Лекция 5-6

Неинерциальные системы отсчета
Колебания и волны

Неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции

Для ИСО: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{отн}}$

Как «подправить» уравнение динамики в НСО? $m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ин}}$

Для НСО: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}^* \Rightarrow$

$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_{\text{отн}} + m\mathbf{a}^* \Rightarrow$

$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = m\mathbf{a} + (-m\mathbf{a}^*) = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ин}} \Rightarrow$

$\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{a}^*$

Сила инерции $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{a}^*$ зависит от:

1. параметров НСО
2. положения и скорости частицы

Поступательная сила инерции

$\mathbf{F} = -m\mathbf{a}_0$

В ускоряющейся ракете на все тела действует сила инерции $\mathbf{F} = -m\mathbf{a}_0$ - возникает однородное силовое поле, эквивалентное однородному полю тяжести.

Принцип эквивалентности:

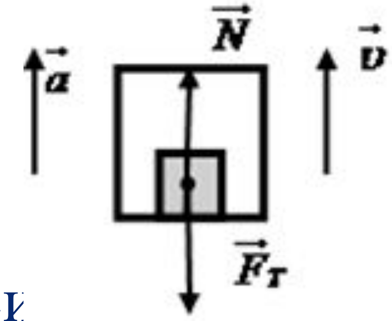
Никакими физическими опытами невозможно отличить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции.

Состояние невесомости при свободном падении в однородном поле тяжести эквивалентно движению в свободном пространстве: силу тяжести компенсирует сила инерции.

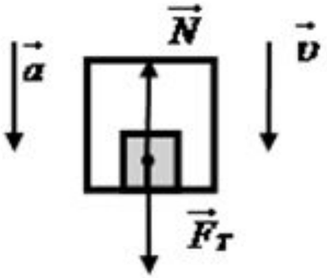
Поступательная сила инерции

$\mathbf{F}_{\textbf{пси}} = -\, m\mathbf{a}_0.$

Вес тела в лифте;



Невесомость – проявление силы инерции: си
уравновешивается силой инерции!



$$\boxed{0 = \vec{N} - m\vec{a}_{ин} - m\vec{g}}$$

Основное уравнение динамики в неинерциальной системе отсчёта*

Если система перемещается поступательно с ускорением $\mathbf{a}_0$ и вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 + m\omega^2\mathbf{r} + 2m[\mathbf{v}'\,\boldsymbol{\omega}]$$

F – реальная сила

$\mathbf{F}_{\text{пси}} = m(-\mathbf{a}_0)$ – поступательная сила инерции

$\mathbf{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\mathbf{r}$ – центробежная сила инерции

$\mathbf{F}_{\text{кор}} = 2m[\mathbf{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}]$ – сила Кориолиса.

Сила Кориолиса **перпендикулярна** скорости ⇨ не производит работы!

Особенности сил инерции

Силы инерции существуют только в НСО

Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами НСО. Третий закон Ньютона для сил инерции не работает.

Все силы инерции пропорциональны массе тела (подобно силам тяготения)

Неинерциальность систем отсчета

Ускорения из-за вращения земли вокруг оси

$$a_{земля} = R_{сут}\ \omega^{2} \sim 0.032\ m/c^{2}$$

$$\omega_{сут} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24*3600} = 7.3*10^{-5}\,c^{-1}$$

$$R_{земля} = 6500\ км$$

Ускорения из-за вращения земли вокруг солнца

$$a_{орб} = R_{год}\ \omega^{2} \sim 0.0055\ m/c^{2}$$

$$R_{орб} = 150\ млн\ км.$$

Ускорения из вращения нашей галактики

$$< 0.000001\ m/c^{2}$$

Уравнения гармонических колебаний

$\boxed{x = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}$ - уравнение гармонических колебаний

$\boxed{A_0}$ -амплитуда

$\boxed{(\omega t + \varphi_0)}$ -фаза колебания

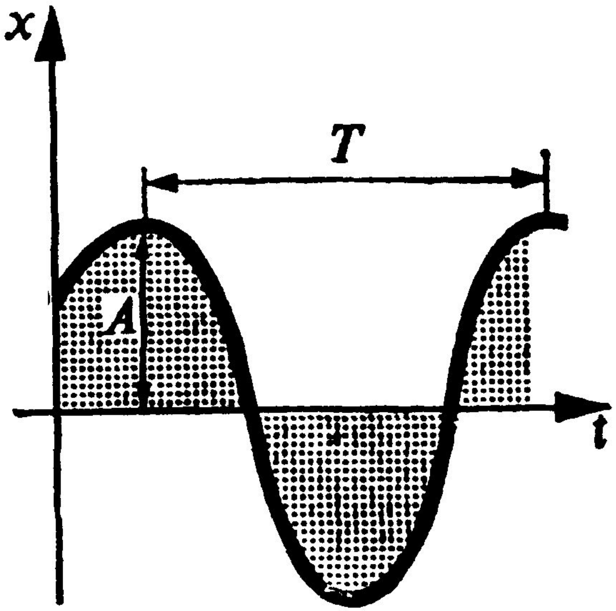
$\boxed{\varphi_0}$ - начальная фаза

$\boxed{\omega}$ - циклическая частота

t -время

$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ - период колебаний

$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}}$ - частота колебаний



Комплексные числа

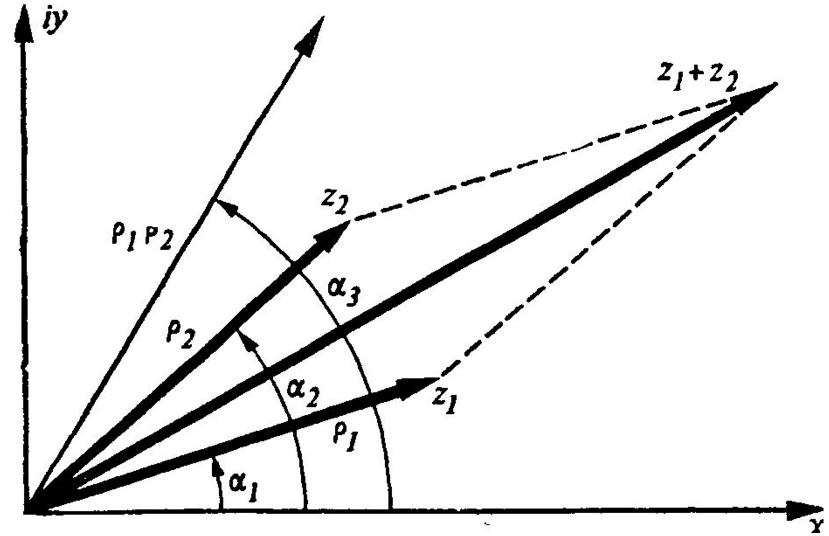
$$z = x + iy \quad (i^2 = -1)$$

Re(z)=x Im(z)=y

$$z = \rho e^{i\alpha} \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \tan(\alpha) = \frac{y}{x})$$

$$z^* = x - iy$$

Re(z)=1/2(z+z*)

