

Презентация на тему
«Дружественные,
фигурные и совершенные
числа, теория чисел»
Подготовила учебница 6Б
класса
Трифонова Мария

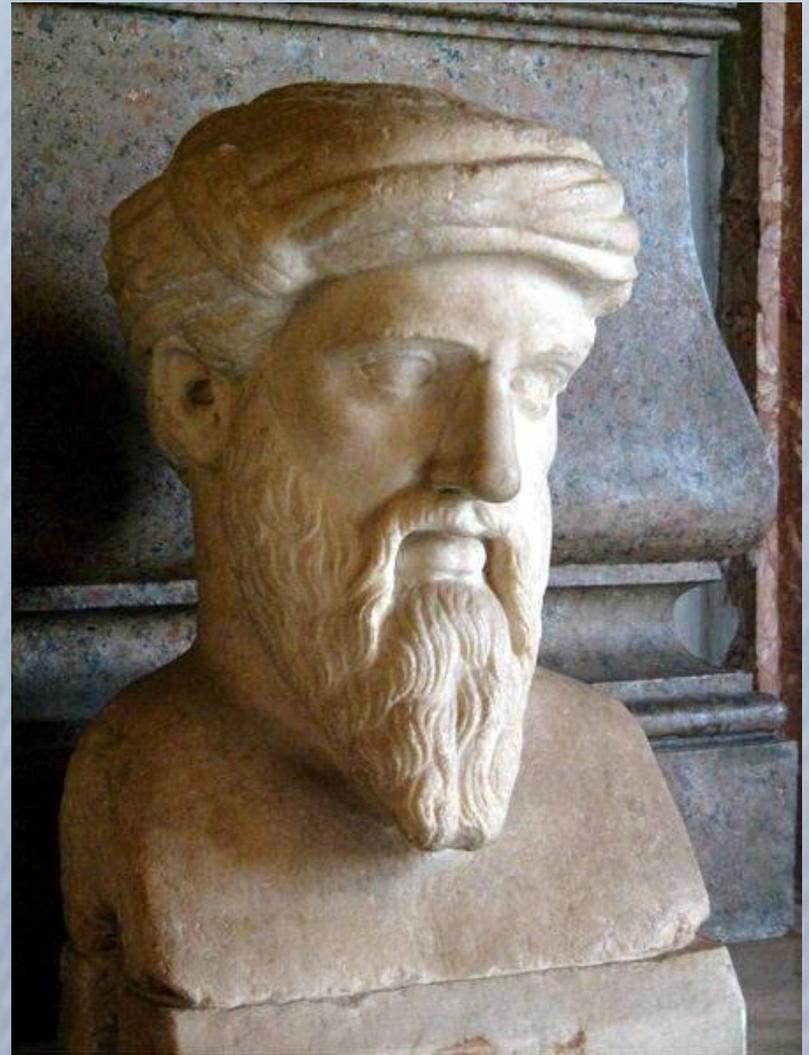
Freundliche zahlen
Die geschweiften zahlen
Vollkommene zahlen
DIE THEORIE DER ZAHLEN

Итак. Для начала, чтобы работать с материалом нам надо узнать, что же такое дружественные числа.

Дружественные числа — это два числа, каждое из которых равно сумме делителей другого числа (не считая самого числа)

Пифагор

- Пифагор Самосский – древнегреческий философ, математик и мистик, создатель религиозно-философской школы пифагорейцев.
- Дата рождения: около 570 до н. э.
- Место рождения: Сидон или Самос (Сидон – Ливан, Самос – Греция)
- Дата смерти: около 490 до н. э.
- Место смерти: Метапонт, Италия



Почему же мы заговорили о Пифагоре?

Дружественные числа были открыты последователями Пифагора, которые, однако, знали только одну пару дружественных чисел — 220 и 284 (делители для 220 – это 1; 24; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55 и 110, сумма делителей равна 284. Делители для 284 — это 1; 2; 4; 71 и 142, сумма которых равна 220).

Когда Пифагора спросили о том, кого считать своим другом, он ответил: «Того, кто является моим вторым Я, как числа 220 и 284. Эти два числа замечательны тем, что сумма делителей каждого из них равна второму числу».

