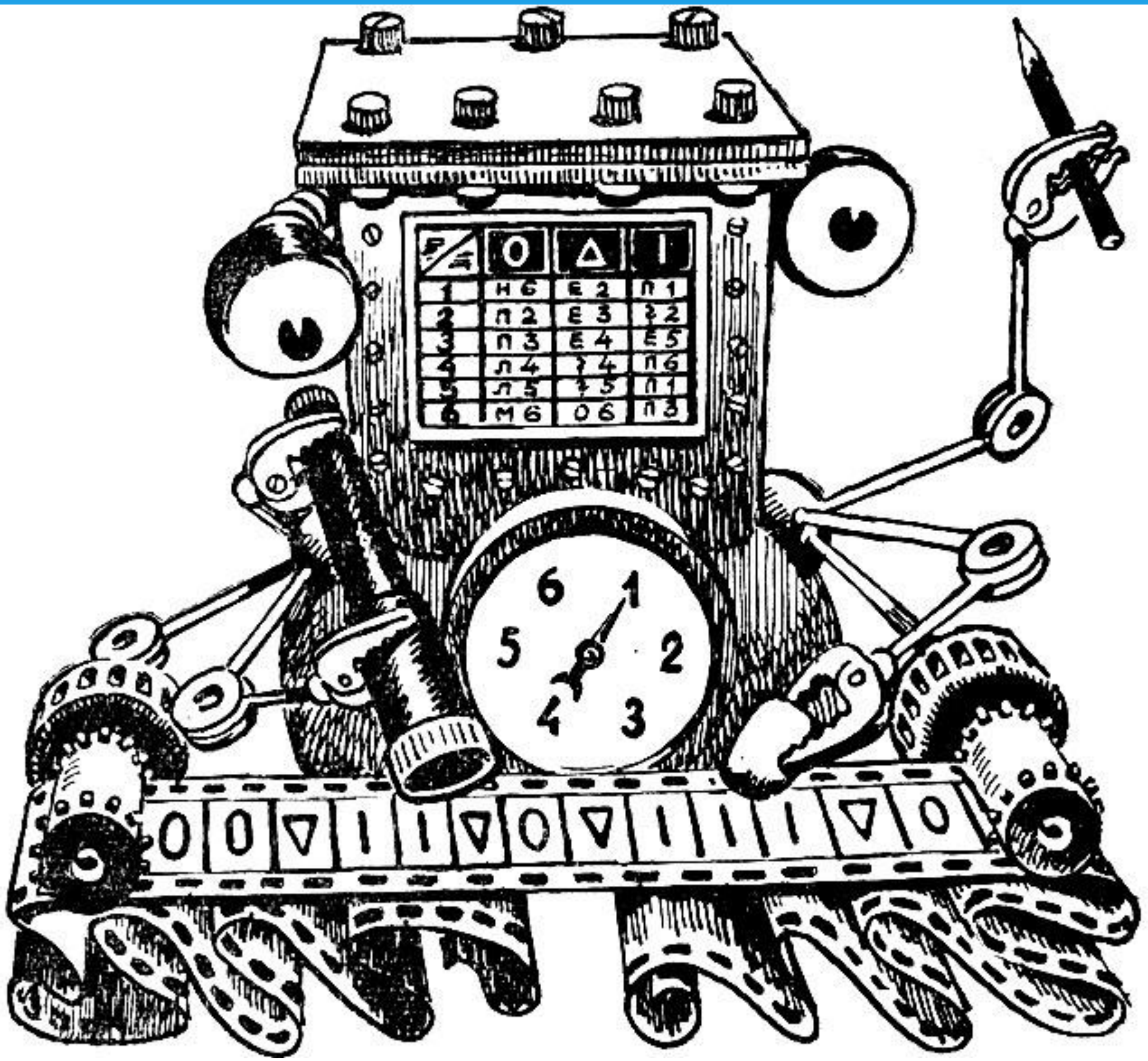
Машина Тьюринга

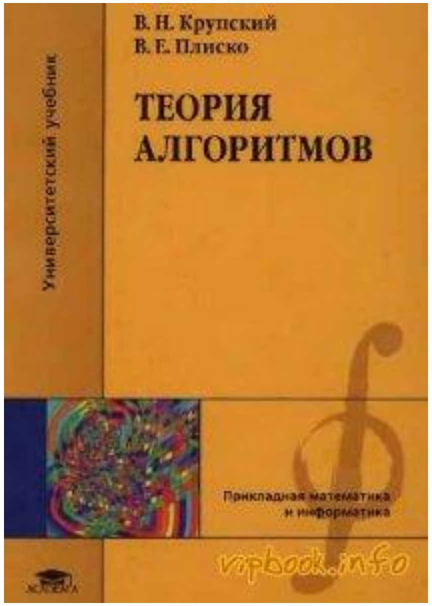
Маши́на Тью́ринга (МТ) — абстрактный исполнитель (абстрактная вычислительная машина). Была предложена Аланом Тьюрингом в 1936 году для формализации понятия алгоритма.

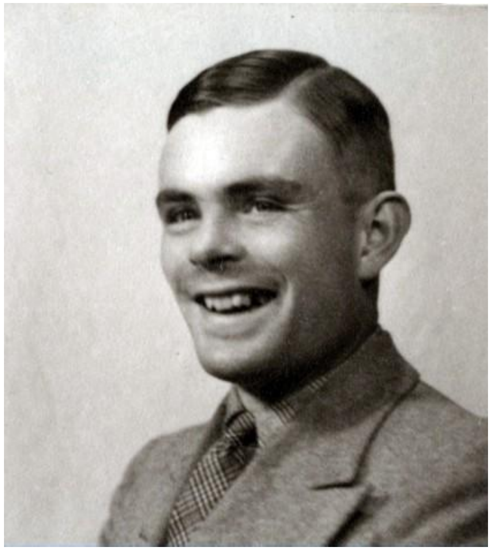
Машина Тьюринга является расширением конечного автомата и, согласно тезису Чёрча — Тьюринга, *способна имитировать все исполнители* (с помощью задания правил перехода), каким-либо образом реализующие процесс пошагового вычисления, в котором каждый шаг вычисления достаточно элементарен.