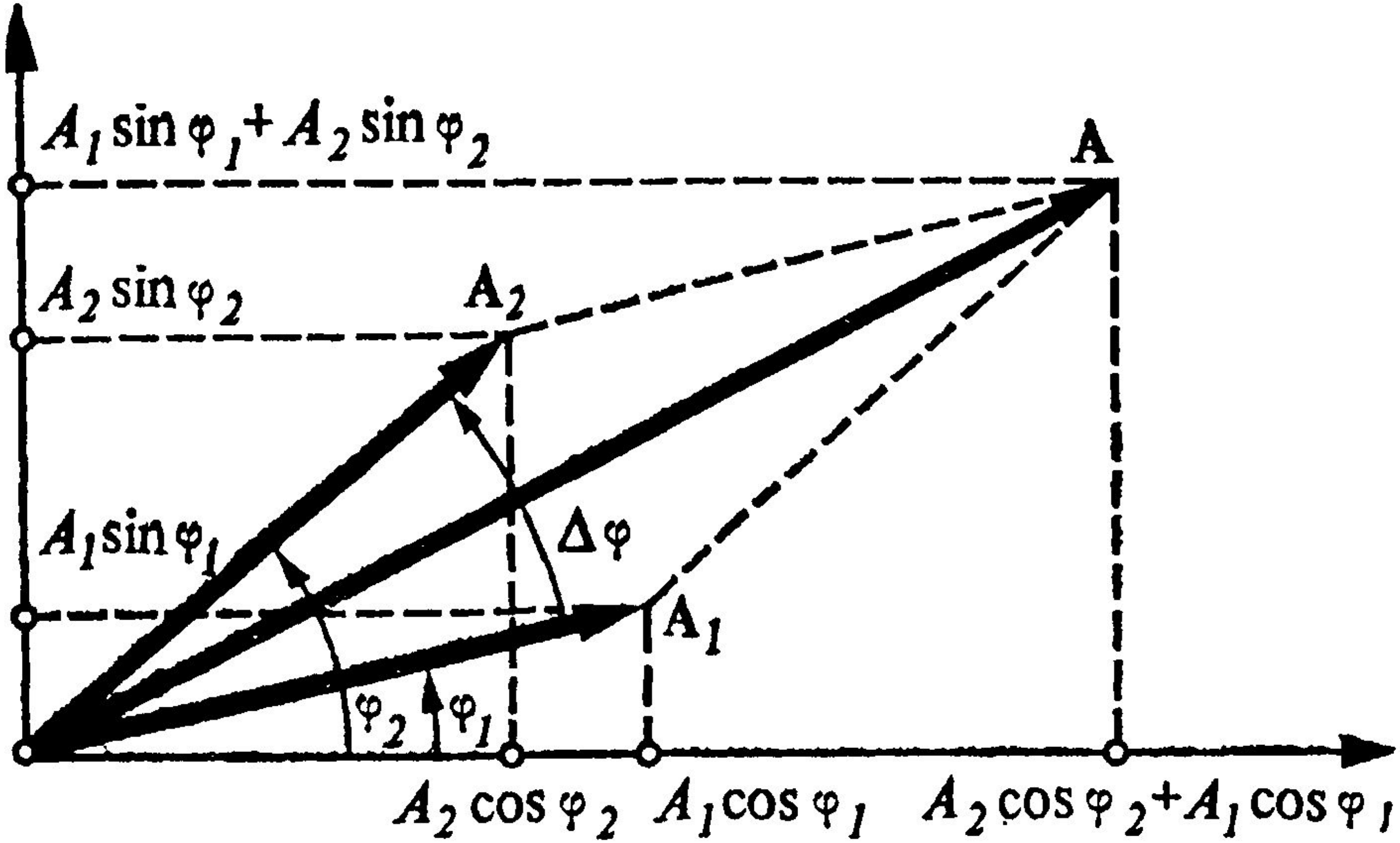


$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$z_1 = \rho_1 e^{i\alpha_1}; z_2 = \rho_2 e^{i\alpha_2}$$

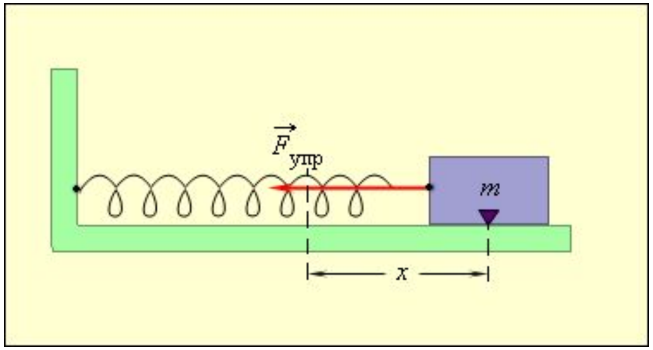
Формула Эйлера: $$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$ $$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad e^{i\pi} = -1$$

Представление колебаний в виде комплексных диаграмм



Пружинный маятник

$$\boxed{m\bar{a} = M\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_{упр}}$$



$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Решение ищем в виде: $x = e^{\lambda t}$ $\quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega^2) = 0 \qquad \lambda = \pm i\omega$$

Общее решение: $x = C_1 e^{+i\omega} + C_2 e^{-i\omega}$

Условие действительности x: $C_1 = C_2^* = \dfrac{A_0}{2} e^{i\varphi_0}$

Решение:

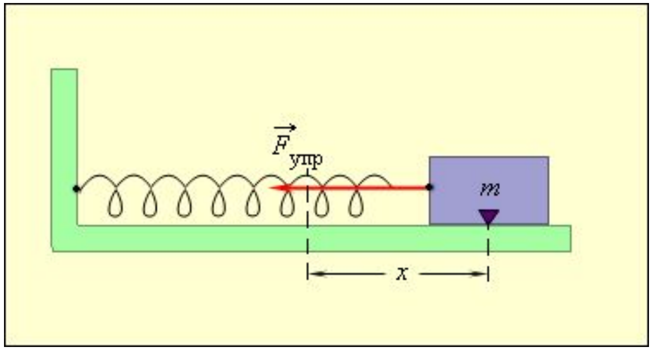
$$\boxed{x = \frac{A_0}{2} e^{+i(\omega t + \varphi_0)} + \frac{A_0}{2} e^{-i(\omega t + \varphi_0)} = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

Пружинный маятник

$$\boxed{m\bar{a} = M\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_{упр}}$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Решение ищем в виде: $x = e^{\lambda t}$ $\quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$e^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega^2) = 0 \qquad \lambda = \pm i\omega$ *Общее решение:* $x = C_1 e^{+i\omega} + C_2 e^{-i\omega}$

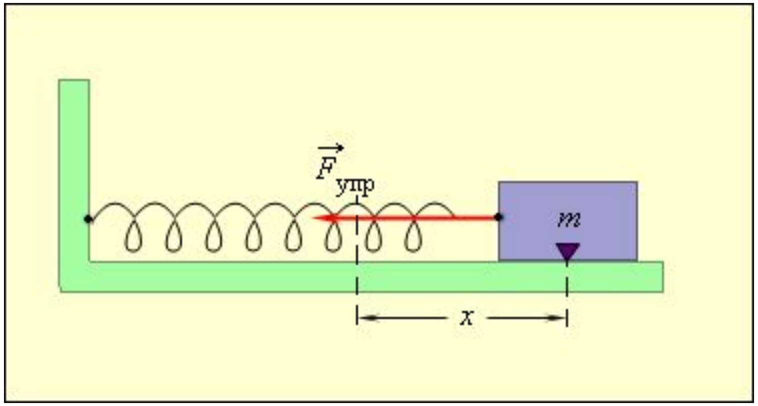
Условие действительности x: $C_1 = C_2^{\,*} = \dfrac{A_0}{2} e^{i\varphi_0}$

Решение:

$$\boxed{x = \frac{A_0}{2} e^{+i(\omega t + \varphi_0)} + \frac{A_0}{2} e^{-i(\omega t + \varphi_0)} = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

Энергия пружинного маятника

$$\boxed{\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=E}$$



$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{m\omega^2x^2}{2}=E$$

$$\boxed{A=A_0\cos(\omega t+\varphi_0)}$$

$$\frac{m\omega^2A_0^2}{2}(\sin^2(\omega t+\varphi_0)+\cos^2(\omega t+\varphi_0))=E$$