220 и 284 являются дружественными числами, поскольку сумма делителей числа 220 — это

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$$

а сумма делителей числа 284 — это $1+2+4+71+142=220$

Примеры дружественных чисел до 980984:

1. 220 и 284 (Пифагор, около 500 до н. э.)
2. 1184 и 1210 (Паганини, 1866)
3. 2620 и 2924 (Эйлер, 1747)
4. 5020 и 5564 (Эйлер, 1747)
5. 6232 и 6368 (Эйлер, 1750)
6. 10 744 и 10 856 (Эйлер, 1747)
7. 12 285 и 14 595 (Браун, 1939)
8. 17 296 и 18 416 (Ибн ал-Банна, около 1300; Фариси, около 1300; Ферма, 1636)
9. 63 020 и 76 084 (Эйлер, 1747)
10. 66 928 и 66 992 (Эйлер, 1750)
11. 67 095 и 71 145 (Эйлер, 1747)
12. 69 615 и 87 633 (Эйлер, 1747)
13. 79 750 и 88 730 (Рольф, 1964)
14. 100 485 и 124 155
15. 122 265 и 139 815
16. 122 368 и 123 152
17. 141 664 и 153 176
18. 142 310 и 168 730
19. 171 856 и 176 336
20. 176 272 и 180 848
21. 185 368 и 203 432
22. 196 724 и 202 444
23. 280 540 и 365 084
24. 308 620 и 389 924
25. 319 550 и 430 402
26. 356 408 и 399 592
27. 437 456 и 455 344
28. 469 028 и 486 178
29. 503 056 и 514 736
30. 522 405 и 525 915
31. 600 392 и 669 688
32. 609 928 и 686 072
33. 624 184 и 691 256
34. 635 624 и 712 216
35. 643 336 и 652 664
36. 667 964 и 783 556
37. 726 104 и 796 696
38. 802 725 и 863 835
39. 879 712 и 901 424
40. 898 216 и 980 984
41. и т. д.

Пары дружественных чисел образуют последовательность:

220; 284; 1184; 1210; 2620; 2924; 5020; 5564; 6232; 6368; 10744; 10856; 12285; 14595; 17296; 18416; 63020; 66928, 66992; 67095; 69615; 71145; 76084; 79750; 87633; 88730; 100485; 122265; 122368; 123152; 124155; 139815; 141664; 142310; ...

Сабит ибн Курра

- Абуль-Хасан Сабит ибн Курра аль-Харрани – арабский астроном, математик, механик и врач IX века. В русской литературе также упоминается как Сабит ибн Корра или Табит ибн Курра.
- Дата рождения: 836 год
- Место рождения: Харран, Сирия, Аббасидский халифат
- Дата смерти: 18 февраля 901 год
- Место смерти:



Леонард Эйлер

- Леонард Эйлер — швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук).
- Дата рождения: 15 апреля 1707 год
- Место рождения: Базель, Швейцария
- Дата смерти: Дата смерти: 7 (18) сентября 1783 год
- Место смерти: Санкт-Петербург, Российская империя



Формула для нахождения некоторых пар дружественных чисел

Формулу для нахождения некоторых пар дружественных чисел предложил примерно в 850 году арабский астроном и математик Сабит ибн Курра. Его формула позволила найти две новые пары дружественных чисел. Одна из них — 17 296 и 18 416. Много столетий спустя Эйлер нашёл ещё 65 пар дружественных чисел. Но общего способа нахождения всех таких пар нет до сих пор.

После Декарта первым получил новые дружественные числа Леонард Эйлер. Он открыл 59 пар дружественных чисел, среди которых были и нечетные числа, например, 9773505 и 11791935. Он предложил пять способов отыскания дружественных чисел. Эту работу продолжили математики следующих поколений. В настоящее время известно около 1100 пар дружественных чисел.

Неизвестно, конечно или бесконечно количество пар дружественных чисел. На октябрь 2015 года известно 12 648 597 пар дружественных чисел. Все они состоят из чисел одной чётности. Существует ли чётно-нечётная пара дружественных чисел, неизвестно.

Рене Декарт

Рене Декарт — французский философ, математик, механик, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики.