0 Δ 1
1 Н6 Е2 П1
2 П2 Е3
3 П3 Е4 Е5
4 Л4 П6
5 Л5 П1
6 М6 О6 П3

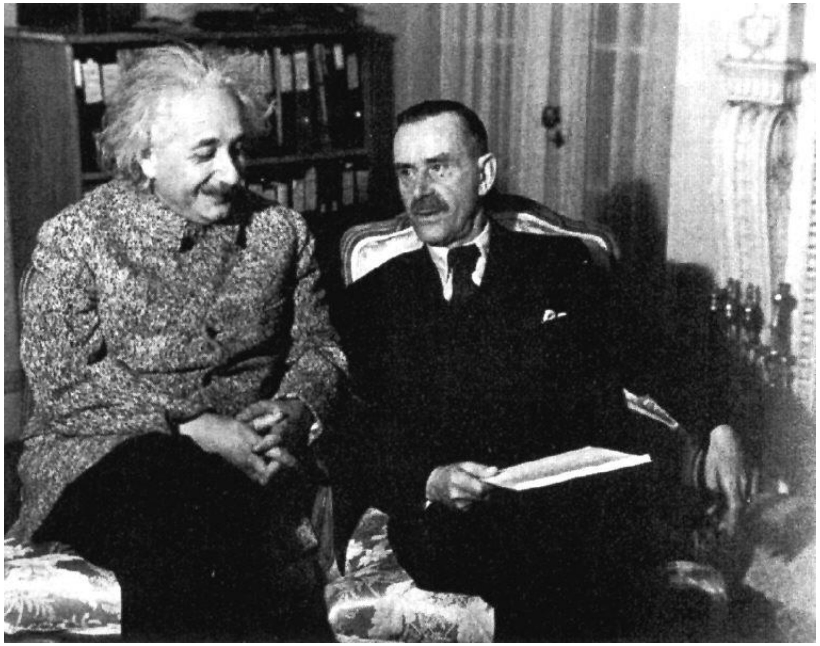
Всякая функция вычисляемая по Тьюрингу является частично рекурсивной. Это будет сделано на основе приема, распространенного в теории алгоритмов и называемая арифметизацией . Данный прием заключается в том что не числовые объекты- в данном случае слова в конечном алфавите-кодируется натуральным числами, а преобразование этих объектов заменяться аритмическими операциями над их номерами.





