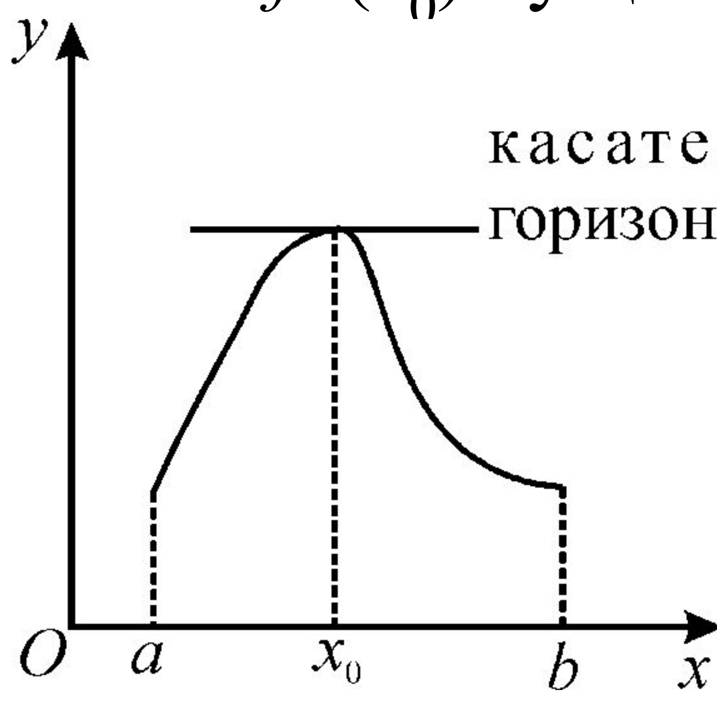
Лекция 11. Основные теоремы о дифференцируемых функциях, правило Лопиталя.

Теорема Ферма′ (*Пьер Ферма*). Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, и в некоторой внутренней точке этого отрезка принимает свое наибольшее или наименьшее значение, тогда, если производная в этой точке $f'(x_0)$ существует, то она непременно = 0.



Доказательство

Для определенности будем считать, что в точке x_0 функция принимает свое наибольшее значение, то есть: $\forall\ x \in [a,b]\ (f(x_0) \geq f(x))$, иными словами: $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Пусть производная $f'(x)$ в точке x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ существует.

Требуется показать (!) $f'(x_0) = 0$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ в точке x_0 существует, то стало быть существуют левый и правый пределы в этой точке и они равны по третьему критерию существования предела в точке, а именно:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (*)$$

Пусть $x \in (a, x_0)$, то есть находится слева от x_0, тогда x - $x_0 < 0$ и поэтому:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (1)$$

Пусть $x \in (x_0, b)$, то есть находится справа от x_0, тогда x - $x_0 > 0$ и поэтому:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad (2)$$

Перейдем к пределу в (1) и рассмотрим левый предел:

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

С другой стороны, переходя к пределу в (2) и рассматривая правый предел, получаем:

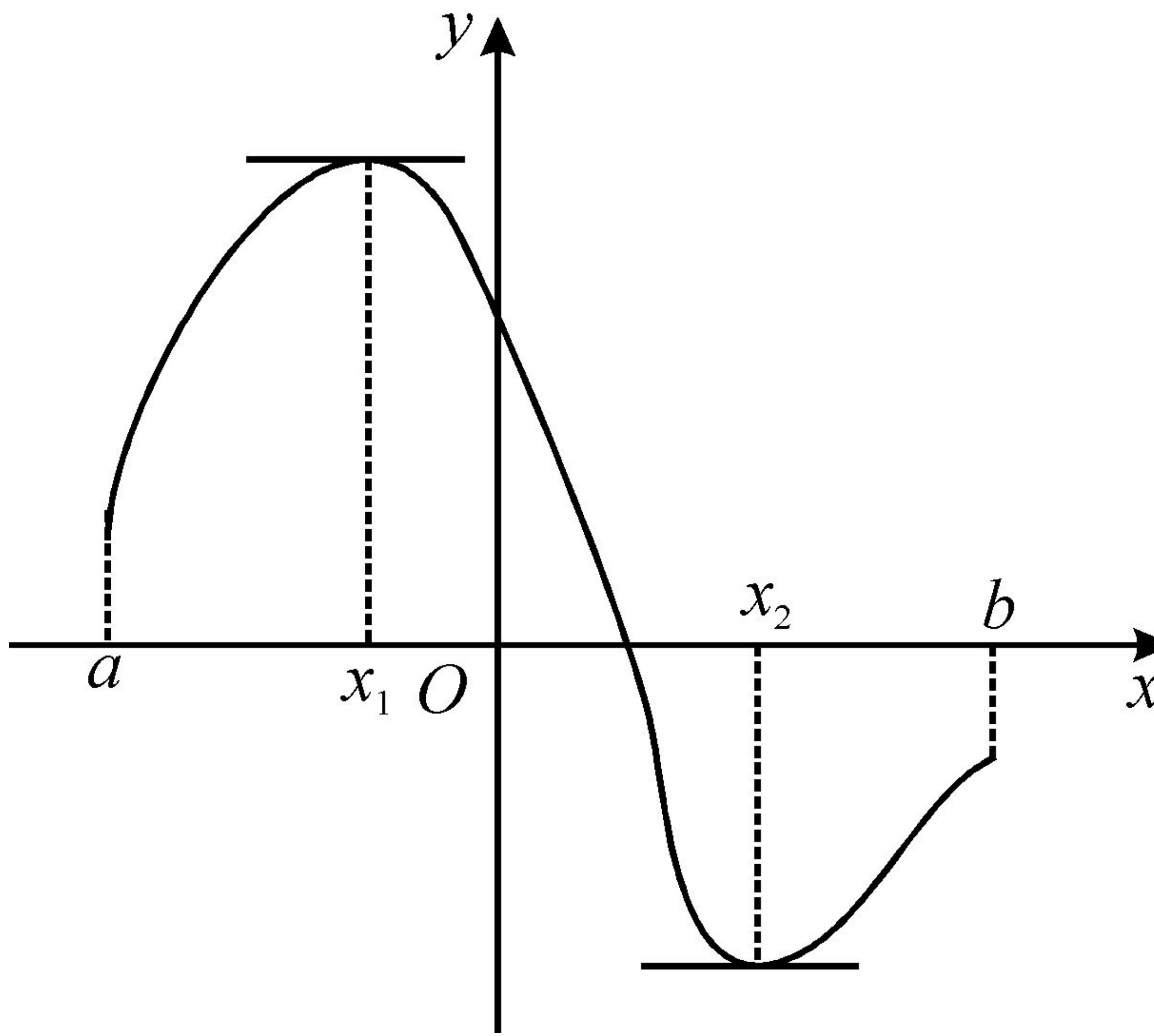
$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$$

Из (*) заключаем, $f'(x_0)\geq 0 \;\&\; f'(x_0)\leq 0 \Rightarrow f'(x_0)=0$. Что и требовалось доказать.

