

# Алгебра і початки аналізу. 10 клас (за підручником Мерзляк А. Г.)

§ 2

ПОВТОРЕННЯ  
ТА РОЗШИРЕННЯ  
ВІДОМОСТЕЙ  
ПРО ФУНКЦІЮ



# Тема уроку: Обернена функція

# Поняття оберненої функції

На рисунках 47, 48 зображено графіки функцій  $f$  і  $g$ . Будь-яка горизонтальна пряма перетинає графік функції  $f$  не більше ніж в одній точці. Це означає, що кожному числу  $y_0 \in E(f)$  відповідає єдине число  $x_0 \in D(f)$  таке, що  $y_0 = f(x_0)$ .

Функція  $g$  такої властивості не має.

Справді, з рисунка 48 видно, що значенню  $y_0$  відповідають два значення аргументу  $x_1$  і  $x_2$  такі, що  $y_0 = g(x_1)$  і  $y_0 = g(x_2)$ .

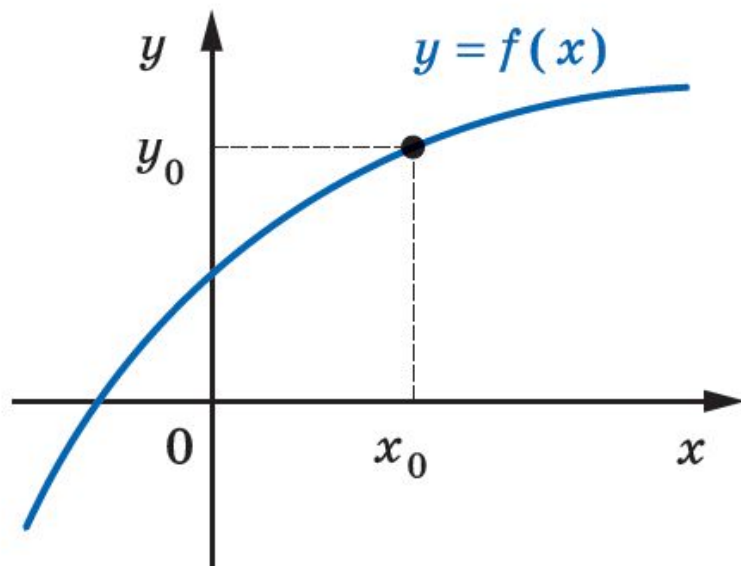


Рис. 47

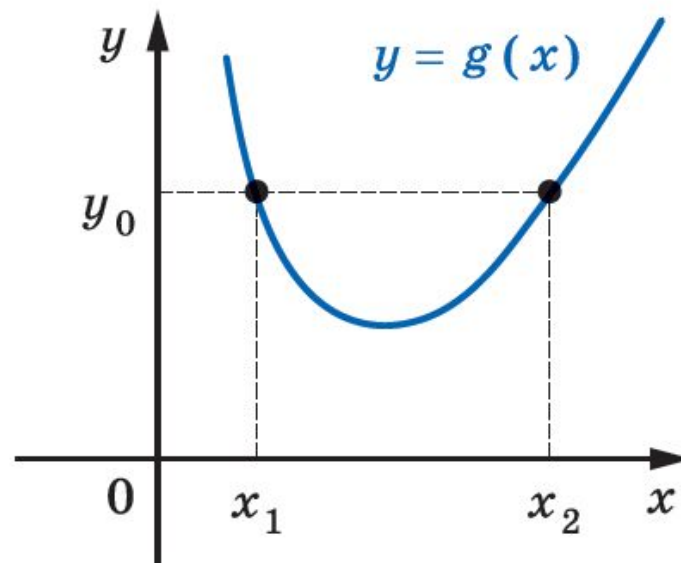


Рис. 48

# Оборотна функція

Означення. Функцію  $y = f(x)$  називають оборотною, якщо для будь-якого  $y_0 \in E(f)$  існує єдине  $x_0 \in D(f)$  таке, що  $y_0 = f(x_0)$ . Функція  $f$  (рис. 47) є оборотною. Функція  $g$  (рис. 48) не є оборотною.

