

Лекция 35.

Преобразование Лапласа и его свойства.

Введение

Преобразование Лапласа широко используется в радиотехнике для решения самых разнообразных задач, связанных с изучением сигналов.

На практике широко применяются таблицы преобразования Лапласа, наличие таблиц сделало метод преобразования Лапласа популярным как в теоретических исследованиях, так и в инженерных расчетах радиотехнических устройств и систем.

Преобразование Лапласа является исключительно гибким и мощным методом, позволяющим путем стандартных процедур находить решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Преобразование Лапласа, его свойства.

Рассмотрим функции $f(t)$ удовлетворяющие **свойствам**:

1. $f(t)$ непрерывна на всей числовой оси за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

2. $f(t)$ такова что:
$$\left\{ \begin{array}{l} f(t), t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{array} \right\}$$

3. Существуют такие постоянные $M > 0$, $a > 0$, что $|f(t)| \leq M e^{at}$,
 $\forall t \rightarrow \infty$

Число a называется показателем роста функции.

Функции, удовлетворяющие 3-м свойствам называются оригиналами.

Пример оригинала функция Хевисайда (единичная)

$$\theta(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{array} \right\}$$

$\theta(t) \cdot \sin \omega t$ - оригинал

1-ое свойство удовлетворяется

2-ое свойство $\theta(t) \cdot \sin \omega t = \left\{ \begin{array}{l} \sin \omega t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{array} \right\}$

Чтобы получить оригинал надо умножить эту функцию на функцию Хевисайда.

Условимся, что все функции, которые рассматриваются уже умножены на функцию Хевисайда и запись

$$1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \text{ или}$$

$$\sin \omega t = \begin{cases} \sin \omega t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Поставим в соответствие каждой функции из множества оригиналов с помощью преобразования:

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(P)$$

некоторую функцию $F(P)$,

где $p = x + iy$ – некоторые числа (лежащие справа от оси y).

Функцию $F(P)$ называют изображением для функции $f(t)$

$$f(t) \div F(P)$$

Интегральные преобразования называются преобразованием Лапласа

Рассмотрим интеграл $\int_0^{\infty} \theta(t) e^{-pt} dt =$

θ - единичная функция Хевисайда

$$= \int_0^{\infty} 1 e^{-pt} dt = \lim_{\eta \rightarrow \infty} - \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} - \frac{e^{-x\eta} e^{-iy\eta}}{p} \Big|_0^{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[- \frac{e^{-x\eta} e^{-iy\eta}}{p} + \frac{1}{p} \right] =$$

$$= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[- \frac{e^{-x\eta} (\cos(y\eta) - i \sin(y\eta))}{p} + \frac{1}{p} \right] = \frac{1}{p}$$

$$x > 0$$

Преобразование Лапласа переводит функции действительных переменных в функции комплексного переменного.

Линейность преобразований Лапласа. Свойства.

Если $f(t)$ и $\varphi(t)$ таковы что: $f(t) \div F(P)$, $\varphi(t) \div \phi(p)$, то:

$$\lambda \cdot f(t) + \mu\varphi(t) \div \lambda F(P) + \mu\phi(P)$$

λ, μ - некоторые комплексные числа

Доказательство:

Найдем преобразования Лапласа от функции

$$\int_0^{\infty} [\lambda \cdot f(t) + \mu\varphi(t)] e^{-pt} dt =$$

Пользуясь свойством линейности интеграла имеем:

$$= \lambda \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \mu \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt \stackrel{def}{=} \lambda F(P) + \mu\phi(P)$$

$$\int_0^{\infty} [\lambda \cdot f(t) + \mu\varphi(t)] e^{-pt} dt = \quad (\text{преобразования Лапласа от линейной}$$

комбинации) $= \lambda \cdot f(t) + \mu\varphi(t) \div \lambda \cdot F(P) + \mu\phi(P)$

Область сходимости преобразования Лапласа.

Аналитичность преобразования Лапласа.

Теорема (об области сходимости):

Пусть $f(t)$ - оригинал. Тогда $\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ сходится для всех p , $Re p > a$.

Если же $Re p \geq x_0 > a$, то сходимость равномерная.

Доказательство:

Так как $f(t)$ – оригинал, следовательно $|f(t)| \leq M e^{at}$, a – показатель роста функции. Тогда $\left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| |e^{-pt}| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{at} |e^{-pt}| dt =$

p – произвольные комплексные числа.

$$p = x + iy$$

$$\text{Значит } e^{-pt} = e^{-xt} e^{-iyt} \Rightarrow |e^{-pt}| = |e^{-xt} e^{-iyt}| = e^{-xt} |e^{-iyt}|$$

$$= M \int_0^{\infty} e^{at} e^{-xt} dt$$

По определению несобственного интеграла:

$$\int_0^{\infty} e^{-(x-a)t} dt = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{e^{-(x-a)t}}{-(x-a)} \Big|_0^{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(x-a)\eta}}{-(x-a)} + \frac{1}{x-a} \right]$$

Так как действительная часть $p : \operatorname{Re} p = x > a$ (по условию), то $x - a > 0 \Rightarrow -(x - a) < 0$.