__**Определение.**__ Точка кривой называется внутренней точкой, если она не совпадает ни с одним из концов этой прямой.

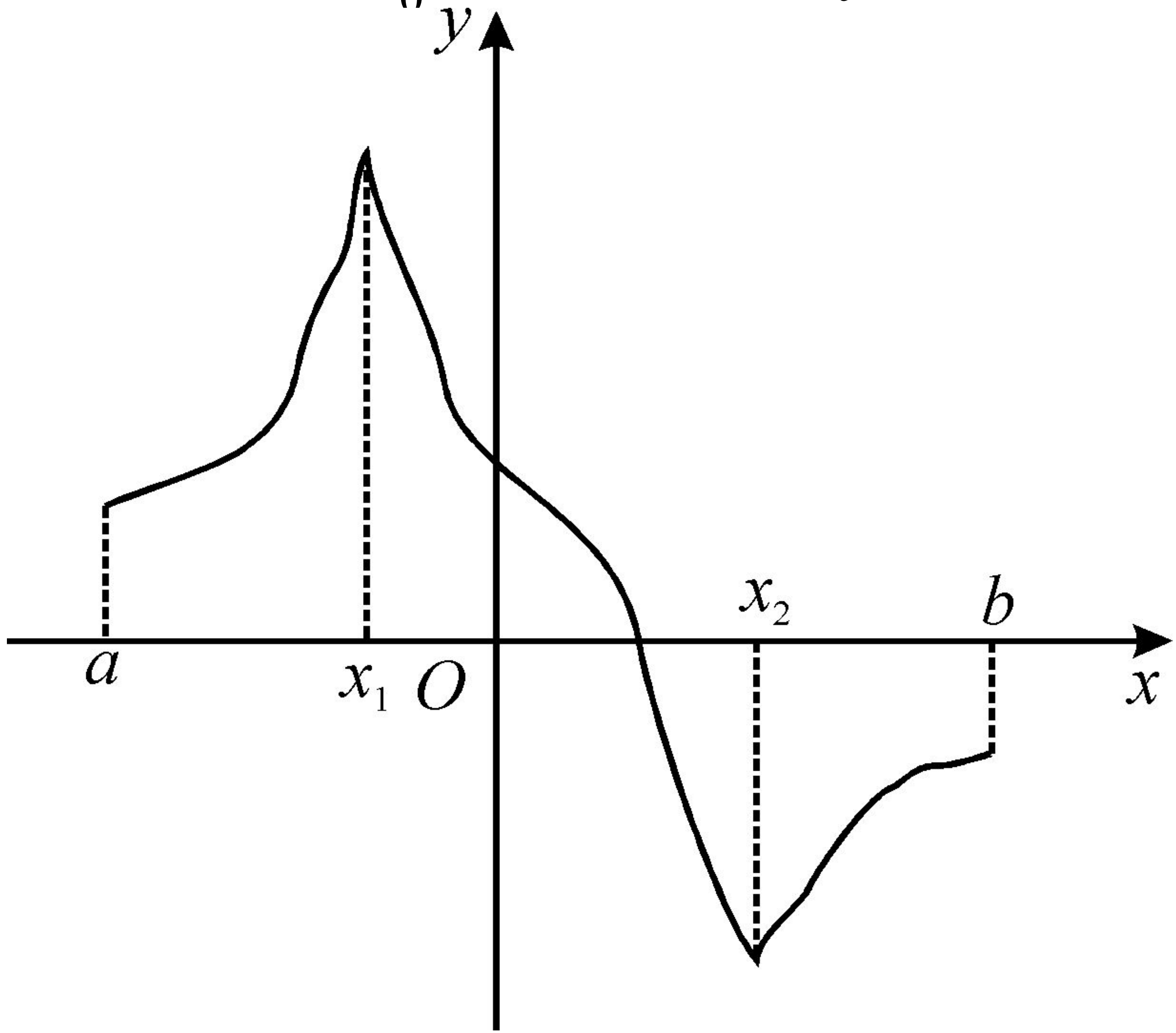
Геометрический смысл теоремы Ферма

Если внутренняя точка кривой наиболее или наименее удалена от оси OX, то касательная в этой точке, если она существует, параллельна оси OX, то есть, горизонтальна.



Замечание 1.

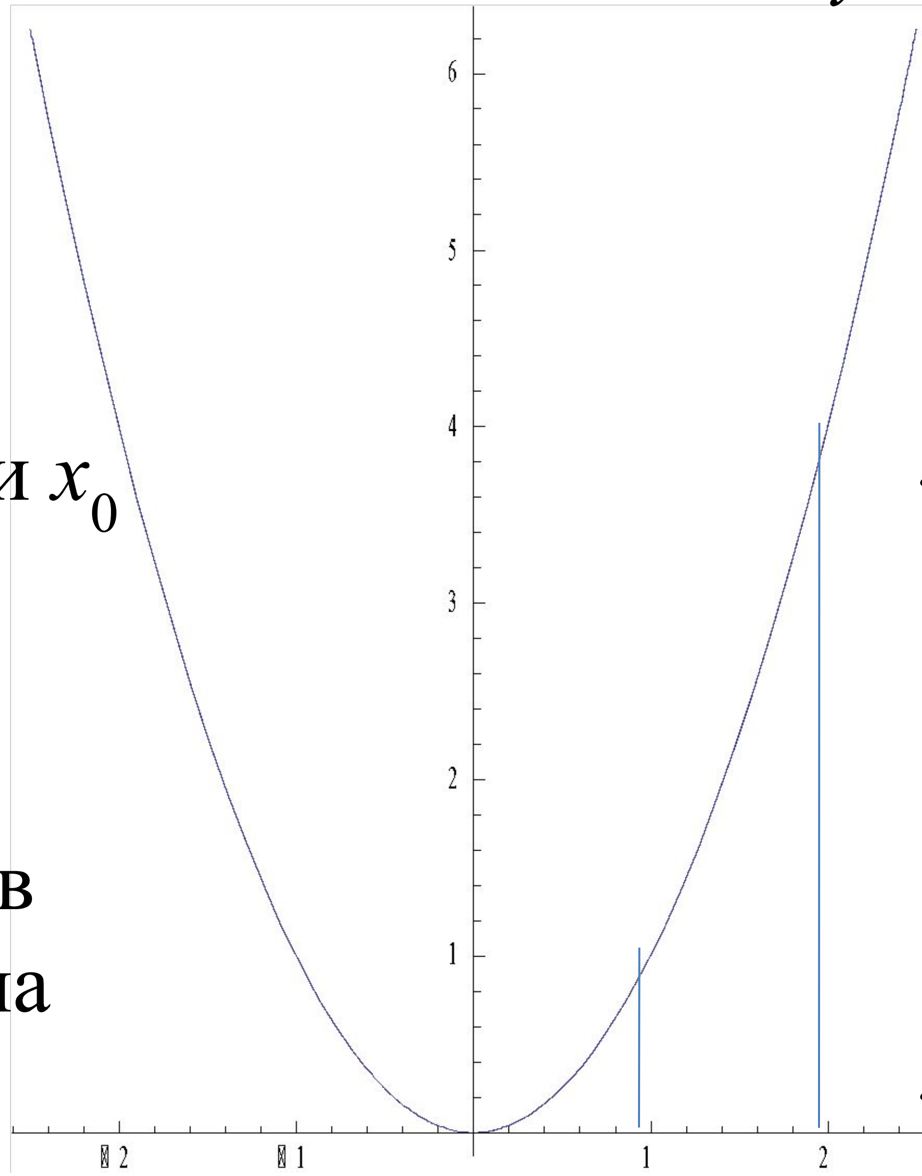
Производная в точке x_0 может и не существовать.