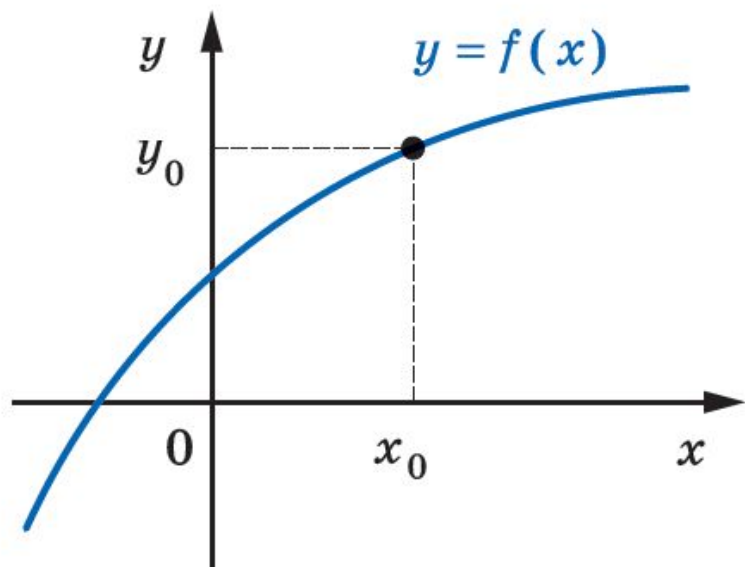


Рис. 47

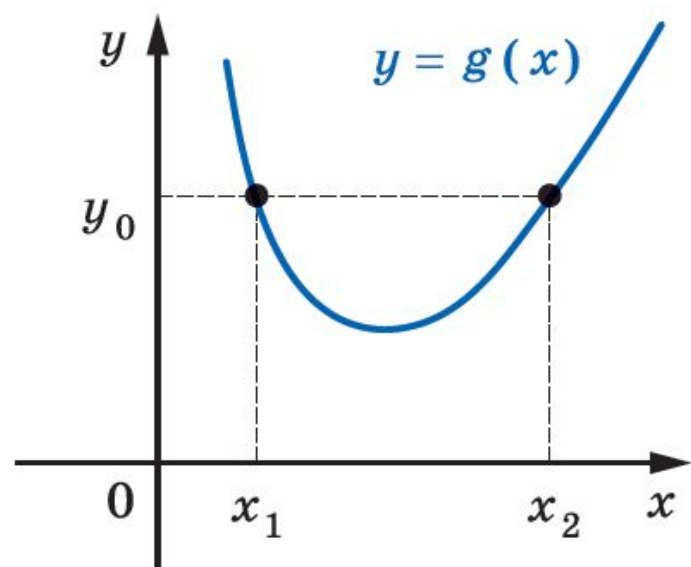
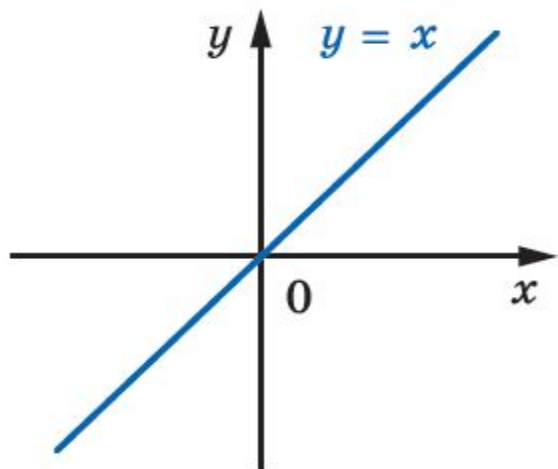


Рис. 48

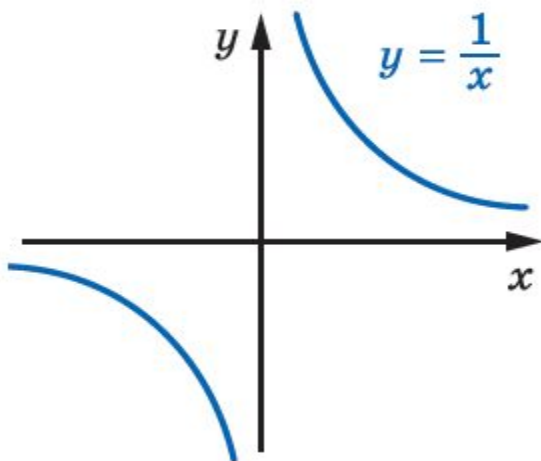
# Приклади оборотних функцій

Функції  $y = x$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \sqrt{x}$  є прикладами оборотних функцій (рис. 49). а) б) в)