Из уравнения движения: $m\ddot{x}=-kx \quad \times\dot{x}$

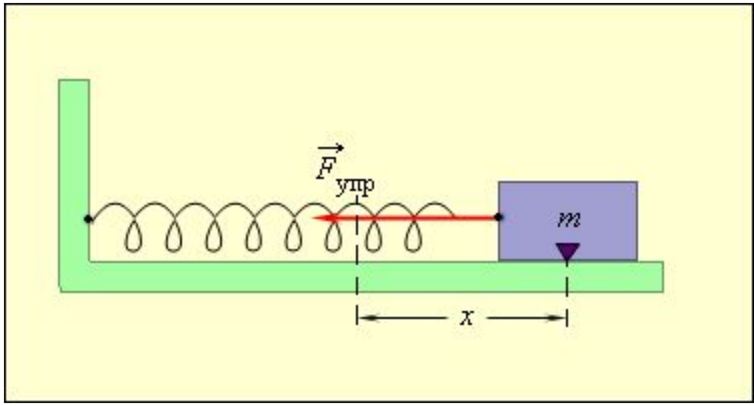
$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x})^2+\frac{k}{2}\frac{d}{dt}(x)^2=0$$

интегрируем

$$\boxed{\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=E}$$

Другой метод решение уравнения

$$\boxed{\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=E}$$



$$\dot{x}^2=\frac{2E}{m}-\omega^2x^2 \qquad \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega^2x^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega^2x^2}}=dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{\omega^2 m}-x^2}}=\omega dt$$

$$\mathrm{acrsin}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{\omega^2 m}}}\right)=\omega t+C \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=A_0\cos(\omega t+\varphi_0)}$$

Математический маятник

$$\boxed{m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}}$$

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt}\quad \boxed{\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + (1-\cos(\theta))mlg = E}$$

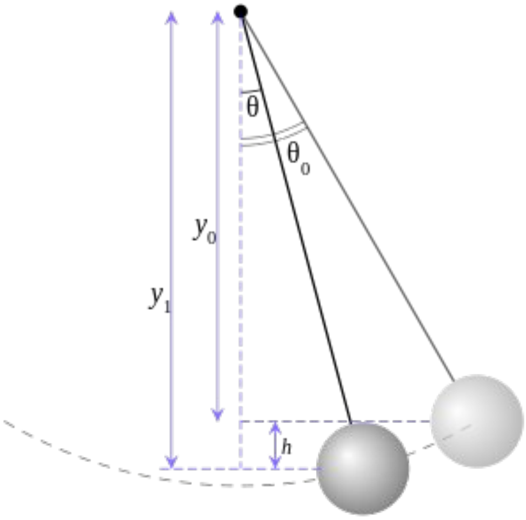
$$ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + \dot{\theta}\sin(\theta)mlg = 0$$

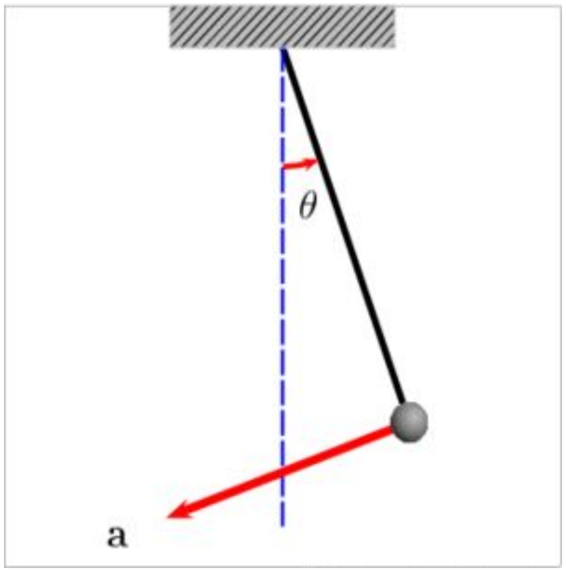
$$\dot{\theta} + \sin(\theta)\omega^2 = 0$$

$$\mathbf{1 >> \Theta}$$

$$\boxed{\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

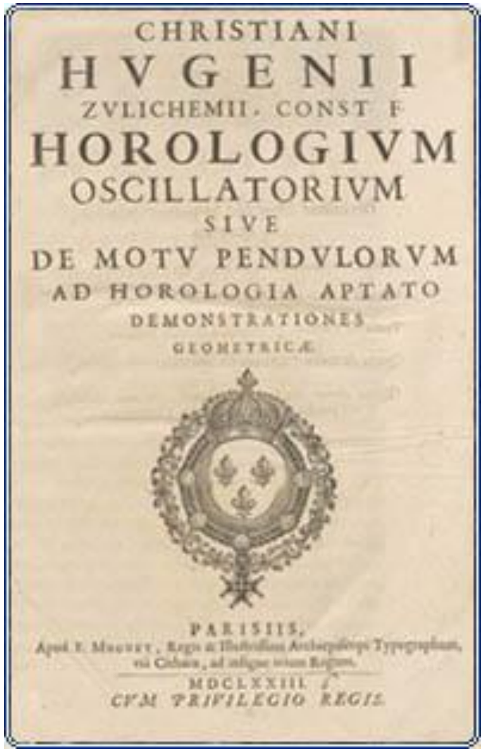
$$\boxed{\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi_0)}$$



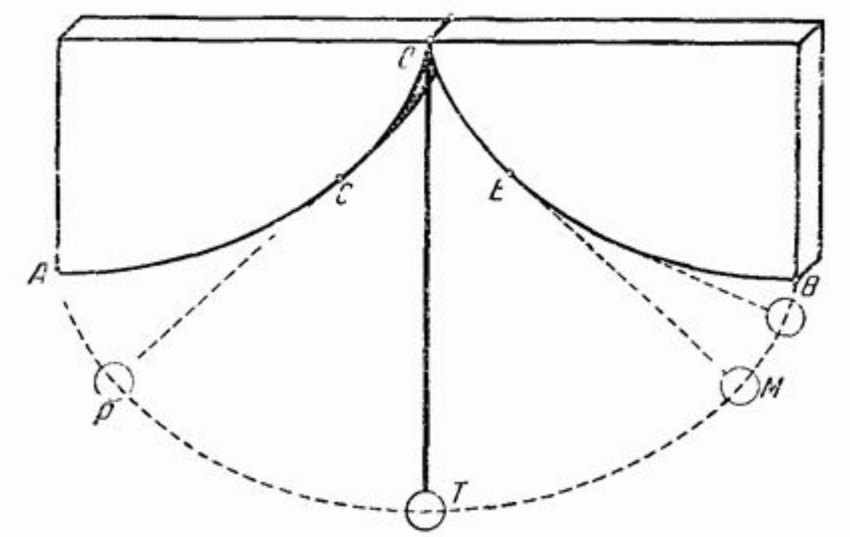


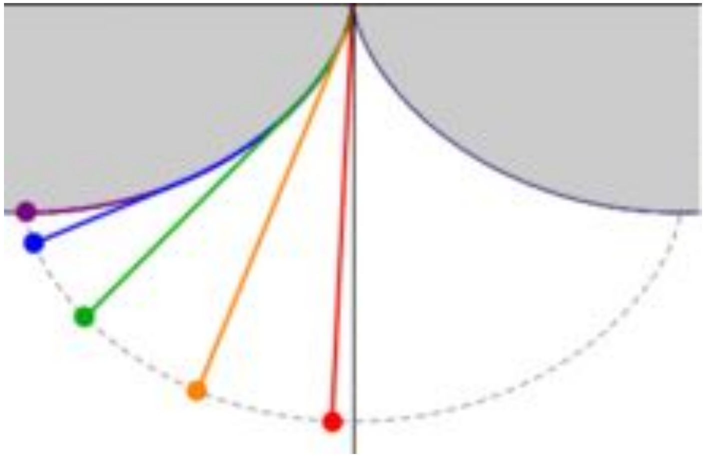
Изохронный маятник

$$\dot{\theta} + \sin(\theta)\omega^2 = 0$$

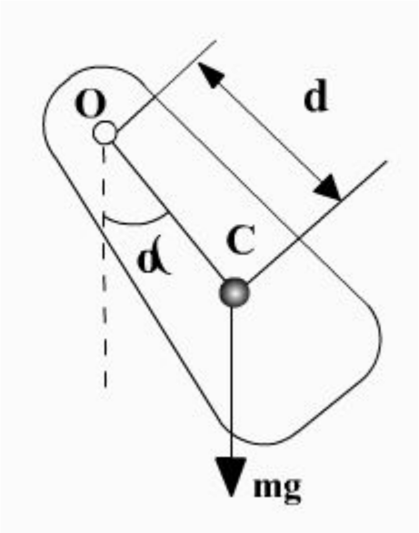

CHRISTIANI
HVGENII
ZVLICHEMII, CONST. F.
HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APTATO
DEMONSTRATIONES
GEOMETRICÆ.