Пример

Замечание 2. Условие, что точка x_0 внутренняя, является важным. Если x_0 не является внутренней точкой, то производная в ней не обязана быть равной нулю.

$y = x^2$ на $[1,2]$



$y' = 2x$

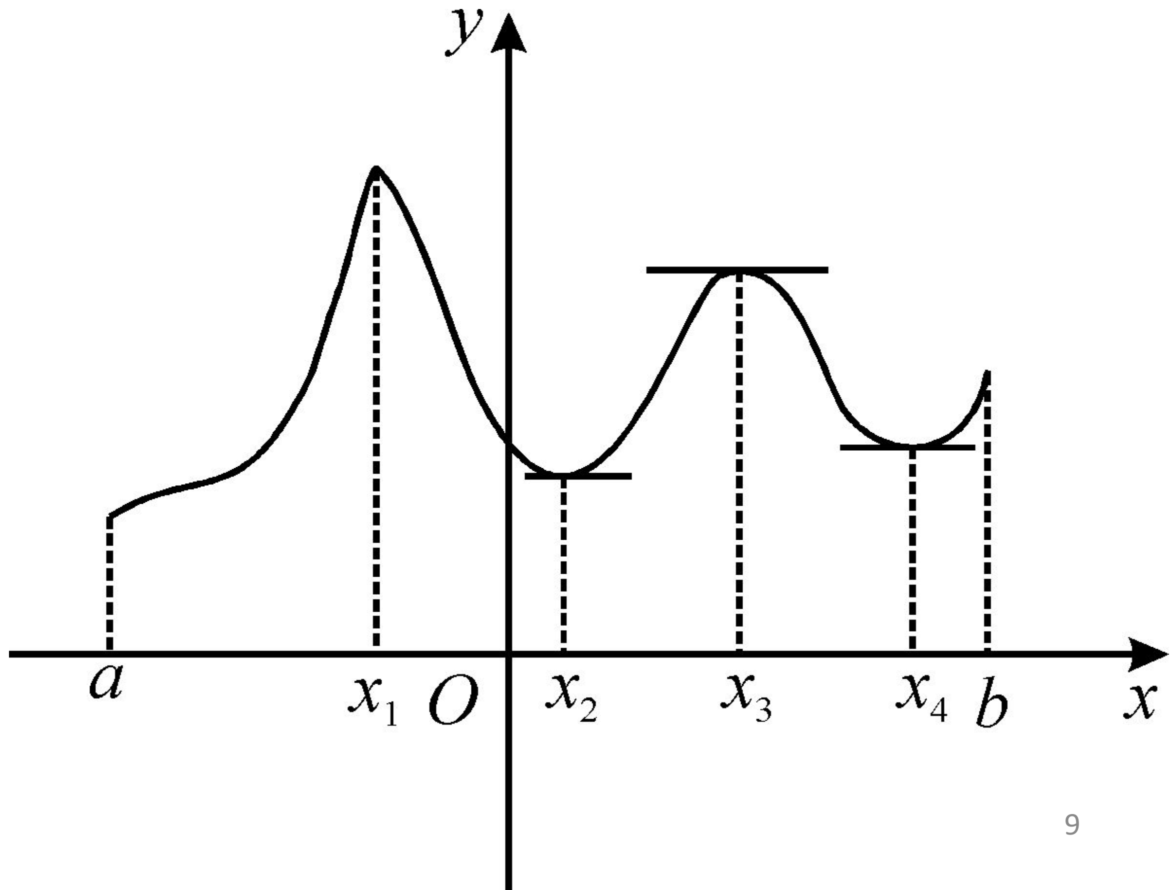
наибольшее значение в точке 2, наименьшее в точке 1.