Дата рождения: 31 марта 1596 год

Место рождения: Лаэ, Турень, Королевство Франция

Дата смерти: 11 февраля 1650 (53 года)

Место смерти: Стокгольм, Королевство Швеция



Хасан Аль-Банна

- Хасан ибн Ахмад аль-Банна — египетский политический деятель, исламский проповедник и реформатор.
- Дата рождения: 14 октября 1906 год
- Место рождения: Махмудия, Бухейра, Египет
- Дата смерти: 12 февраля 1949 год (42 года)
- Место смерти: Каир, Египет



Пьер Ферма

- Пьер де Ферма — французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел.
- Дата рождения: 17 августа 1601 год
- Место рождения: Бомон-де-Ломань (коммуна во Франции)
- Дата смерти: 12



При $n=2$, числа $p=5$, $q=11$, $r=71$ простые, и получается пара чисел Пифагора: 220 и 284.

При $n=4$, числа $p=23$, $q=47$, $r=1151$ простые, и получается пара чисел Ибн Аль-Банна и Ферма: 17296 и 18416.

При $n=7$ получается пара чисел, найденная в 1638 году французским математиком и философом Рене Декартом.

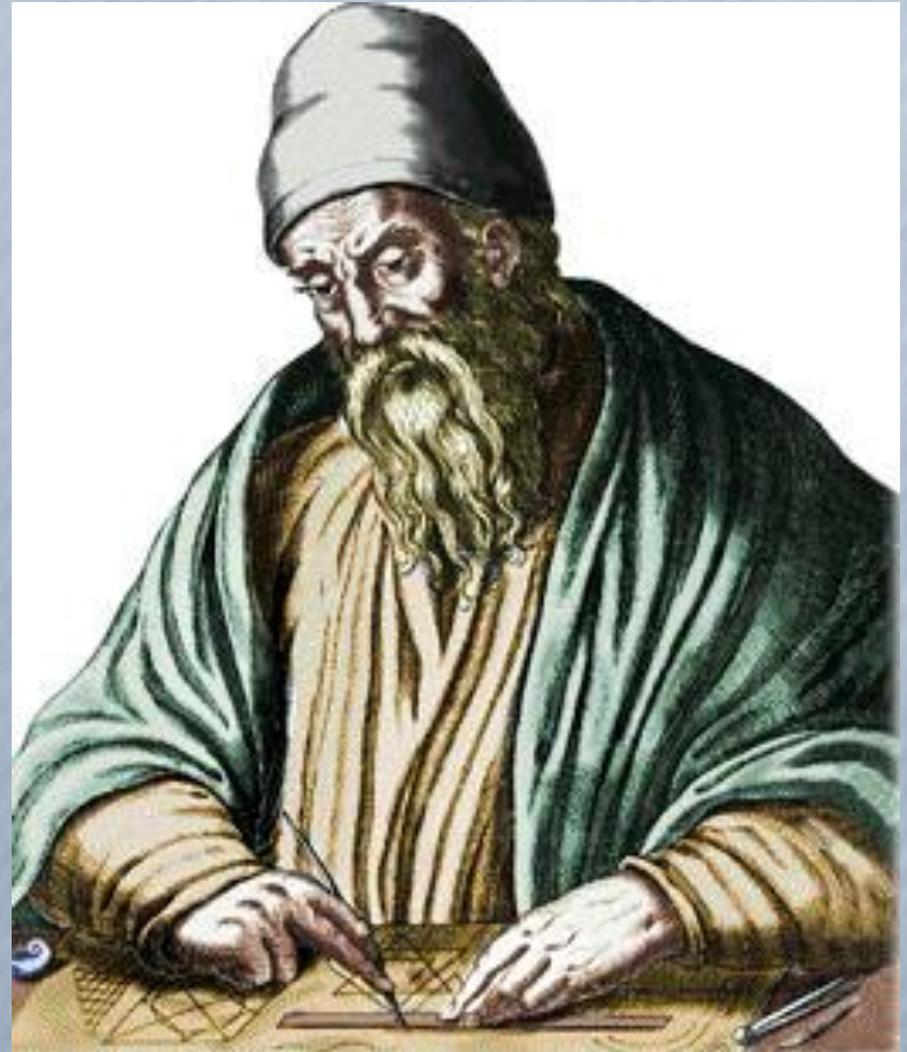
Теория чисел.