PARISIIS,
Apud F. Muguet, Regis & Illustrissimi Archiepiscopi Typographum,
via Citharæ, ad insigne trium Regum.
MDCLXXIII.
CVM PRIVILEGIO REGIS.





Физический маятник



<u>Физический маятник</u> — это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси

Действующие силы: $\boxed{m\bar{g}, \bar{N}}$

Уравнение динамики вращательного движения относительно оси подвеса O :

$$\boxed{J\varepsilon = J\ddot{\alpha} = M_{mg} = -\sin(\alpha)mgd} \quad (1)$$

J - Момент инерции относительно оси O

d - Расстояние между осью O и центром масс C

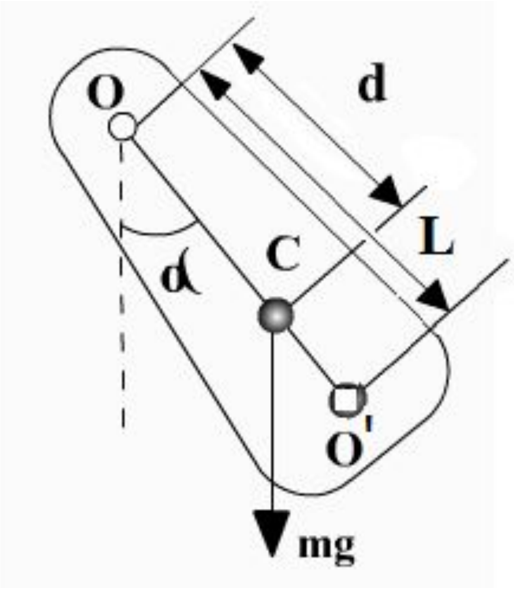
$1 >> \alpha$

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{gmd}{J}}}$$

$$\boxed{\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

Приведенная длина физического маятника

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{gmd}{J}}$$



$$L = \frac{J}{md}$$ -Приведенная длина

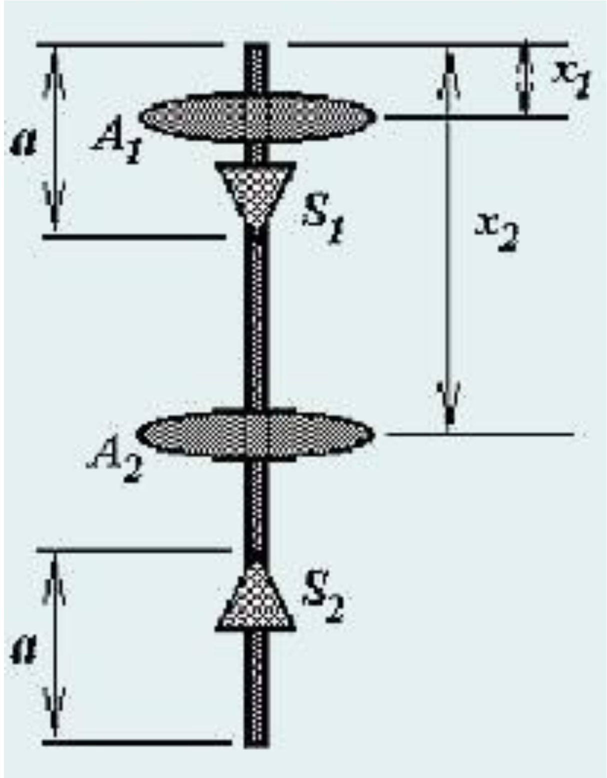
Если перевесить маятник в точку О’, то частота колебаний не измениться:

По теореме Штейнера: $$L = \frac{J_c + md^2}{md} = \frac{J_c}{md} + d$$

$$L' = \frac{J_C + (L-d)^2 m}{m(L-d)}$$

$$L' = d + \frac{J_C}{md} = L$$

Оборотный маятник



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

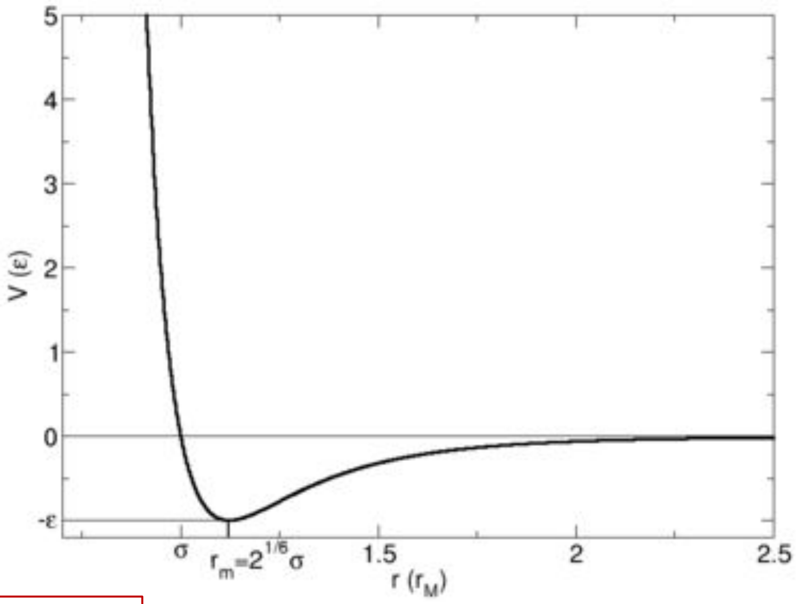
Малые колебания около положения равновесия

<u>Потенциал Леннарда-Джонса</u>

$$U(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right],$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0$$ *-условие равновесия*

$$0 = -\frac{12\sigma^{12}}{r^{13}} - \frac{6\sigma^{6}}{r^{7}} \qquad \Rightarrow r_0 = \sqrt[6]{2}\sigma$$



$$\boxed{U(r_0+\Delta r) = U(r_0) + U'(r_0)\Delta r + U''(r_0)\frac{\Delta r^2}{2!} + U'''(r_0)\frac{\Delta r^3}{3!}}$$

Ряд Тейлора

$$U(r_0) = \varepsilon \qquad U''(r_0) = \frac{72\varepsilon}{r_0^2}$$

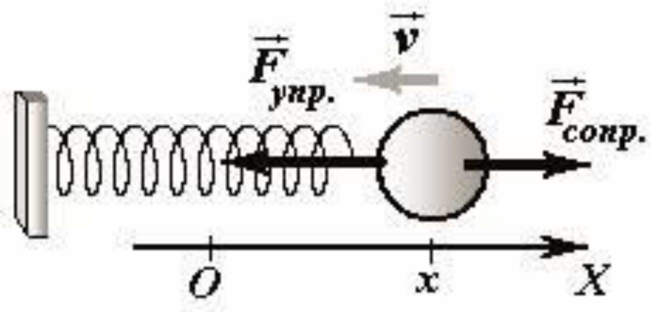
$$U'(r_0) = 0 \qquad x \equiv \Delta r$$

$$\boxed{\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{U''x^2}{2} = E}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{U''}{m}}}$$

Затухающий гармонический осциллятор

$\boxed{m\bar{a} = \bar{F}_{упр} + \bar{F}_{сопр}}$ $\boxed{m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}}$



Уравнения затухающих колебаний:

$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \delta = \frac{c}{2m}}$

Решение ищем в виде: $x = e^{\lambda t}$ $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0{}^2) = 0$ $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}$