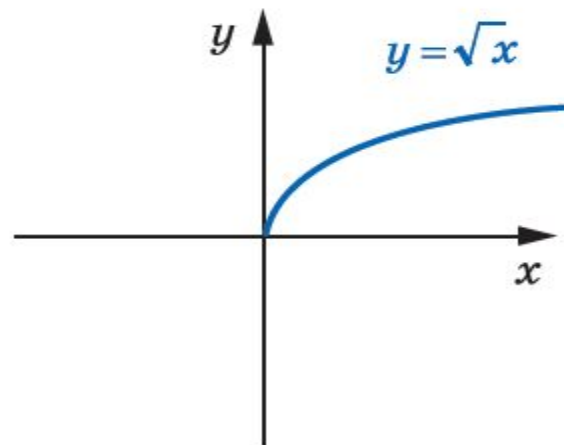
Функція  $y = x^2$  не є оборотною. Наприклад, значенню функції, яке дорівнює 4, відповідають два значення аргументу  $x_1 =$



а)



б)



в)

Рис. 49

# Теорема 6.1

**Теорема 6.1. Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.**

*Доведення.*

*Припустимо, що існує зростаюча функція  $f$ , яка не є оборотною. Тоді знайдеться  $y_0 \in E(f)$ , для якого існують  $x_1$  і  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) такі, що  $f(x_1) = f(x_2) = y_0$ .*

*Разом з тим функція  $f$  — зростаюча, і з нерівності  $x_1 < x_2$  випливає, що  $f(x_1) < f(x_2)$ . Отримали суперечність.*

*Аналогічно розглядається випадок, коли функція  $f$  є спадною.*

Розглянемо функцію  $y = f(x)$ , задану таблично:

$x$	5	6	7
$y$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функція  $f$  є оборотною. Поміняємо рядки таблиці місцями і розглянемо функцію  $y = g(x)$ , задану отриманою таблицею

$x$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
$y$	5	6	7

Фу| 1)  $D(f) = E(g)$  і  $E(f) = D(g)$ ;

$$2) f(5) = \sqrt{5}, \quad g(\sqrt{5}) = 5; \quad f(6) = \sqrt{6}, \quad g(\sqrt{6}) = 6; \\ f(7) = \sqrt{7}, \quad g(\sqrt{7}) = 7.$$

Ці рівності означають, що коли  $f(x_0) = y_0$ , то  $g(y_0) = x_0$ . У таких випадках говорять, що функція  $g$  є **оберненою до функції  $f$** , а функція  $f$  — **оберненою до функції  $g$** . **Такі функції  $f$  і  $g$  називають взаємно оберненими.**

# Взаємно обернені функції

Означення. Функції  $f$  і  $g$  називають взаємно оберненими, якщо:

- 1)  $D(f) = E(g)$  і  $E(f) = D(g)$ ;
- 2) для будь-якого  $x_0 \in D(f)$  з рівності  $f(x_0) = y_0$  випливає, що  $g(y_0) = x_0$ , тобто  $g(f(x_0)) = x_0$ .

**Можна показати, що другу умову в означенні можна замінити на таке: для будь-якого  $x_0 \in D(g)$  з рівності  $g(x_0) = y_0$  випливає, що  $f(y_0) = x_0$ , тобто  $f(g(x_0)) = x_0$ .**

**Коли функція  $f$  не є оборотною, то не існує функції, оберненої до неї.**

**Будь-яка оборотна функція має обернену.**



# Приклад

Доведіть, що функція  $f(x) = 2x - 1$  є оборотною. Знайдіть обернену функцію.

*Розв'язання.* Функція  $f(x) = 2x - 1$  є зростаючою. Отже, вона є оборотною.

Щоб задати обернену функцію, потрібно вказати правило, яке дає змогу за кожним значенням змінної  $y$  знайти відповідне значення змінної  $x$  таке, що  $y = 2x - 1$ .

$$\text{Маємо: } 2x = y + 1; \quad x = \frac{y+1}{2}.$$

Отримана рівність задає функцію з аргументом  $y$  і залежною змінною  $x$ .

Традиційно незалежну змінну позначають буквою  $x$ , а залежну — буквою  $y$ . Дотримуючись таких позначень, можна сказати, що ми отримали функцію, яка задається формулою  $y = \frac{x+1}{2}$ .

Покажемо, що функції  $g(x) = \frac{x+1}{2}$  і  $f(x) = 2x - 1$  є взаємно оберненими.

Маємо:  $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$ ,  $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$ .

Нехай  $f(x_0) = y_0$ , тобто  $y_0 = 2x_0 - 1$ . Доведемо, що  $g(y_0) = x_0$ .