$y'(1) = 2 \neq 0.$

$y'(2) = 4 \neq 0.$

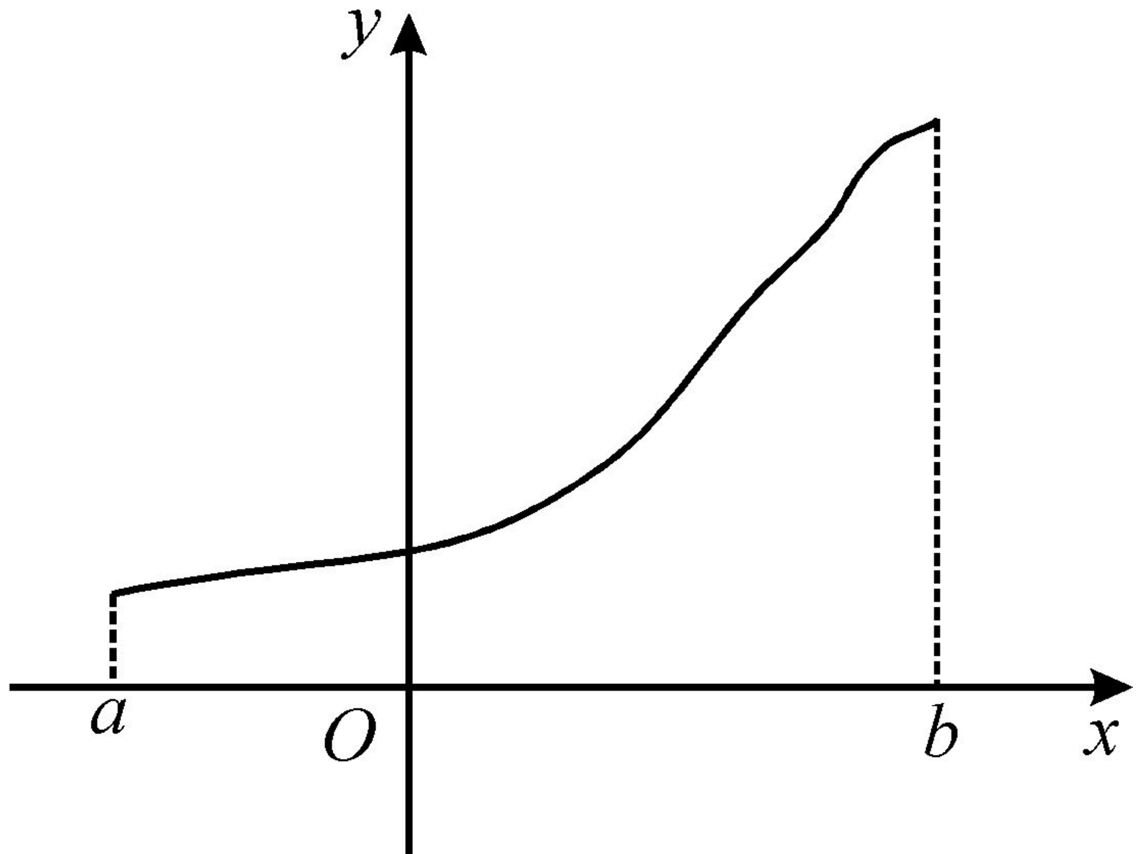
<u>Определение.</u> Пусть x_0 – внутренняя точка из $D(f)$ функции $y = f(x)$. Точка x_0 называется критической точкой этой функции, если производная $f'(x_0)=0$, либо вовсе не существует. Те критические точки в которых производная = 0 называются стационарными.

x_2, x_3, x_4 – стационарные точки

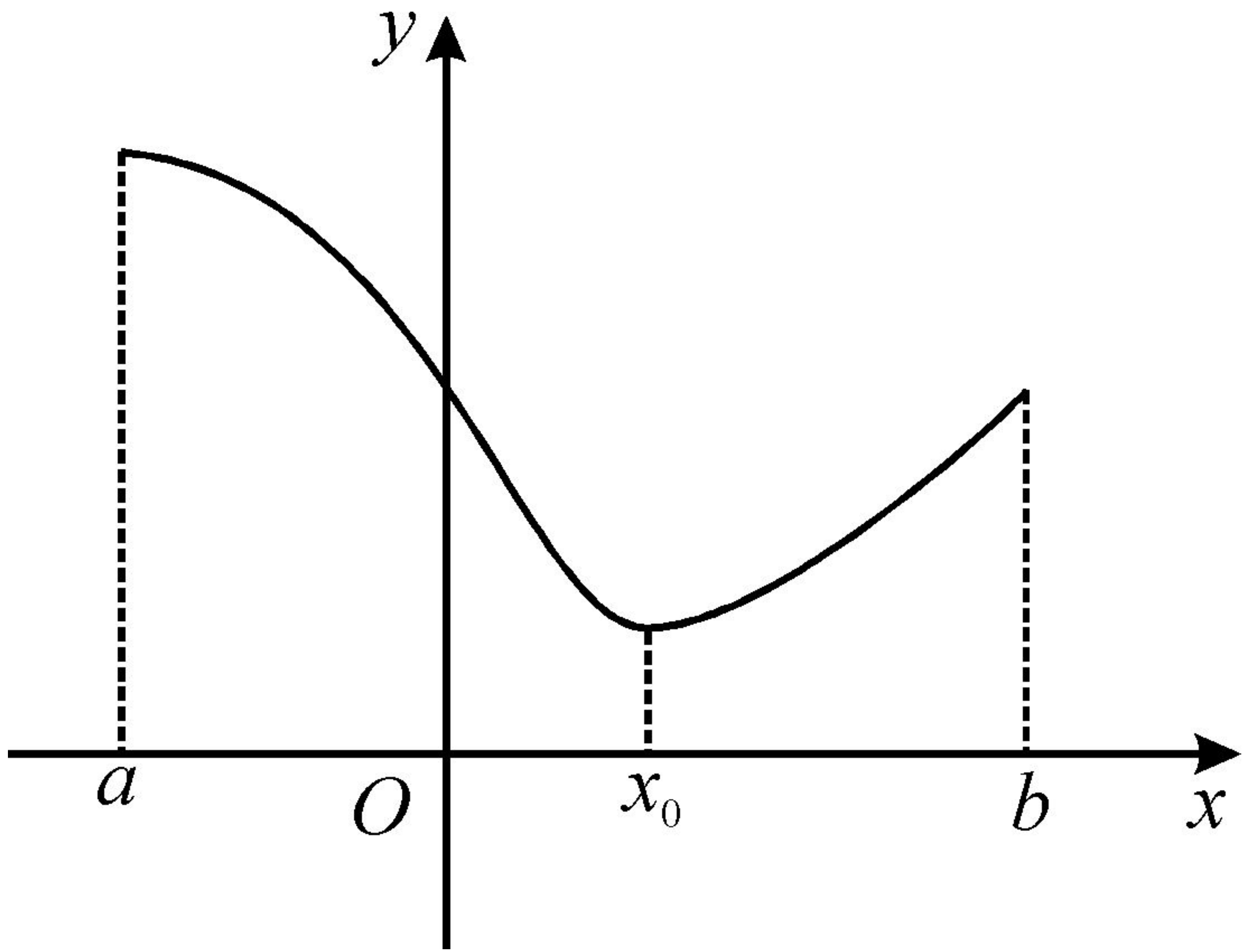


Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции

Пусть задана непрерывная функция $y = f(x)$ на $[a,b]$. Может случиться, что наибольшее или наименьшее значение принимается на концах этого отрезка.



Может случиться так, что наибольшее или наименьшее значение принимается внутри отрезка $[a,b]$ в точке x_0.