Теория чисел — это наука о целых числах. В основу этого раздела легло изучение свойств натуральных чисел, которое было начато еще математиками древности. В настоящее время в теорию чисел включают значительно более широкий круг вопросов, выходящих за рамки изучения натуральных чисел. В теории чисел рассматриваются не только натуральные числа, но и множество всех целых чисел, множество рациональных чисел, множество алгебраических чисел.

Ранний период развития арифметики характеризуется тем, что постепенно и притом весьма медленно развивается сам процесс счета, выявляются возможности неограниченного его продолжения, создается практическая арифметика, в которой решаются отдельные конкретные арифметические задачи.

Евклид

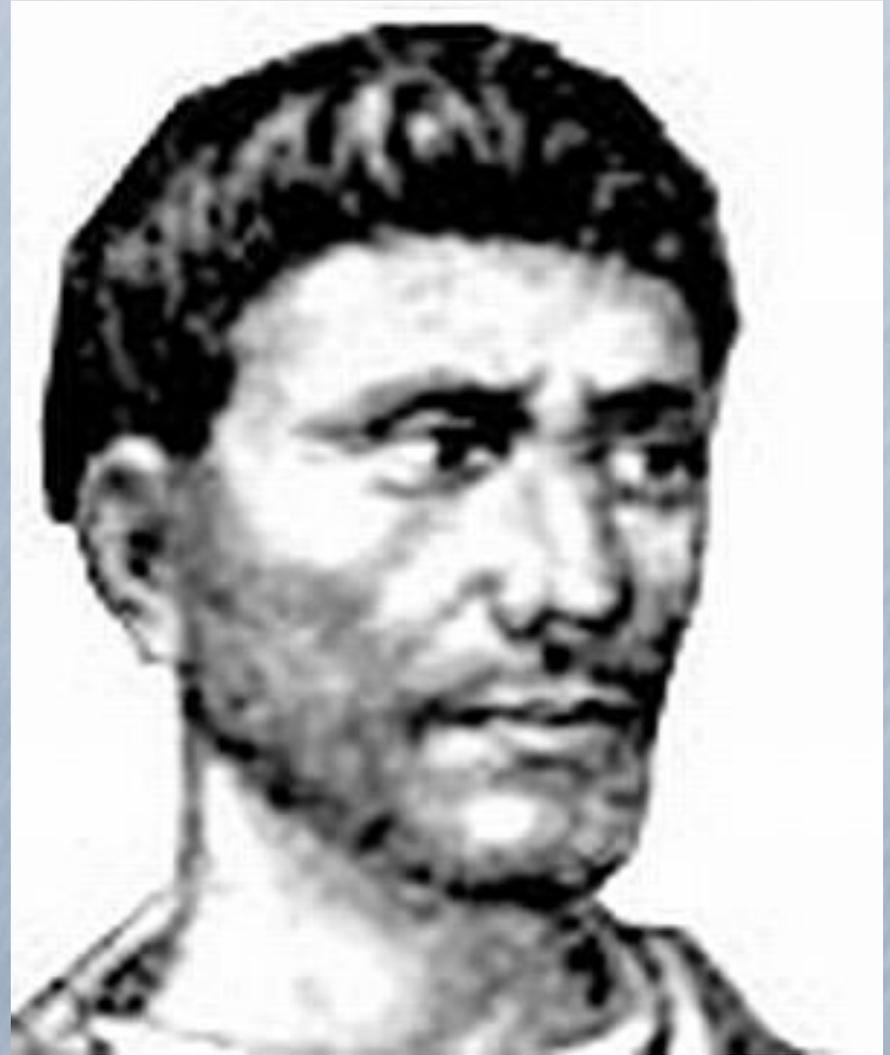
- Евклид ли Эвклид — древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике.
- Дата рождения: около 325 до н. э.
- Дата смерти: до



В трудах Евклида теоретико-числовые исследования занимают сравнительно небольшое место, однако уже у него мы встречаем ряд основных положений теории делимости и хотя простой, но чрезвычайно важный результат: бесконечность множества простых чисел.