Общее решение: $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

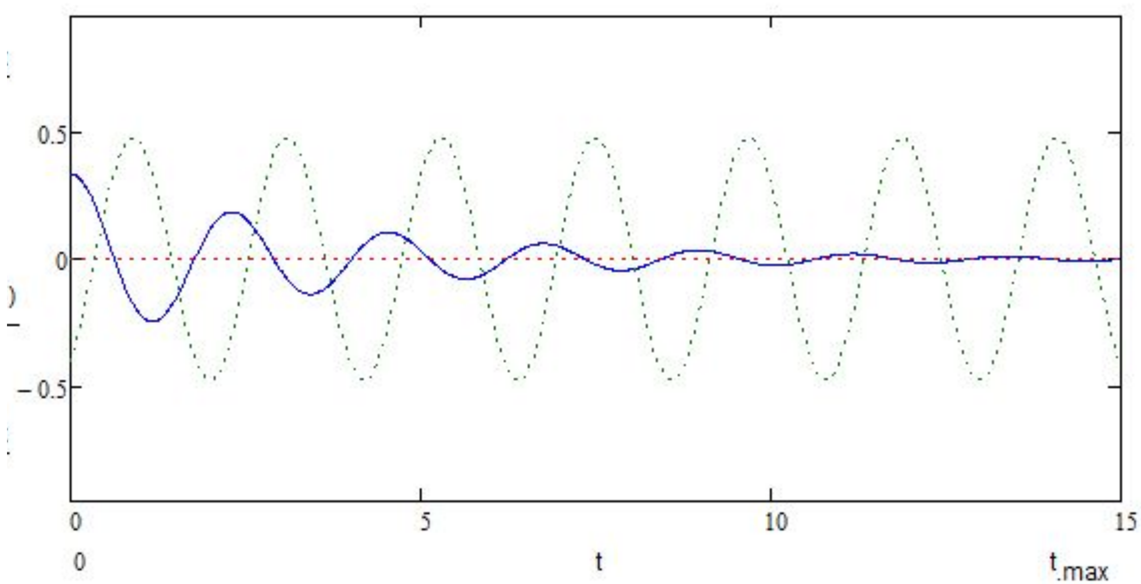
$x = e^{-\delta t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})$ $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}}$

Затухающий гармонический осциллятор

$$x = e^{-\delta t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}$$

$$\omega_0{}^2 > \delta^2$$



Условие действительности x: $C_1 = C_2{}^* = \dfrac{A_0}{2} e^{i\varphi_0}$

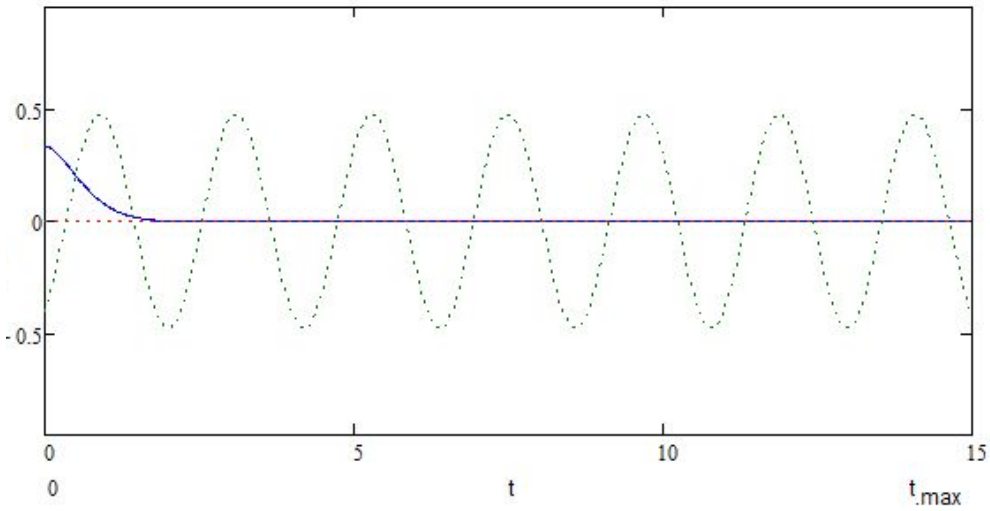
$$\boxed{x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

<u>Время затухания</u>: $\boxed{t_{зат} = \dfrac{1}{\delta}}$ <u>Логарифмический декремент затухания</u> : $\boxed{\theta = \delta T}$

Случай сильного затухания

$$\omega_0^{\,2} \le \delta^2$$

Что будет в этом случае?



$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \delta^2}$$ - Частота мнимая!

$$x = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)$$

Нет колебаний - только затухание.

Масштабирование физического маятника

Что будет, если увеличить маятник в α раз?

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{gmd}{J}}$$

$$m \sim \alpha^3$$

$$J \sim \alpha^5$$

$$d \sim \alpha$$

$$\omega_0 \sim \alpha^{-\frac{1}{2}}$$

$$\delta = \frac{c}{2m}$$

$$c \sim \alpha$$

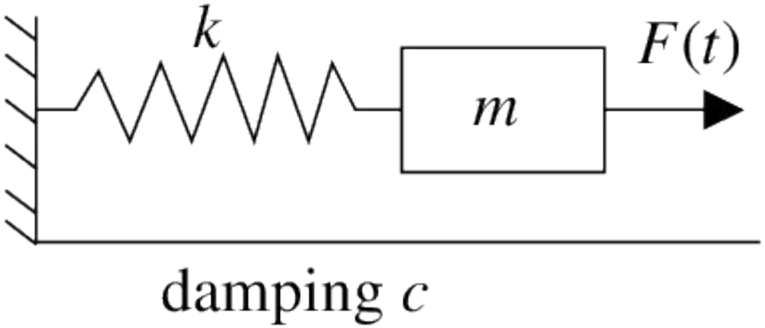
$$\delta \sim \alpha^{-2}$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0{}^2}}$$

$$\boxed{\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0{}^2}\alpha^{-3}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\omega_0{}^2}\alpha^{-3}}$$

Вынужденные колебания

$$\boxed{m\bar{a} = \bar{F}_{упр} + \bar{F}_{сопр} + \bar{F}(t)}$$



$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0{}^2 x = \frac{F_0}{m}\exp(i\omega t)}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \delta = \frac{c}{2m}}$$

Общее решение = общее решение однородного уравнения + частное решение неоднородного

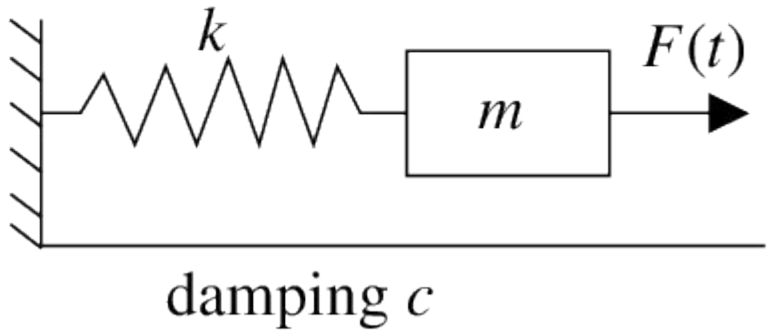
$$\boxed{t / \delta >> 1}$$

Решение ищем в виде: $x = Ae^{i\omega t}$ $\quad \dot{x} = i\omega Ae^{i\omega t}$ $\quad \ddot{x} = -\omega^2 Ae^{i\omega t}$

$$\exp(i\omega t)A(-\omega^2 + i2\delta\omega + \omega_0{}^2) = \frac{F_0}{m}\exp(i\omega t)$$

Вынужденные колебания

$$\boxed{A(\omega_0{}^2 - \omega^2 + i2\delta\omega) = \frac{F_0}{m}}$$



$$|A|\sqrt{((\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2)} = \frac{F_0}{m}$$

$$A = A_0 e^{i\varphi}$$

$$\boxed{A_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{((\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2)}}}$$