Возможны два случая:

$a)\ f'(x_0)$ не существует $\Rightarrow x_0$ – критическая точка;

$b)\ f'(x_0)$ существует $\Rightarrow$ (по теореме Ферма) $f'(x_0)=0 \Rightarrow x_0$ – критическая стационарная точка.

Таким образом, внутренние точки, в которых достигается наибольшее или наименьшее значение нужно искать в критических точках.

Постановка задачи:

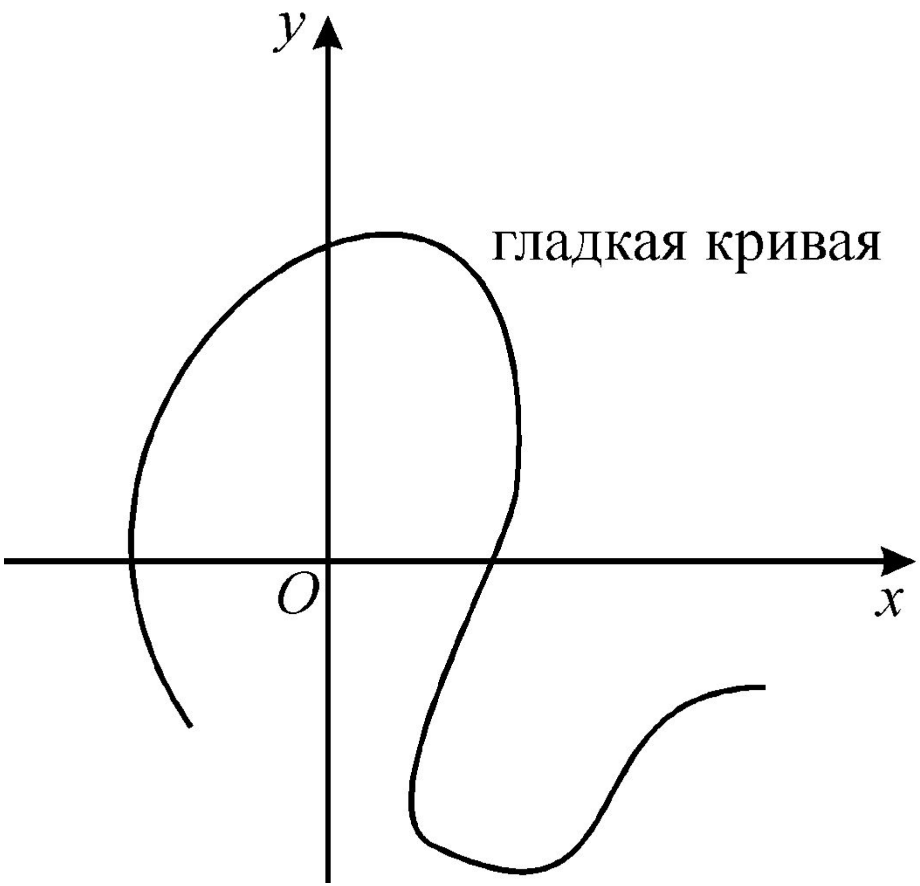
Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на $[a,b]$.

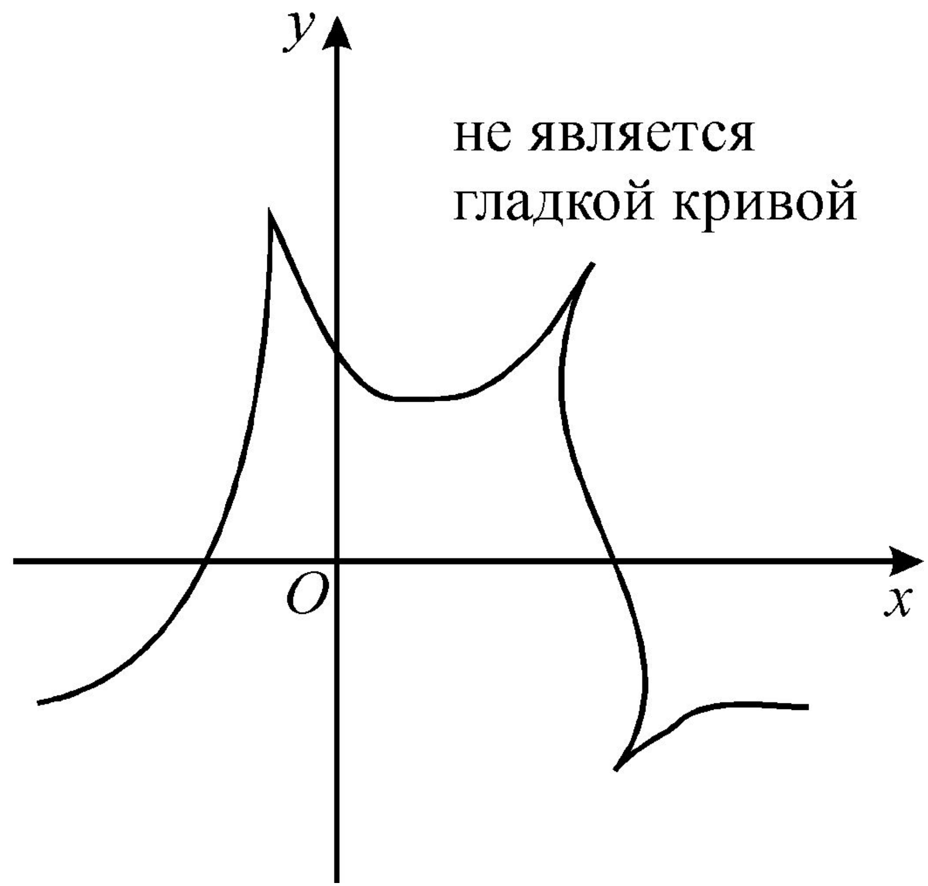
Исходя из предыдущих рассуждений, получаем алгоритм.

Алгоритм решения задачи:

1) Находим $f(a)$ и $f(b)$ – значения функции на концах отрезка.
2) Находим все критические точки данной функции на данном отрезке. Пусть это $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (в частности, их может и не быть).
3) Вычисляем $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$.
4) Рассматриваем все полученные значения $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ и выбираем из них наибольшее и наименьшее. Это и есть искомые значения.

<u>Определение.</u> Плоская кривая называется <u>гладкой</u>, если в каждой ее точке существует касательная.