Гёдель, Курт

* **Курт Фри́дрих Гёдель** (нем. *Kurt Friedrich Gödel*; 28 апреля 1906, Брюнн, Австро-Венгрия — 14 января 1197, Принстон, Нью-Джерси) — австрийский логик, математик и философ математики, наиболее известный сформулированной и доказанной им теоремой о неполноте.



Нумерация Гёделя

Нумерация Гёделя — это функция **g**, сопоставляющая каждому объекту некоторого формального языка её номер. С её помощью можно явно пронумеровать следующие объекты языка: переменные, предметные константы, функциональные символы, предикатные символы и формулы, построенные из них. Построение нумерации Гёделя для объектов теории называется арифметизацией теории — оно позволяет переводить высказывания, аксиомы, теоремы, теории в объекты арифметики. При этом требуется, чтобы нумерация **g** была эффективно вычислимой и для любого натурального числа можно было определить, является ли оно номером или нет, и если является, то построить соответствующий ему объект языка. Нумерация Гёделя очень похожа на посимвольное кодирование строк числами, но с той разницей, что для кодирования последовательностей номеров букв используется не конкатенация номеров одинаковой длины, а основная теорема арифметики.

Нумерация Гёделя была применена Гёделем в качестве инструмента для доказательства неполнотыформальной арифметики.

Частично рекурсивная функция

Частично рекурсивная функция определяется аналогично примитивно рекурсивной, только к двум операторам суперпозиции и примитивной рекурсии добавляется ещё третий оператор — минимизации аргумента.

Оператор минимизации аргумента. Пусть — функция от *n* натуральных переменных. Тогда результатом применения оператора минимума аргумента к функции называется функция от переменной, задаваемая следующим определением:

, при условии То есть функция возвращает минимальное значение последнего аргумента функции , при котором её значение равно 0. Частично рекурсивные функции для некоторых значений аргумента могут быть не определены, так как оператор минимизации аргумента не всегда корректно определён, поскольку функция может быть не равной нулю ни при каких значениях аргументов. С точки зрения императивного программирования, результатом частично рекурсивной функции может быть не только число, но и исключение или уход в бесконечный цикл, соответствующие неопределённому значению.

Свойства

Легко понять, что любая примитивно рекурсивная функция является частично рекурсивной, так как по определению операторы для построения частично рекурсивных функций включают в себя операторы для построения примитивно рекурсивных функций.

Также понятно, что примитивно рекурсивная функция определена везде и поэтому является общерекурсивной функцией (у примитивно рекурсивной функции нет повода «зависать», так как при её построении используются операторы, определяющие везде определённые функции).

Довольно сложно доказать существование и привести пример общерекурсивной функции, не являющейся примитивно рекурсивной. Одним из популярных примеров является функция Аккермана. Другой пример общерекурсивной функции, не являющейся примитивно рекурсивной, строится диагональным методом Кантора из универсальной функции для множества одноместных примитивно рекурсивных функций.

Как было показано Гёделем, частично рекурсивные функции совпадают с множеством вычислимых функций

История возникновения названия

Термины «частично рекурсивная функция» и «общерекурсивная функция» прижились в силу исторических причин и по сути являются результатом неточного перевода английских терминов *partial recursive function* и *total recursive function*, которые по смыслу более правильно переводить как «рекурсивные функции, определенные на части множества возможных аргументов» и «рекурсивные функции, определенные на всём множестве возможных аргументов». Наречие «частично» относится не к прилагательному «рекурсивные», а к области определения функции. Возможно, более правильным названием было бы «частично определённые рекурсивные функции» и просто «везде определённые рекурсивные функции». Но длинные названия не прижились.

Неразрешимые алгоритмические проблемы

Алгоритмическая проблема — это проблема, в которой требуется найти единый метод (алгоритм) для решения бесконечной серии однотипных единичных задач. Такие проблемы называют также массовыми проблемами. Они возникали и решались в различных областях математики на протяжении всей ее истории. Примеры таких проблем рассматривались ранее.

Математики в начале XX в. столкнулись с тем, что для некоторых массовых проблем не удается подобрать общий алгоритм для их решения. В связи с этим возникла необходимость дать точное определение самому понятию алгоритма. Мы познакомились с несколькими способами такого уточнения, и в настоящем параграфе приведем примеры алгоритмически неразрешимых массовых проблем. Сначала в качестве понятия, уточняющего понятие алгоритма, будем использовать понятие машины Тьюринга. Затем рассмотрим проблему алгоритмической разрешимости в рамках общей теории алгоритмов.