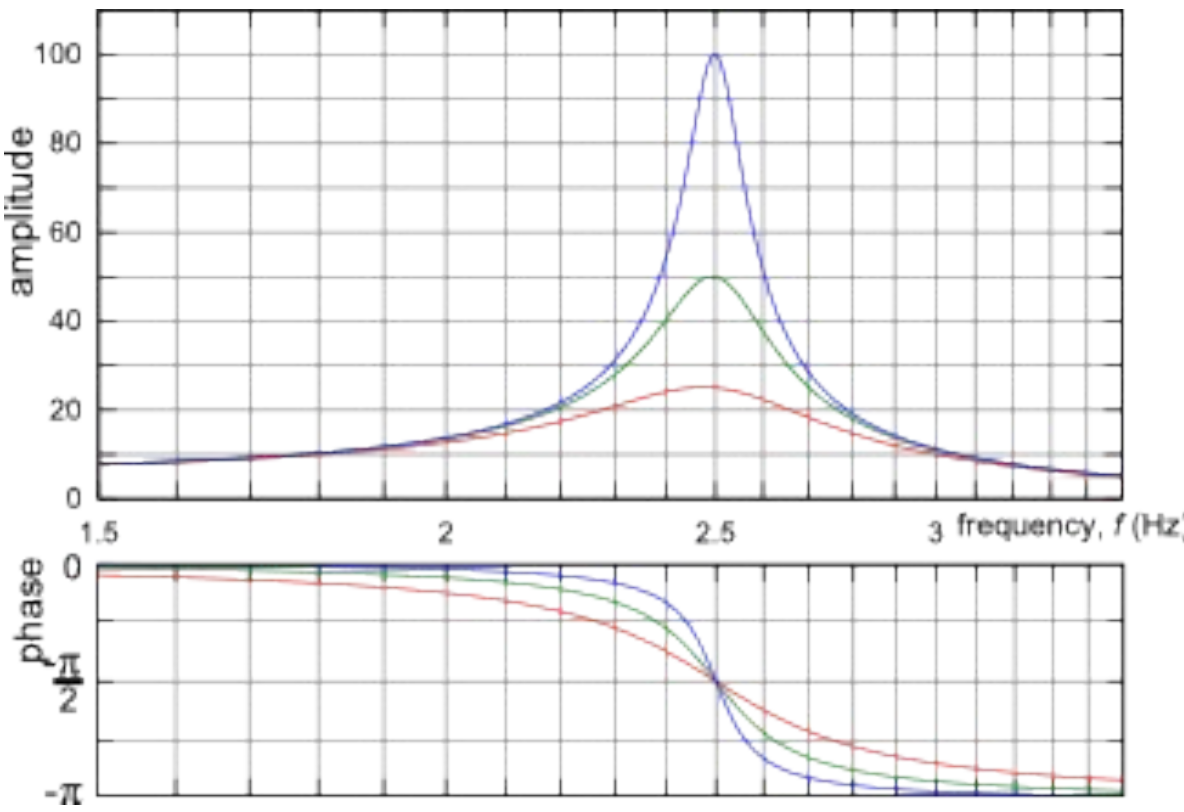
$$\boxed{\tan\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0{}^2 - \omega^2}}$$

Резонанс

$$A_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{((\omega_0{}^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2)}}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega^2-\omega_0{}^2}$$

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0{}^2-2\delta^2}$$

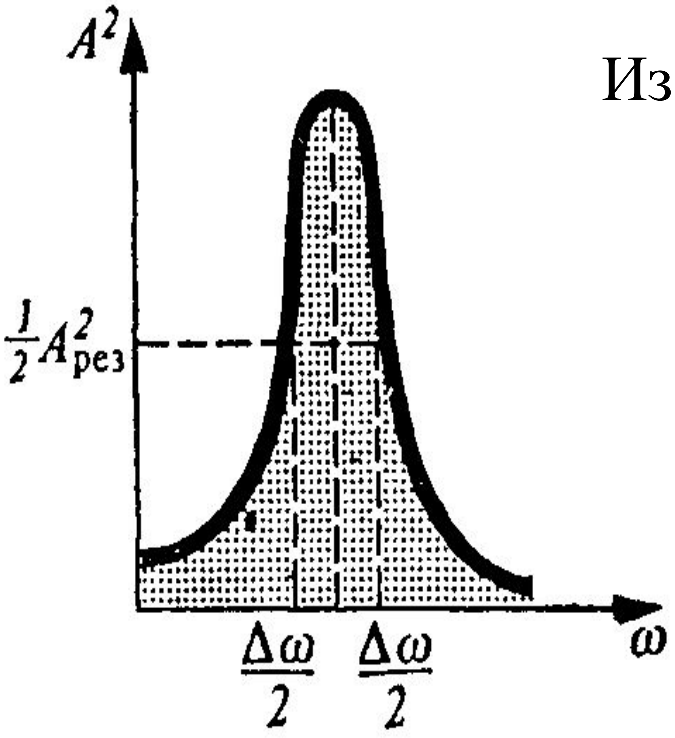


Добротность:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\pi}{\theta}$$

Добротность

$$Q = \frac{\textit{Запасы}\,\text{энергии в системе}}{\textit{Потери}\,\text{энергии за 1 радиан фазы}}$$

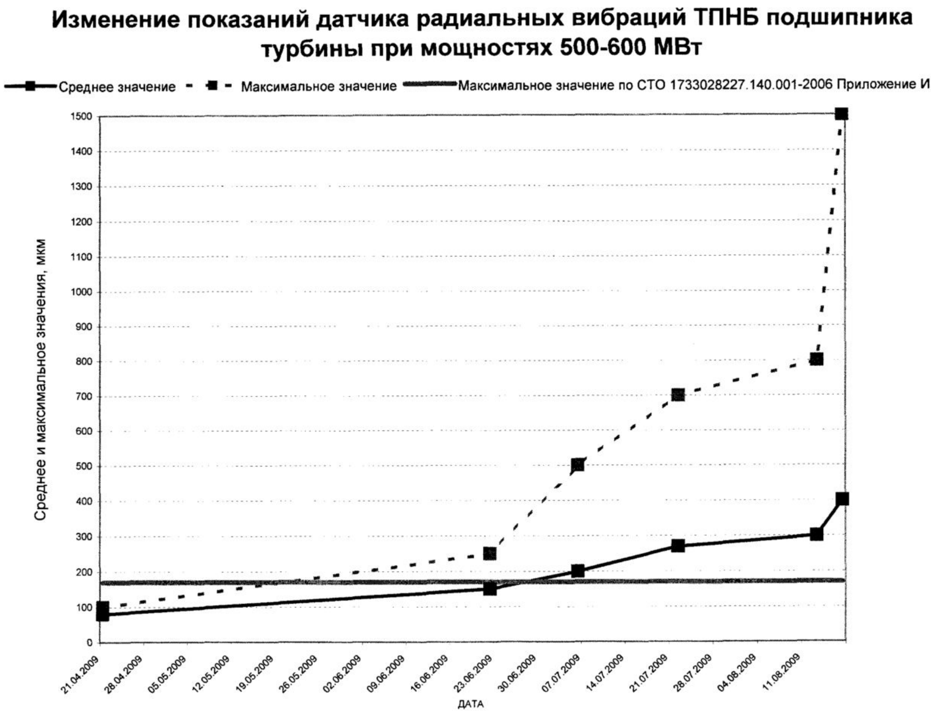


Из резонансной кривой: $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$

При масштабировании :

$$Q = \frac{\omega_0 \propto \alpha^{-1/2}}{2\delta \propto \alpha^{-2}} \sim \alpha^{1.5}$$