Диофант

- Диофант Александрийский — древнегреческий математик, живший предположительно в III веке н. э.
- Дата рождения: III век
- Место рождения: Александрия (Египет)



Греческим математикам был известен способ выделения простых чисел из натурального ряда, получивший название эратосфенова решета. Теорию чисел как особую область математики можно рассматривать только начиная с работ Диофанта. Диофант рассмотрел ряд задач о представимости чисел в определенной форме и более общие задачи решения уравнений в целых и рациональных числах. Именно эти задачи явились позднее отправным пунктом всей теории форм и той базой, откуда возникла проблематика теории диофантовых приближений.

В период упадка античной культуры работы Диофанта были почти совсем забыты. В VIII-IX веках в арабских странах возникает своеобразная математическая культура. Арабская математика, культивируя исследования по алгебре и тригонометрии, проявляла незначительный интерес к теоретико-числовым задачам. Некоторые арабские ученые комментировали Диофанта, рассматривали арифметические задачи того же типа, что и Диофант, однако ничего существенно нового ими не было получено.

Фибоначчи

- Леонардо Пизанский – первый крупный математик средневековой Европы.
- Наиболее известен под прозвищем Фибоначчи.
- Дата рождения: около 1170
- Место рождения: Пиза, Пизанская республика
- Дата смерти: около 1250



Региомонтан

- Региомонтан — выдающийся немецкий астролог, астроном и математик.
- Дата рождения: 28 мая 1436 год
- Место рождения: Кёнигсберг (Бавария)



Regiomontanus (Johannes Müller von Königsberg).
(Geb. 6. Juni 1436, gest. 6. Juli 1476.)

В Европе, начиная с эпохи крестовых походов вплоть до XVII века, развитие теории чисел, как, впрочем, и всей математики, было очень медленным. Математики обычно рассматривали только отдельные конкретные задачи теоретико-числового характера. Общие методы были почти неизвестны. В этот период в основном развилась практическая арифметика действий. Из работ этого времени наибольший след в дальнейшем развитии теории чисел оставили весьма незначительные для этой эпохи работы Леонардо Пизанского и работы Региомонтана, который нашел труды Диофанта и впервые в Европе стал систематически их изучать.

Франсуа Виет

- Франсуа Виет, сеньор де ля Биготье — французский математик, основоположник символической алгебры. По образованию и основной профессии — юрист.
- Дата рождения: 1540 год
- Место рождения: Фонтене-ле-Конт (сейчас — департамент Вандея) (Франция)
- Дата смерти: 13 февраля 1603 год
- Место смерти: Париж, Франция



В XVI и в начале XVII века на латинском и французском языках были изданы сочинения Диофанта, и ряд математиков того времени, из которых в первую очередь можно назвать Виета, занялись комментированием этих сочинений, несколько дополняя их новыми результатами.

В настоящем смысле теорию чисел как науку надо считать начиная с работ французского математика П. Ферма, получившего основной результат теории делимости на заданное простое число и решившего ряд важных задач теории диофантовых уравнений.

В XVIII веке Л. Эйлер значительно продвинул вперед развитие теории чисел. Эйлер обобщил основной результат Ферма для случая делимости на составные числа, создал общую теорию так называемых степенных вычетов, получил очень большое число разнообразных результатов о представимости чисел в виде форм определенного типа, исследовал ряд систем диофантовых уравнений и получил интересные результаты о разбиении чисел на слагаемые. У Эйлера мы впервые встречаемся с идеей применения методов математического анализа к задачам теории чисел. Рассмотрение бесконечных рядов и произведений явилось у Эйлера действенным орудием для получения теоретико-числовых результатов.

Жозеф Луи Лангранж

- Жозеф Луи Лагранж — французский математик, астроном и механик итальянского происхождения. Наряду с Эйлером — крупнейший математик XVIII века.
- Дата рождения: 25 января 1736 год
- Место рождения: Турин, Италия
- Дата смерти: 10 апреля 1813 год (77 лет)
- Место смерти: Париж, Франция



- После работ Эйлера почти все крупные математики XVIII и XIX веков в той или иной степени занимаются теорией чисел. В частности, существенный след в развитии теории чисел оставил французский математик Лагранж, развивший дальше методы Эйлера. Лагранж рассматривал вопрос о представлении чисел в виде бинарной квадратичной формы $ax^2 + bxy + cy^2$, доказал теорему о представимости чисел в виде суммы четырех квадратов и провел существенные исследования по теории непрерывных дробей.