Значит $\frac{e^{-(x-a)\eta}}{-(x-a)} \rightarrow 0$, когда $\eta \rightarrow +\infty$

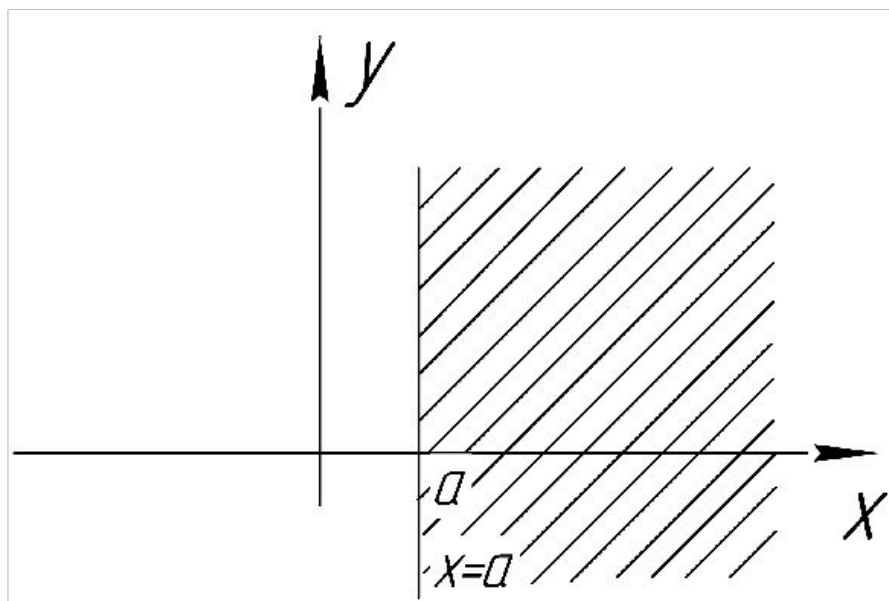
$$\left| \int_0^{\infty} f(t)e^{pt} dt \right| < \frac{M}{x-a}, \quad x > a$$

Это означает, что интеграл сходится, причем абсолютно.

Если $x \geq x_0 > a$ – то сходимость будет равномерная.

Начертим область сходимости преобразования Лапласа. Область сходимости, когда $\operatorname{Re} p > a$, a – действительное число.

Областью сходимости преобразования Лапласа является заштрихованная область.



Теорема (об аналитичности преобразования Лапласа) Преобразования Лапласа, сопоставляющие оригиналу $f(t) \div F(p)$ изображение $F(p)$ с помощью формулы $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ является аналитической функцией в области $Re p > a$, т.е. $F(p)$ – аналитическая функция.

Изображения некоторых элементарных функций.

$$1 \div \frac{1}{p}, Re p > 0$$

$$e^{\alpha t}. \text{ Найдем интеграл функции } \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p} \right|_0^{\eta} =$$

$$= \left\{ \text{пусть } Re p > Re \alpha \right\} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(\alpha-p)\eta}}{\alpha-p} - \frac{1}{\alpha-p} \right] = \frac{1}{p-\alpha}$$

$$e^{\alpha t} \div \frac{1}{p-\alpha}, Re p > Re \alpha$$

Таблица 1.

Таблица теорем

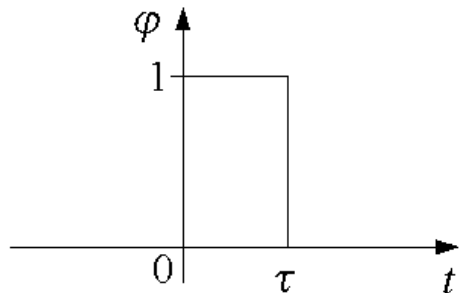
Линейность	$af(t) + bg(t) \div aF(p) + bG(p)$
Подобие	$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
Затухание	$e^{at} f(t) \div F(p - a)$
Запаздывание	$f(t - \tau) \div e^{-p\tau} F(p)$
Дифференцирование	$f'(t) \div pF(p) - f(0)$

Примеры:

1) $f(t) = e^{at} \sin wt$.

Так как $\sin wt = \frac{w}{p^2 + w^2}$, по теореме затухания $e^{at} \sin wt \div \frac{a}{(p-a)^2 + w^2}$.

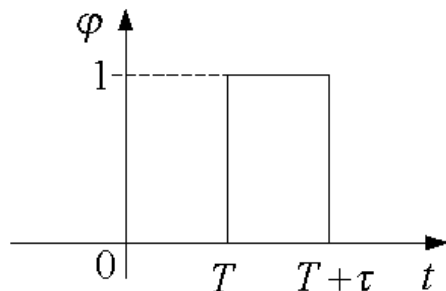
2)



$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & t \quad 0 < < \tau, \\ 0, & \text{если } t > \tau \end{cases}$$

$$\varphi(t) = h(t) - h(t - \tau) \div \frac{1}{p} - e^{-p\tau} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}).$$

3)



$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < T, \\ 1, & T < t < T + \tau, \\ 0, & t > T + \tau \end{cases}$$

$$\varphi(t) = h(t - T) - h(t - T - \tau) \Rightarrow \varphi(t) \div e^{-Tp} \cdot \frac{1}{p} - e^{-p(T+\tau)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \cdot e^{-pT} (1 - e^{-p\tau})$$