Маємо:  $g(y_0) = \frac{y_0 + 1}{2} = \frac{2x_0 - 1 + 1}{2} = x_0$ .

Функція  $f(x) = x^2$  не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку  $[0; +\infty)$ . Отже, функція  $f(x) = x^2$ ,  $D(f) = [0; +\infty)$ , є оборотною. Також прийнято говорити, що функція  $f(x) = x^2$  є **оборотною на множині**  $[0; +\infty)$ . Знайдемо обернену функцію.

Маємо:  $y = x^2$ , де  $x \in [0; +\infty)$ . Звідси  $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$ .

Скориставшись традиційними позначеннями, отримуємо функцію  $y = \sqrt{x}$ .

Покажемо, що функції  $f(x) = x^2$ ,  $D(f) = [0; +\infty)$ , і  $g(x) = \sqrt{x}$  є взаємно оберненими.

Маємо:  $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$ ,  $E(f) = D(g) = [0; +\infty)$ .

Нехай  $f(x_0) = y_0$ , тобто  $y_0 = x_0^2$ , де  $x_0 \geq 0$ . Запишемо  $g(y_0) = \sqrt{y_0} = \sqrt{x_0^2} = |x_0| = x_0$ .

**Теорема 6.2.** *Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої  $y = x$ .*

*Доведення.* ☺ Нехай точка  $M(a; b)$  належить графіку функції  $y = f(x)$ . Тоді  $b = f(a)$ . Якщо функція  $g$  обернена до функції  $f$ , то  $g(b) = a$ , тобто точка  $N(b; a)$  належить графіку функції  $y = g(x)$ .

Покажемо, що точки  $M$  і  $N$  є симетричними відносно прямої  $y = x$ .

Якщо  $a = b$ , то точки  $M$  і  $N$  збігаються і належать прямій  $y = x$ .

При  $a \neq b$  маємо (рис. 50):  $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ , тобто точка  $O$  рівновіддалена від кінців відрізка  $MN$ , а отже, належить серединному перпендикуляру відрізка  $MN$ . Середина  $K$  відрізка  $MN$  має

координати  $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$ , тобто належить прямій  $y = x$ . Отже, пряма  $y = x$  і є серединним перпендикуляром відрізка  $MN$ . ▲

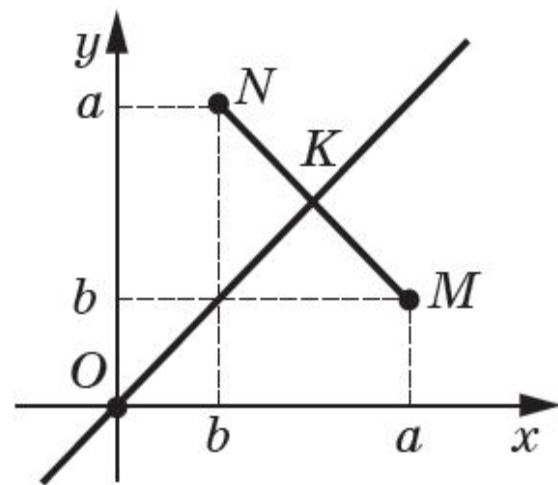
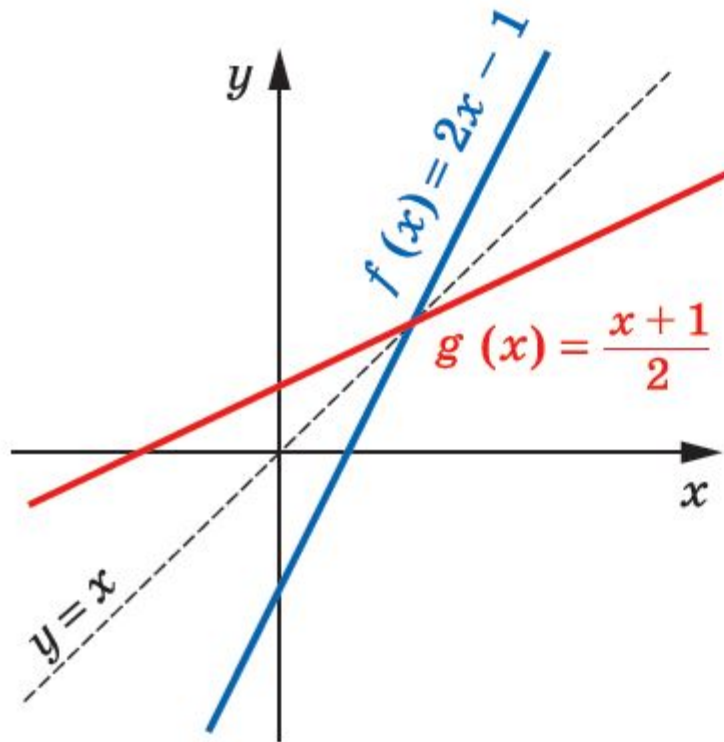
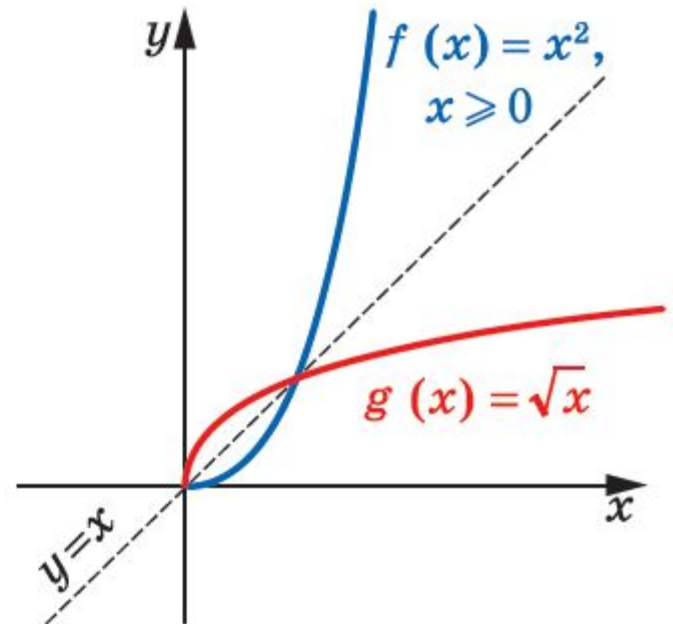


