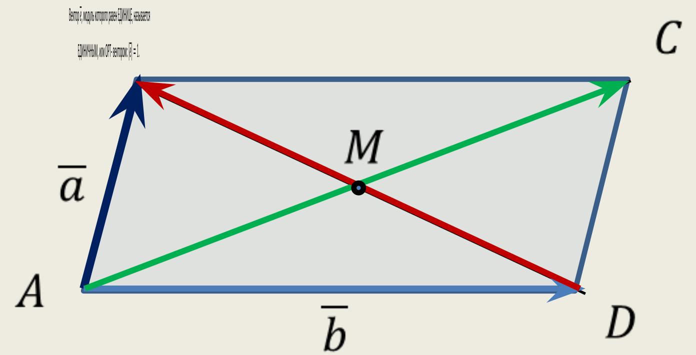
Доказать: $\overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \right)$

Задача 1

Дано: Вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AD}$ служат сторонами параллелограмма $ABCD$;

M – точка пересечения его диагоналей.

Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вектора $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}, \overline{MD}$.



Решение:

$\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$ по правилу сложения;

$\overline{DB} = \overline{a} - \overline{b}$ по правилу вычитания;

ДИАГОНАЛИ параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, поэтому

$$|AM| = |MC| = \frac{1}{2}|AC|; \quad |DM| = |MB| = \frac{1}{2}|DB|;$$

тогда по правилу умножения вектора на число:

$$\overline{MA} = \frac{1}{2}\overline{CA}; \quad \overline{MC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b}); \quad \overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{1}{2}(\overline{a} - \overline{b}); \quad \overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{BD};$$

но $\overline{CA} = -\overline{AC} = -(\overline{a} + \overline{b}) \Rightarrow \overline{MA} = -\frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b});$

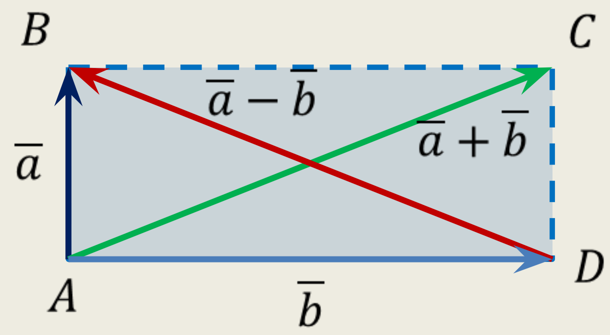
$$\overline{BD} = -\overline{DB} = -(\overline{a} - \overline{b}) = (\overline{b} - \overline{a}) \Rightarrow \overline{MD} = \frac{1}{2}(\overline{b} - \overline{a});$$

Задача 2

Дано: $\overline{a} \perp \overline{b}$, $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 12$.

Найти: $|\overline{a} + \overline{b}|$, $|\overline{a} - \overline{b}|$.

Решение:



Векторы $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$ в параллелограмме, построенном на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$,

служат ДИАГОНАЛЯМИ.

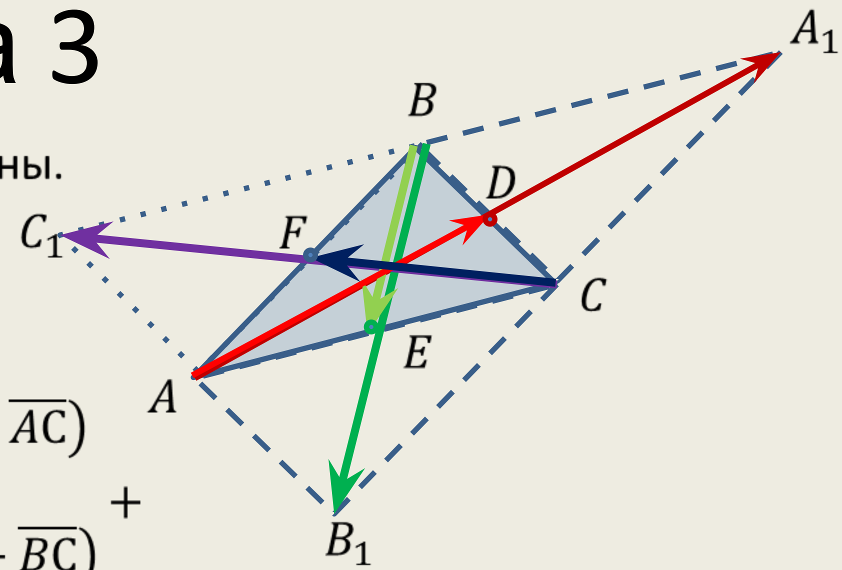
Так как $\overline{a} \perp \overline{b}$, то $ABCD$ $-$ прямоугольник, его диагонали равны $\Rightarrow |\overline{a} + \overline{b}| = |\overline{a} - \overline{b}|$.