Адриен Мари Лежанр

- Адриен Мари Лежандр — французский математик.
- Дата рождения: 18 сентября 1752 год
- Место рождения: Париж, Франция
- Дата смерти: 10 января 1833 год (80)



Карл Фридрих Гаусс

- Иоганн Карл Фридрих Гаусс — немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков».
- Дата рождения: 30 апреля 1777 год
- Место рождения: Брауншвейг, Германия
- Дата смерти: 23 февраля 1855 год (77 лет)
- Место смерти: Гёттинген, Германия



Большое влияние на дальнейшее развитие теории чисел оказали и работы А.Лежандра по теории диофантовых уравнений высших степеней. Лежандр нашел также эмпирическую формулу для числа простых чисел в заданных пределах. Работы Эйлера, Лагранжа и Лежандра создали базу для цельной теории, получившей позже у Гаусса название теории сравнений.

Замечательные работы немецкого математика К.Гаусса имели особенно большое значение для всей теории чисел. Работы Гаусса по теории сравнений 2-й степени придали ей законченный вид, так что в настоящее время вся эта область теории чисел базируется на результатах, изложенных им в книге «Арифметические исследования». В этой книге рассматривается также теория квадратичных форм, в которой им были получены фундаментальные результаты. Гаусс наряду с изучением обычных целых чисел начал рассматривать также и арифметику чисел, получивших название целых гауссовых чисел. Эти его исследования положили начало алгебраической теории чисел.

После работ Гаусса в течение всего XIX века и до сегодняшнего дня исследования по теории приобретают все увеличивающийся размах.

Совершенные числа.

Совершенные числа – это числа, равные сумме всех его делителей (без самого числа). Например, числа 6 ($6=1+2+3$), 28 ($28=1+2+4+7+14$).

Следующие совершенные числа – 496, 8128, 33 550 336. Число 6 делится на себя, а также на 1, 2 и 3, причем $6 = 1+2+3$.

Число 28 имеет пять делителей, кроме самого себя: 1, 2, 4, 7 и 14, причем, аналогично, $28 = 1+2+4+7+14$. Первое самое меньшее совершенное число — 6 ($1 + 2 + 3 = 6$). Может быть, именно поэтому шестое место считалось самым почетным на пирах у древних римлян.

Второе по старшинству совершенное число — 28 ($1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$). В некоторых ученых обществах и академиях полагалось иметь 28 членов.

Почти до наших дней дожила эта традиция, идущая из далеких эпох. В Риме в 1917г. при выполнении подземных работ обнаружилось помещение одной из древнейших академий: зал и вокруг него 28 кабинетов – как раз по числу членов академии.

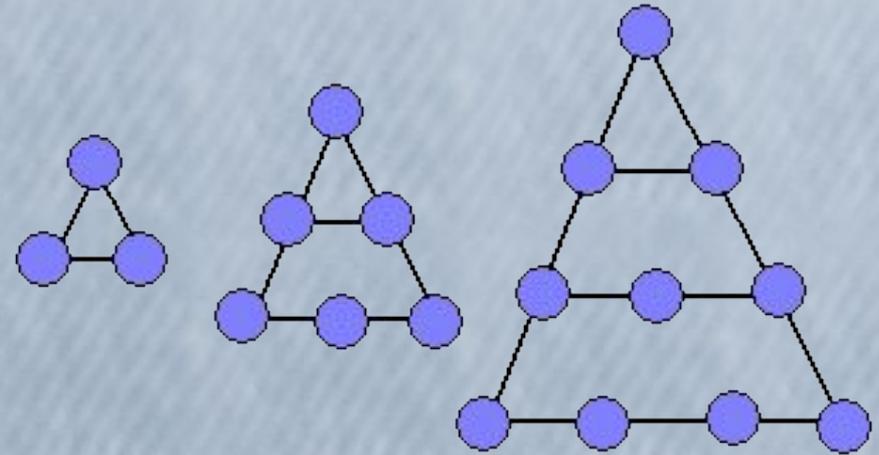
По мере того как натуральные числа возрастают, совершенные числа встречаются всё реже. Третье совершенное число — 496 ($1+2+4+8+16+31+62+124+248 = 496$), четвёртое — 8128, пятое — 33 550 336, шестое — 8 589 869 056, седьмое — 137 438 691 328.