Рис. 50

Доведену теорему 6.2 ілюструють графіки взаємно обернених функцій, що розглядалися вище (рис. 51)



а)



б)

Рис. 51

**Теорема 6.3.** Якщо функція  $f$  є зростаючою (спадною), то обернена функція  $g$  є також зростаючою (спадною).

*Доведення.* ☹ Припустимо, що функція  $f$  — зростаюча і при цьому обернена до неї функція  $g$  не є зростаючою. Тоді знайдуться такі  $y_1 \in D(g)$  і  $y_2 \in D(g)$ , що з нерівності  $y_1 < y_2$  випливатиме нерівність  $g(y_1) \geq g(y_2)$ . Нехай  $g(y_1) = x_1$ ,  $g(y_2) = x_2$ . Отримуємо, що  $x_1 \geq x_2$ . Оскільки функція  $f$  — зростаюча, то  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , тобто  $y_1 \geq y_2$ . Отримали суперечність.

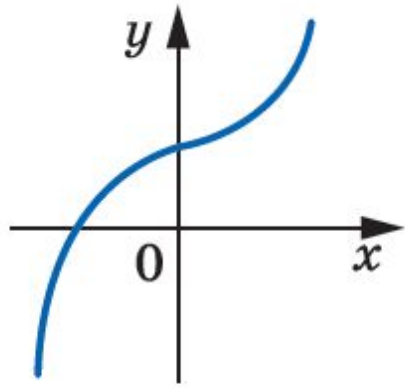
Для спадної функції міркуємо аналогічно. ▲

# Первинне закріплення вивченого матеріалу

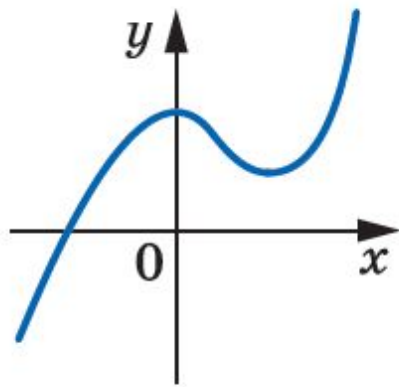
1. Яку функцію називають оборотною?
2. Сформулюйте теорему про оборотність зростаючої (спадної) функції.
3. Як пов'язані область визначення функції та область значень оберненої до неї функції?
4. Як пов'язані область значень функції та область визначення оберненої до неї функції?
5. Які дві функції називають взаємно оберненими?
6. Як розташовані графіки взаємно обернених функцій?
7. Якою є функція, обернена до зростаючої функції? до спадної функції?