Нумерация алгоритмов

Понятие нумерации алгоритмов — важное средство для их исследования, в частности для доказательств несуществования единого алгоритма для решения той или иной массовой проблемы. Посмотрим сначала на это понятие в рамках нашей общей теории алгоритмов.

Поскольку любой алгоритм можно задать конечным описанием (словом) (например, в конечном алфавите знаков, используемых при наборе математических книг), а множество всех конечных слов в фиксированном конечном алфавите счетно, то множество всех алгоритмов счетно. Это означает наличие взаимно-однозначного соответствия между множеством NN
натуральных чисел и множеством всех алгоритмов, рассматриваемым как подмножество множества Al*Al*
всех слов в алфавите AlAl
, выбранном для описания алгоритмов (φ:N→Al∗)(φ:N→Al∗)
. Такая функция называется нумерацией алгоритмов. Если φ(n)=Aφ(n)=A
, то число nn
называется номером алгоритма AA
. Из взаимной однозначности отображения φφ
следует существование обратной функции φ−1φ−1
, восстанавливающей по описанию алгоритма AnAn
его номер в этой нумерации φ−1(An)=nφ−1(An)=n
. Очевидно, что различных нумераций много.

Нумерация всех алгоритмов является одновременно и нумерацией всех вычислимых функций в следующем смысле: номер функции ff
— это номер некоторого алгоритма, вычисляющего ff
. Ясно, что в любой нумерации всякая функция будет иметь бесконечное множество различных номеров.

Существование нумераций позволяет работать с алгоритмами как с числами. Это особенно удобно при исследовании алгоритмов над алгоритмами. Отсутствие именно таких алгоритмов часто приводит к алгоритмически неразрешимым проблемам.

Другие неразрешимые проблемы

* Понятие нумерации алгоритмов — важное средство для их исследования, в частности для доказательств несуществования единого алгоритма для решения той или иной массовой проблемы. Посмотрим сначала на это понятие в рамках нашей общей теории алгоритмов.
* Поскольку любой алгоритм можно задать конечным описанием (словом) (например, в конечном алфавите знаков, используемых при наборе математических книг), а множество всех конечных слов в фиксированном конечном алфавите счетно, то множество всех алгоритмов счетно. Это означает наличие взаимно-однозначного соответствия между множеством NN
* натуральных чисел и множеством всех алгоритмов, рассматриваемым как подмножество множества Al∗Al∗
* всех слов в алфавите AlAl
* , выбранном для описания алгоритмов (φ:N→Al∗)(φ:N→Al∗)
* . Такая функция называется нумерацией алгоритмов. Если φ(n)=Aφ(n)=A
* , то число nn
* называется номером алгоритма AA
* . Из взаимной однозначности отображения φφ
* следует существование обратной функции φ−1φ−1
* , восстанавливающей по описанию алгоритма AnAn
* его номер в этой нумерации φ−1(An)=nφ−1(An)=n
* . Очевидно, что различных нумераций много.
* Нумерация всех алгоритмов является одновременно и нумерацией всех вычислимых функций в следующем смысле: номер функции ff
* — это номер некоторого алгоритма, вычисляющего ff
* . Ясно, что в любой нумерации всякая функция будет иметь бесконечное множество различных номеров.
* Существование нумераций позволяет работать с алгоритмами как с числами. Это особенно удобно при исследовании алгоритмов над алгоритмами. Отсутствие именно таких алгоритмов часто приводит к алгоритмически неразрешимым проблемам.

Фильм про Тьюринга

«Игра́ в имита́цию» (англ.*The Imitation Game*) — историческая драма о британском криптографе военного времени Алане Тьюринге, который взломал код немецкой шифровальной машины «Энигма» во время Второй мировой войны и позже был привлечён к уголовной ответственности за свою гомосексуальность. Фильм срежиссирован Мортеном Тильдумом по сценарию Грэма Мура, основанному на романе «Алан Тьюринг: Энигма» Эндрю Ходжеса. Главную роль исполнил Бенедикт Камбербэтч.

Фильм является обладателем главной награды Кинофестиваля в Торонто 2014 года. Сценарий фильма возглавил ежегодный «Чёрный список» лучших не запущенных в производство голливудскихсценариев 2011 год. Премьера фильма состоялась во время кинофестиваля в Теллуриде 29 августа 2014 года