По теореме Пифагора в ΔABC: $|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2$;

$$|\overline{AC}| = \sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

ОТВЕТ: $|\overline{a} + \overline{b}| = |\overline{a} - \overline{b}| = 13$.

Задача 3



Дано: треугольник $\Delta\, ABC$; AD, BE, CF – медианы.

Доказать: $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$.

Доказательство :

$$\overline{AA_1} = \overline{AB} + \overline{AC};\quad \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AA_1} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AC}\right)$$

$+$

$$\overline{BB_1} = \overline{BA} + \overline{BC};\quad \overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BB_1} \Rightarrow \overline{BE} = \frac{1}{2}\left(\overline{BA} + \overline{BC}\right)$$

$+$

$$\overline{CC_1} = \overline{CB} + \overline{CA};\quad \overline{CF} = \frac{1}{2}\overline{CC_1} \Rightarrow \overline{CF} = \frac{1}{2}\left(\overline{CB} + \overline{CA}\right)$$

$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{BA} + \overline{BC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{CB} + \overline{CA}\right)$$

$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\cancel{\overline{AB}} + \cancel{\overline{AC}} + \cancel{\overline{BA}} + \cancel{\overline{BC}} + \cancel{\overline{CB}} + \cancel{\overline{CA}}\right)}_{\overline{0}}$$

$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \frac{1}{2}\cdot\overline{0}$$

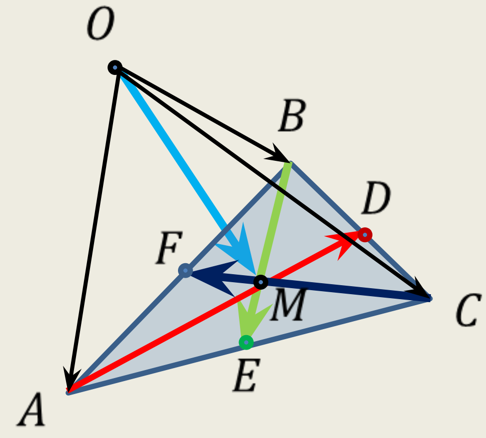
$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$, **чтд.**

Задача 4

Дано: треугольник $\Delta\ ABC$; M — точка пересечения медиан; O — любая точка.

Доказать: $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

Доказательство :



$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AD};$$

$+$

$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM} = \overline{OB} + \frac{2}{3}\overline{BE};$$

$+$

$$\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} = \overline{OC} + \frac{2}{3}\overline{CF};$$

$$3 \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \frac{2}{3}\underbrace{(\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF})}_{\overline{0}\ \text{по задаче 1}}$$

$$3 \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \Rightarrow$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$ **чтд**

.

Медианы в треугольнике точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины:

$$|AM|:|MD| = 2:1 \Rightarrow |AM| = \frac{2}{3}|AD|;$$

$$|BM|:|ME| = 2:1 \Rightarrow \overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{BE};$$

$$|CM|:|MF| = 2:1 \Rightarrow \overline{CM} = \frac{2}{3}\overline{CF};$$