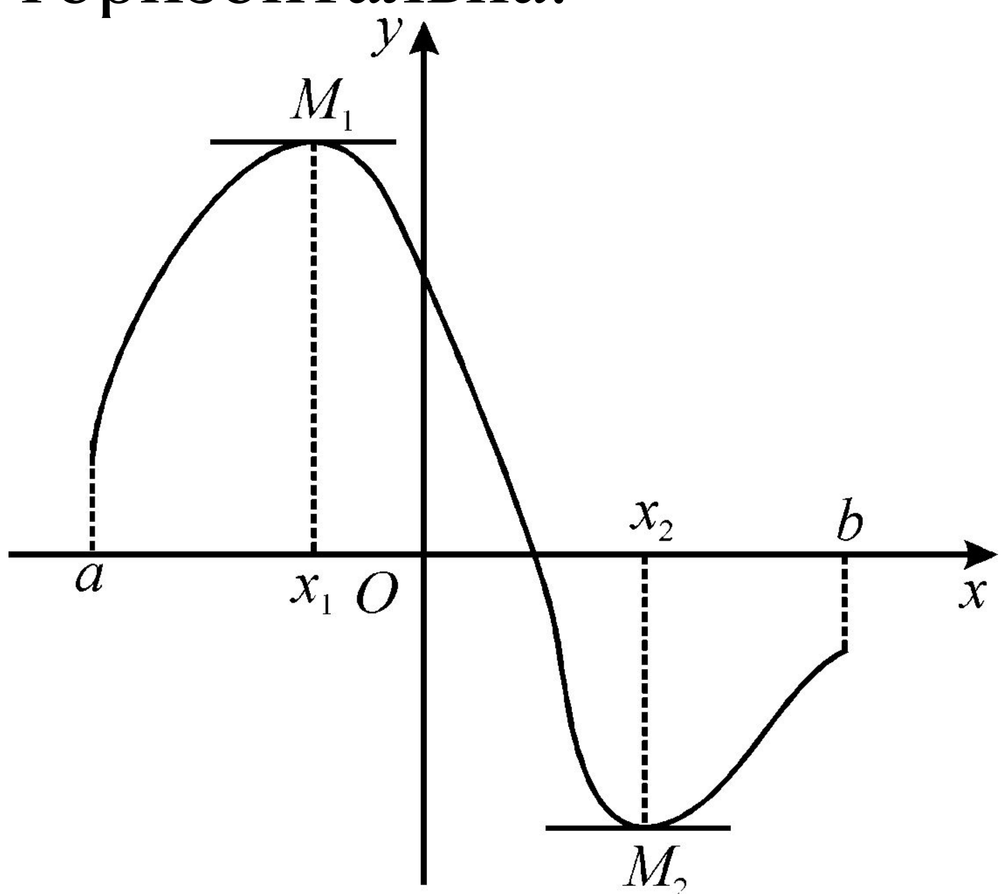
Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, и удовлетворяет трем условиям:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.
2) $f(x)$ дифференцируема на (a,b).
3) $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка $[a,b]$ найдется хотя бы одна точка x_0, в которой $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля:

Если концы гладкой кривой $y = f(x)$ имеют одинаковые ординаты, то на этой кривой найдется хотя бы одна точка, касательная в которой горизонтальна.



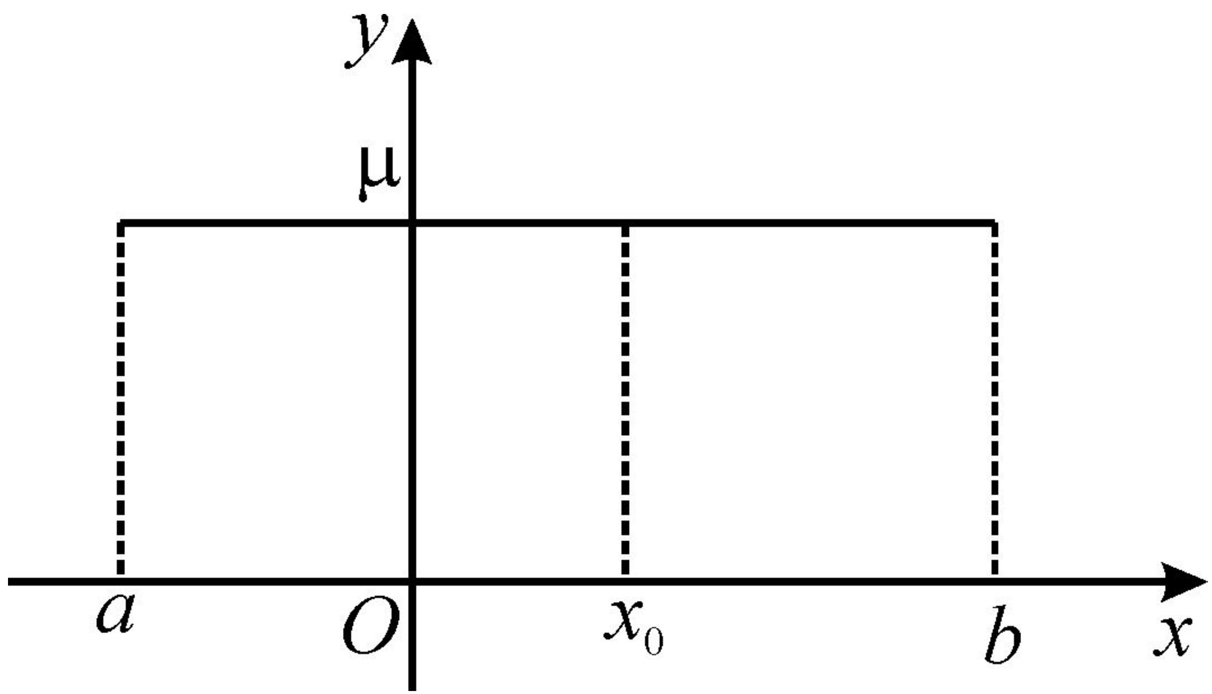
Доказательство

Возможны два случая:

a) функция на этом отрезке постоянна, т.е.

$\forall\ x \in [a,b]\ (f(x) = f(a) = f(b) = \mu)$.