Резонанс и аварии

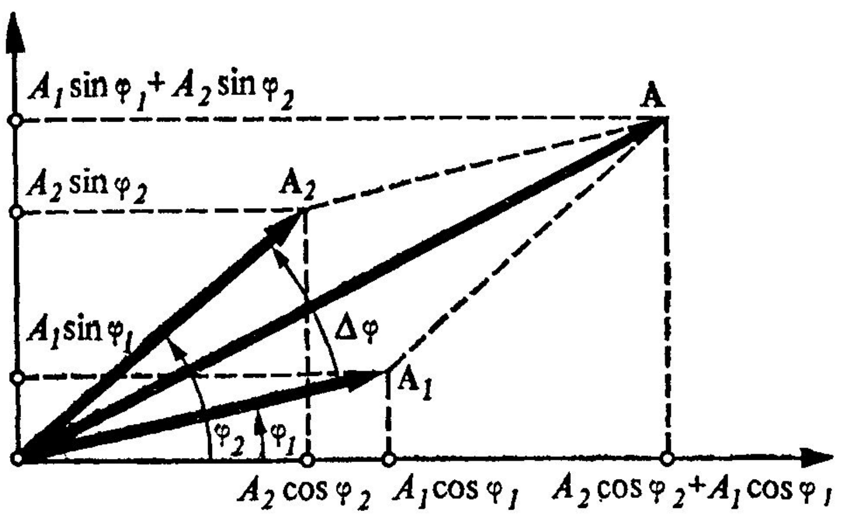


Сложение колебаний одинаковой частоты

$$A_1 \exp(i\omega t + \varphi_1) + A_2 \exp(i\omega t + \varphi_2)$$

$$A \exp(i\omega t + \varphi) = A_1 \exp(i\omega t + \varphi_1) + A_2 \exp(i\omega t + \varphi_2)$$

$$A^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$ Из теоремы косинусов



Сложение колебаний разной частоты. Биения

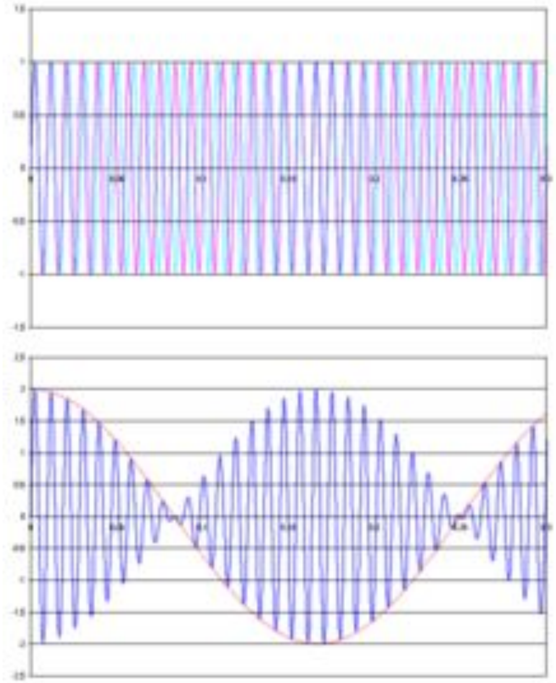
$$A\exp(i\omega_1 t) + A\exp(i\omega_2 t)$$

$$A\exp\left(i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t\right)\left(\exp\left(i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t\right)+\exp\left(i\frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}t\right)\right)$$

$$2A\exp\left(i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t\right)\cos\left(\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t\right)$$

$$\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| << \omega_1$$

$$2A\exp(i\omega t)\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$



Волны

Волна распространение колебаний в пространстве

Волновая поверхность - геометрическое место точек с одинаковой фазой.

Фронт волны - геометрическое место точек, до которых распространилась волна в фиксированный момент времени.

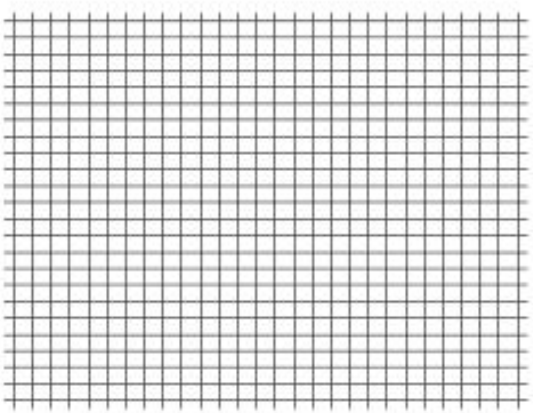
Луч - линия перпендикулярная фронту и совпадающая с направлением скорости распространения.

(Обычно луч проводят от источника до точки наблюдения)

Продольные волны

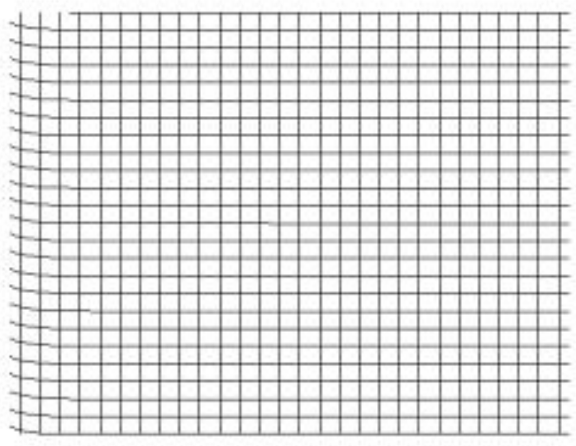
Продольная волна – это волна, в которой колебания происходят вдоль направления распространения волны.
Механические продольные волны могут распространяться в газах, жидкостях и твердых телах.

.

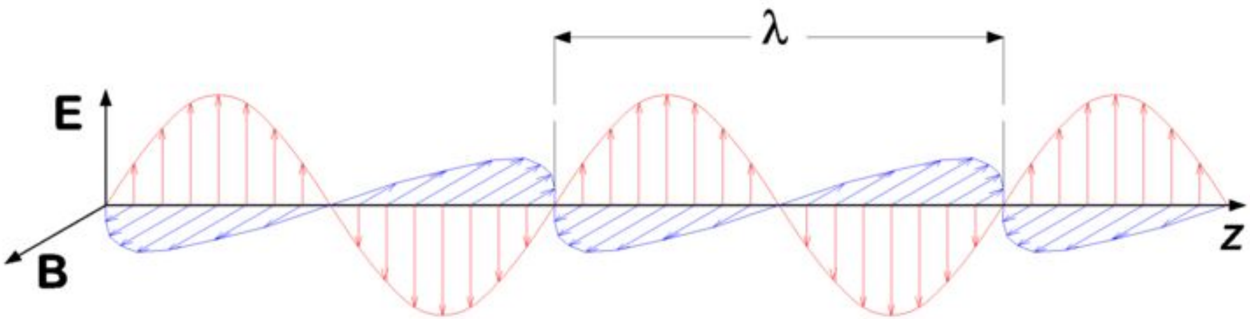


Поперечные волны

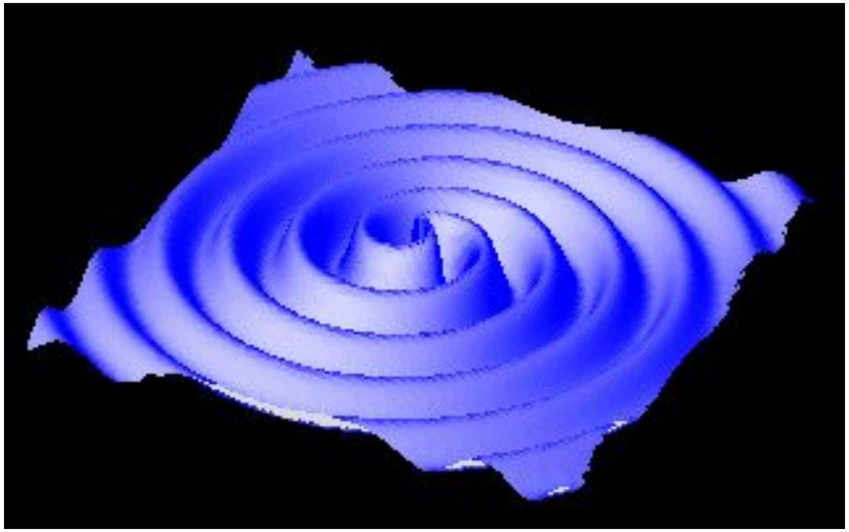
Поперечная волна – это волна, в которой колебания происходят перпендикулярно направлению распространения волны. Механические поперечные волны могут распространяться в твердых телах и на границе двух сред.