# Тренувальні вправи

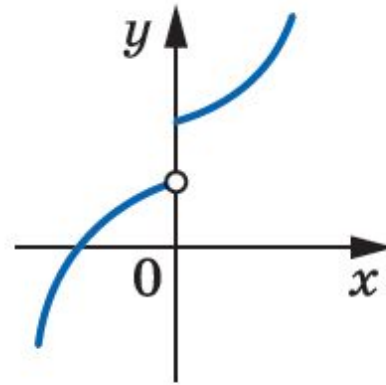
181.° Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 52, є оборотними?



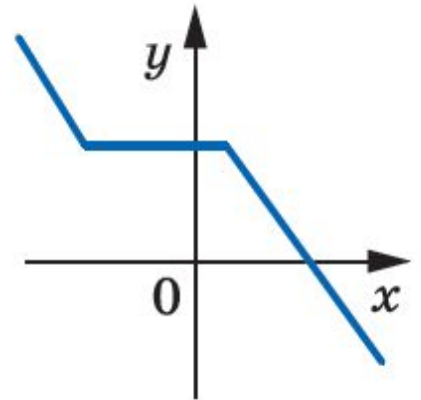
a)



б)



в)



г)

Рис. 52

# Коментоване виконання вправ

183.° Доведіть, що дана функція не є оборотною:

1)  $y = |x|$ ;                      2)  $y = \frac{1}{x^4}$ ;                      3)  $y = 5$ .

184.° Знайдіть функцію, обернену до даної:

1)  $y = 3x - 1$ ;                      2)  $y = \frac{1}{x}$ ;                      3)  $y = \frac{1}{2x+1}$ ;                      4)  $y = \frac{1}{3}x + 4$ .

186.° Знайдіть функцію, обернену до даної:

1)  $y = \frac{x}{x-1}$ ;                      3)  $y = 2\sqrt{x} - 1$ ;                      5)  $y = \frac{1-x}{1+x}$ .  
2)  $y = \sqrt{2x-1}$ ;                      4)  $y = x^2, D(y) = (-\infty; 0]$ ;

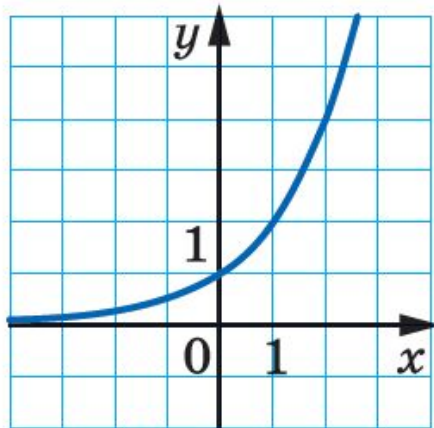


# Напівсамостійне виконання вправ

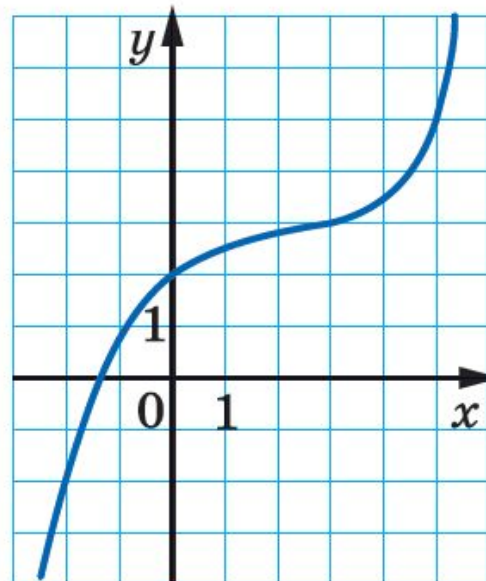
188.\* Побудуйте в одній системі координат графік даної функції і графік функції, оберненої до неї:

1)  $y = -0,5x + 2$ ;    2)  $y = \sqrt{x+1}$ ;    3)  $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 2x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

190.\* Користуючись графіком функції  $y = f(x)$ , зображеним на рисунку 54, побудуйте графік функції, оберненої до функції  $f$ .



a)



б)

Рис. 54

# Вправи для повторення

195. Через першу трубу басейн можна наповнити водою за 9 год., а через другу — за 12 год. Спочатку 3 год. була відкрита перша труба, потім її закрили, але відкрили другу. За скільки годин було наповнено басейн