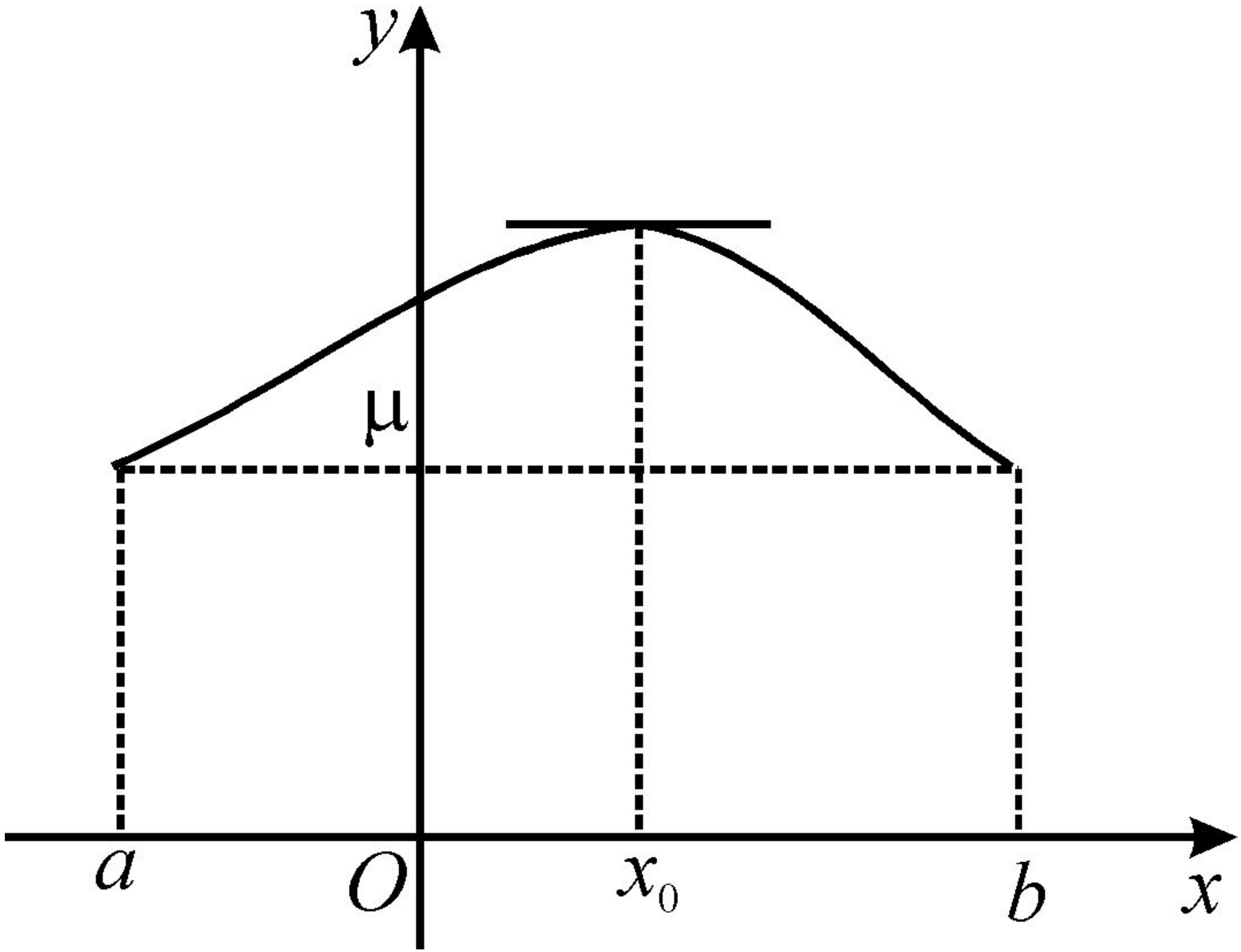
В этом случае роль точки x_0 может играть любая точка данного отрезка. Тогда $f'(x_0) = 0$ как производная константы.



b) функция не является постоянной на этом отрезке. В этом случае внутри $[a,b]$ эта функция принимает значения, отличные от $f(a) = f(b) = \mu$. Для определенности будем считать, что в некоторых внутренних точках функция принимает положительные значения (если отрицательные, то рассуждения аналогичны). Но тогда свое наибольшее значение функция принимает в некоторой внутренней точке x_0 больше μ.

По условия $f'(x_0)$ существует. Тогда по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$.

Что и требовалось доказать.


y
μ
a
O
x_0
b
x

Теорема Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, и удовлетворяет двум условиям:

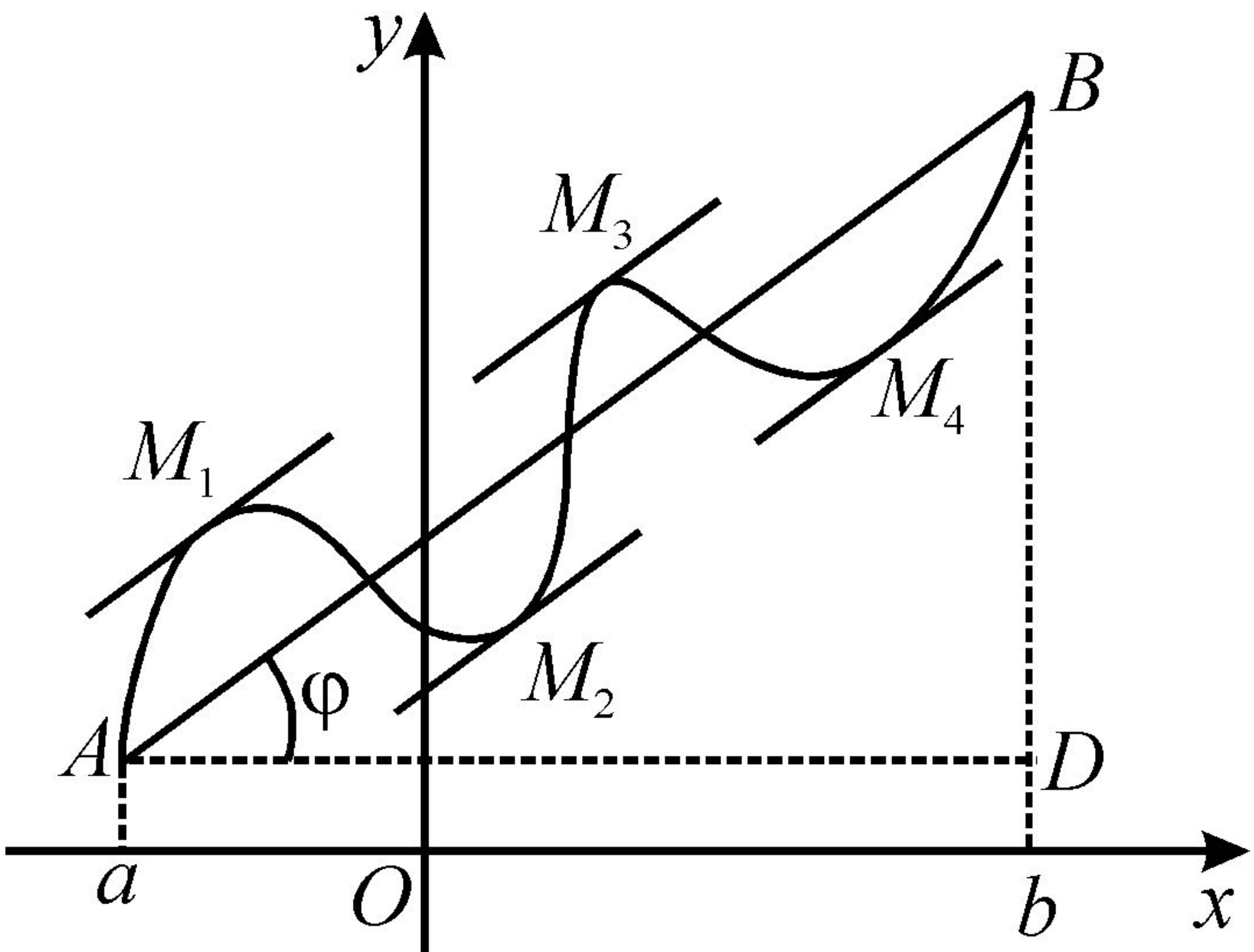
1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.
2) $f(x)$ дифференцируема на (a,b).