Поперечные волны

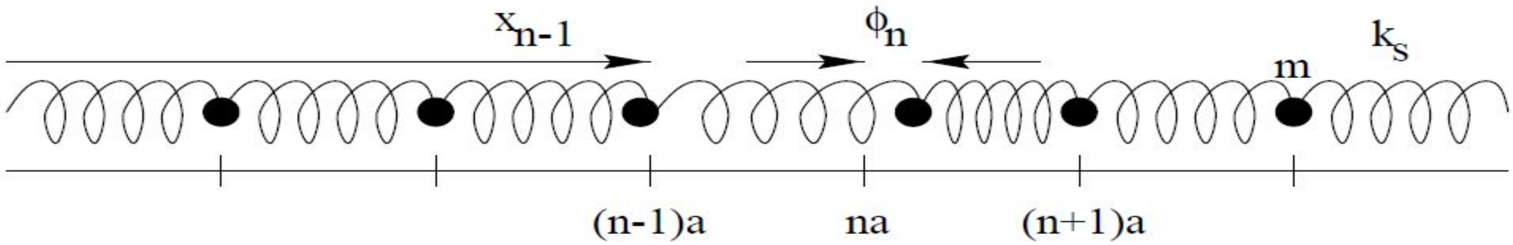


Электромагнитные волны



Гравитационные волны

Волновое уравнение для системы пружинок



(Рассмотрим бесконечную цепь – одинаковые пружинки жесткостью- k, одинаковые массы – m, на расстоянии - **a** друг от друга, *x* – смешение относительно положения равновесия)

$$\boxed{m\ddot{x}_i = -2kx_i + kx_{i-1} + kx_{i+1}}$$

Уравнение движения массы - i

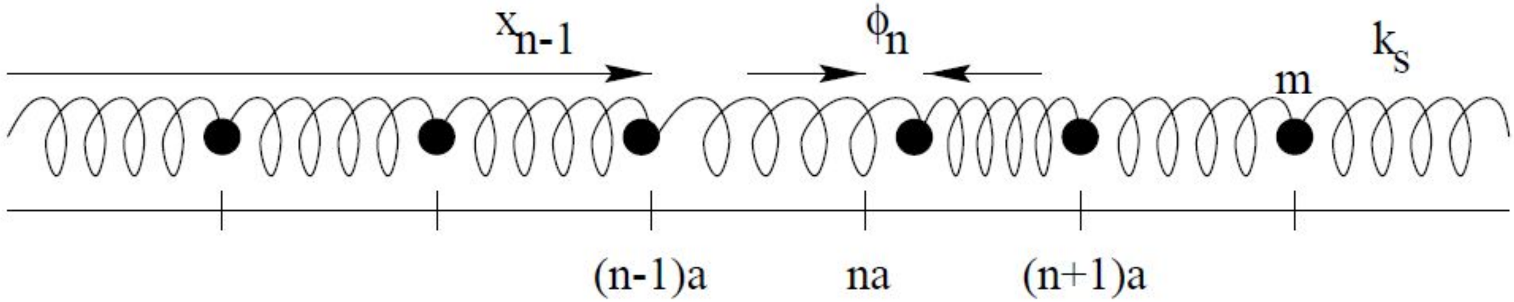
$$m\ddot{\varphi}_i = -2k\varphi_i + k\varphi_{i-1} + k\varphi_{i+1}$$

Уравнение движения массы – i в другом виде

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\mathrm{a}^2 k}{m\mathrm{a}^2}((\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (\varphi_i + \varphi_{i+1}))$$

Еще раз перепишем, где a – расстояние между массами m

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\mathrm{a}^2 k}{m\mathrm{a}}\left(\frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)}{\mathrm{a}} - \frac{(\varphi_i + \varphi_{i+1})}{\mathrm{a}}\right) \Rightarrow \dot{\varphi}_i \approx \frac{\mathrm{a}^2 k}{m\mathrm{a}}\left(\frac{\partial\varphi_{i+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_{i-1/2}}{\partial x}\right)$$



$$\dot{\varphi}_i = \frac{a^2 k}{m a}\Big(\underbrace{\frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)}{a}}_{\frac{\partial \varphi_{i+1/2}}{\partial x}} - \underbrace{\frac{(\varphi_i + \varphi_{i+1})}{a}}_{\frac{\partial \varphi_{i-1/2}}{\partial x}}\Big)$$

Таким образом мы заменили разность производными один раз.

$$\dot{\varphi}_i \approx \frac{a^2 k}{m a}\Big(\frac{\partial \varphi_{i+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{i-1/2}}{\partial x}\Big)$$

$$\dot{\varphi}_i \approx \frac{a^2 k}{m}\left(\frac{\Big(\frac{\partial \varphi_{i+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{i-1/2}}{\partial x}\Big)}{a}\right)$$

И аналогично, заменяя разность производной еще раз:

$$\boxed{\dot{\varphi}_i \approx \frac{a^2 k}{m}\Big(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}\Big)}$$

Выводы:

А)Это <u>волновое уравнение</u>.

В)Его получение математически корректно, когда разность смешений мало отличается от производной, т.е. в гладком случае достаточно длинных волн.

Уравнение плоской волны

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}$$

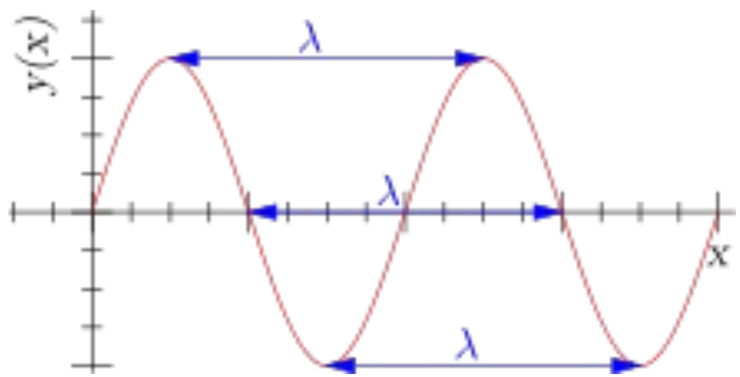
$$c = \sqrt{\frac{a^2 k}{m}}$$ Скорость волны

Возможные решения:

$$\boxed{\varphi = A \exp(i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x))}$$

$$\boxed{\varphi = A \exp(i(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x))}$$

$\boxed{\lambda}$ <u>-Длина волны </u> расстояние между соседними точками одинаковой фазы



Уравнение бегущей волны

$$\boxed{\varphi = A\exp(i(\omega t - kx))}$$

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Волновое число

$$\boxed{(\omega t - kx)}$$

Фаза волны

$$\boxed{v_\Phi = \frac{\omega}{k}}$$

Фазовая скорость - скорость распространения определенной фазы колебаний.

Стоячие волны

$$\boxed{A\exp(i(\omega t - kx)) + A\exp(i(\omega t + kx))}$$

$$\boxed{A\exp(i(\omega t - kx)) + A\exp(i(\omega t + kx)) = A\exp(i\omega t)(\exp(-ikx) + \exp(ikx))}$$

<u>Уравнение стоячей волны</u>

$$\boxed{2A\exp(i\omega t)\cos(kx)}$$

$$\boxed{2A\exp(i\omega t)\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)}$$

<u>Пучности:</u>

$$\boxed{\frac{2\pi}{\lambda}x = \pi m}$$

<u>Узлы:</u>

$$\boxed{\frac{2\pi}{\lambda}x = \pi(m + \frac{1}{2})}$$

Спасибо за внимание