Фигурные числа.

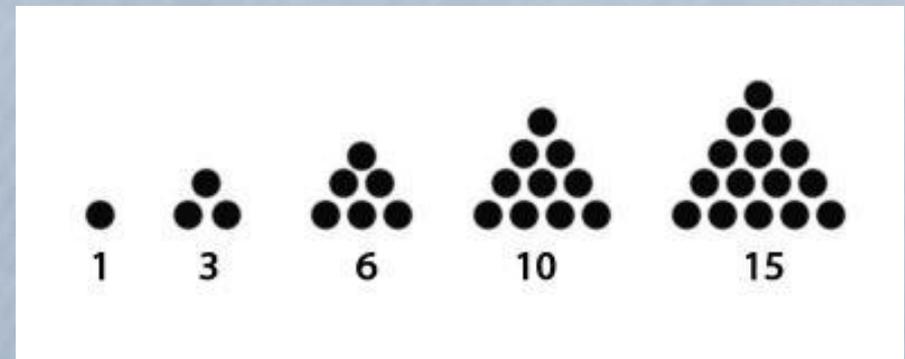
Фигурные числа – это числа, которые соответствовали количеству точек, расположенных в виде некоторой геометрической фигуры – треугольника, квадрата и др.

Треугольные числа.

- Нарисованные и попарно соединённые три точки создают правильный (равносторонний) треугольник. А если точек четыре – можно ли их расположить аналогичным способом? Оказывается, нет. Пять точек - тоже нет. А вот шесть точек расположить в требуемом порядке уже можно. При этом новый треугольник получается линейным увеличением последнего в три раза. Чтобы впечатление треугольника сохранялось нужно добавить четыре точки. Соответствующий треугольник получается линейным увеличением исходного в три раза.
- Продолжая добавлять точки, будем получать всё новые и новые треугольники.



- В приведённых примерах точек сначала было три, потом шесть, затем десять и так далее. Эти числа по вполне понятным причинам называются треугольными. Простейшими из этих чисел



являются 3, 6, 10,

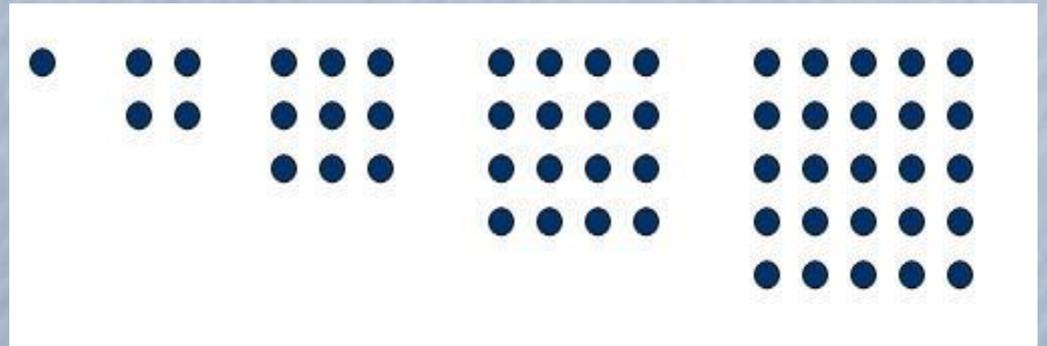
- $3=1+2$
- $6=1+2+3$
- $10=1+2+3+4$
- $15=1+2+3+4+5$
- $21=1+2+3+4+5+6$

Треугольные числа обладают следующими свойствами:

1. Сумма двух последовательных треугольных чисел даёт полный квадрат – квадратное число.
2. Чётность элемента последовательности меняется с периодом 4: нечётное, нечётное, чётное, чётное...
3. Каждое чётное совершенное число является треугольным.

Квадратные числа.

- Нарисованные точки образуют правильную геометрическую фигуру – квадрат. Квадратными числами называются числа ряда: 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; ...



Квадратные числа представляют собой произведение двух одинаковых натуральных чисел, то есть являются полными квадратами.

$$1=1 \times 1$$

$$4=2 \times 2$$

$$9=3 \times 3$$

$$16=4 \times 4$$

$$25=5 \times 5$$