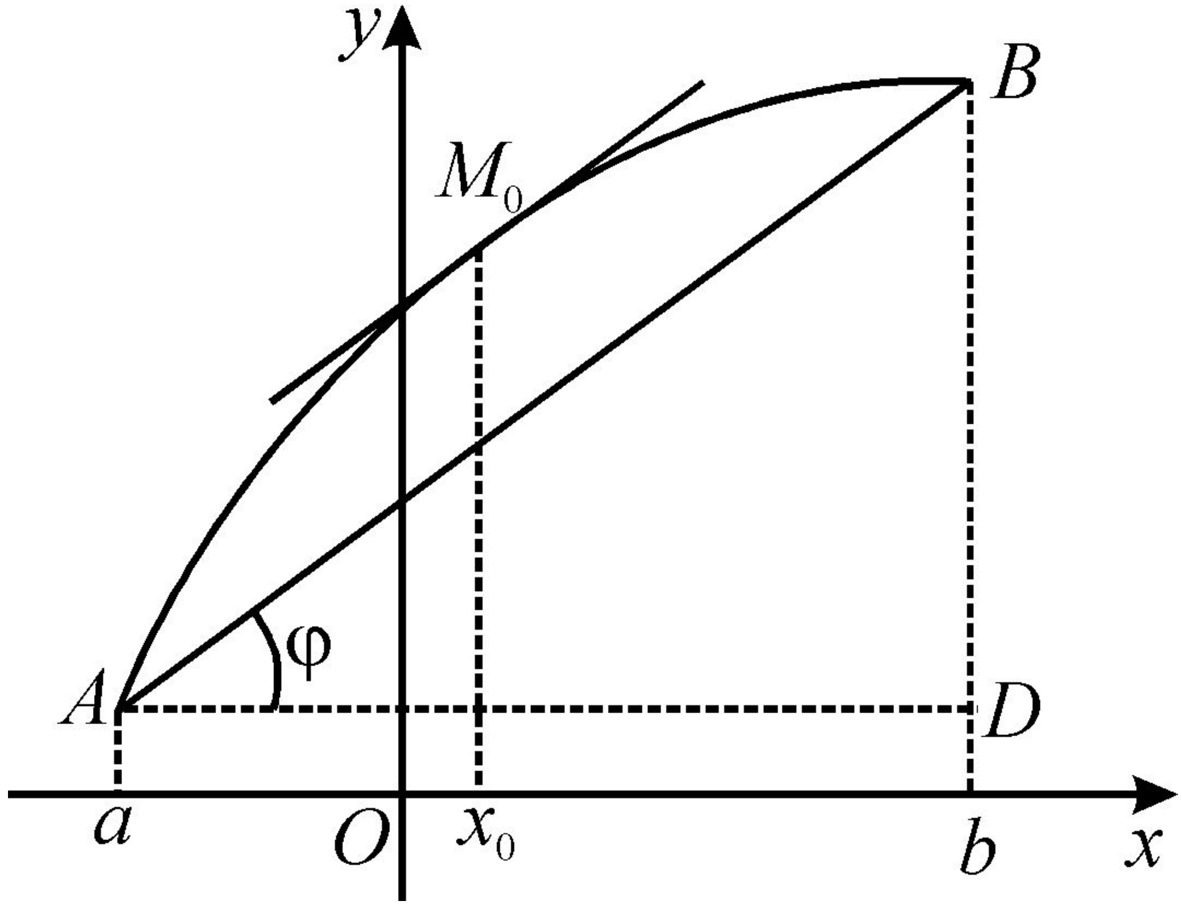
Тогда внутри отрезка $[a,b]$ найдется хотя бы одна точка x_0, в которой:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа:

Если концы гладкой кривой $y = f(x)$ соединить хордой, то на этой кривой найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна этой хорде.





Посмотрим, что значит параллельность касательной и хорды на рисунке.
То, что касательная и хорда параллельны, означает равенство угловых коэффициентов.

Пусть k_1 - угловой коэффициент касательной, k_2 - хорды.

$k_1 = f'(x_0)$.

$$k_2 = \mathrm{tg}\varphi = BD/AD = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Так как $k_1 = k_2$, следовательно:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Или

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Доказательство теоремы Лагранжа

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Эта функция определена на отрезке $[a,b]$, и удовлетворяет трем условиям теоремы Ролля:

1) $\phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ как сумма напрерывных на этом отрезке функций.

2) $\phi(x)$ дифференцируема на (a,b). Действитель-но, ее производная существует и равна:

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3) $\phi(a) = \phi(b)$. Действительно:

$$\phi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a - a) = 0.$$

$$\phi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b - a) = 0.$$

Тогда по теореме Ролля найдется такая точка

$\exists\ x_0 \in (a,b)$, в которой $\phi'(x_0) = 0$, то есть:

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0.$$

Или

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Что и требовалось доказать.

Замечание.

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа, или иными словами теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля. Действительно, в том частном случае, когда

$$f(b) = f(a)$$

из теоремы Лагранжа:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a),$$

следует, что $f'(x_0) = 0$.