

ПЛАН ЛЕКЦИИ 2

1. **Понятие нечеткого множества**
2. **Характеристики нечеткого множества**
3. **Основные типы функций принадлежности**
4. **Методы построения функций принадлежности**

ПОНЯТИЕ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

Определение 1. Под **нечетким множеством** понимается множество без определенных границ.

Определение 2. **Нечеткое множество** представляет собой совокупность элементов произвольной природы, относительно которых нельзя с полной определенностью утверждать, принадлежит ли тот или иной элемент рассматриваемой совокупности данному множеству или нет.

Определение 3 (математическое). **Нечеткое множество** A есть множество упорядоченных пар (кортежей) вида $(x, \mu_A(x))$, где x является элементом некоторого универсального множества (универсума) X , а $\mu_A(x)$ - функция принадлежности (ФП), которая ставит в соответствие каждому из элементов $x \in X$ некоторое действительное число из интервала $[0, 1]$, т. е. данная функция определяется в форме отображения

$$\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$$

При этом значение $\mu_A(x)=1$ для некоторого $x \in X$ означает, что элемент x определенно принадлежит нечеткому множеству A , а значение $\mu_A(x)=0$ означает, что элемент x определенно не принадлежит нечеткому множеству A . Значение $0 < \mu_A(x) < 1$ означает частичную принадлежность элемента x нечеткому множеству A .

ПРИМЕР

Таким образом, нечеткое множество A математически задается в виде: $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$

Для лучшего понимания различия между четкими и нечеткими множествами рассмотрим пример. Объект исследования представляет множество взрослых людей. Обозначим через x возраст человека и введем функцию:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 18; \\ 0, & \text{если } x < 18. \end{cases}$$

В этой записи учтено, что взрослым считается человек, достигший 18 лет. Следовательно, множество взрослых людей может быть задано в виде: $A = \{(x, \mu_A(x) = 1) | x \in X\}$

Последнее равенство означает, что множество A образуют такие объекты, для которых $\text{ФП}=1$. Графически функция принадлежности данного (четкого) множества представлена на рис.1.

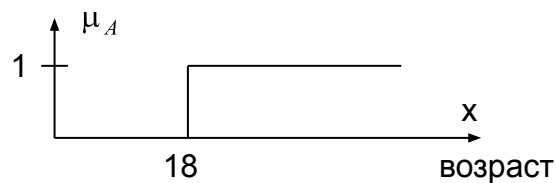


Рис.1. Четкое множество

ПРИМЕР

Однако такая двузначная логика («да-нет») не учитывает возможного разброса мнений относительно границ множества A . Более естественна форма представления (рис. 2), где функция принадлежности ставит в соответствие каждому элементу $x \in X$ число $\mu_A(x)$ из интервала $[0,1]$, описывающее степень принадлежности x множеству A .

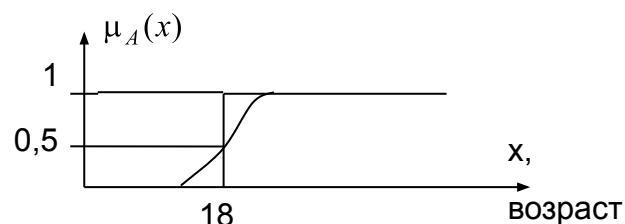


Рис.2. Нечеткое множество

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

Носитель нечеткого множества A есть обычное множество A_s (s - от англ. *support* - поддержка), которое содержит только те элементы x , для которых значения ФП соответствующего нечеткого множества (НМ) отличны от нуля ($\mu_A(x)$ положительна):

$$A_s = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

Если носитель НМ A состоит из единственной точки x , то такое множество называется **одноточечным**. Оно записывается в виде

$$A = \mu/x,$$

где μ - степень принадлежности x множеству A .

Если носитель НМ A состоит из конечного числа элементов, то нечетное множество называется **конечным дискретным** множеством. Оно может быть задано одним из следующих способов:

а) в виде *списка* с явным перечислением всех элементов и соответствующих им значений ФП, образующих рассматриваемое нечеткое множество (при этом зачастую элементы с нулевыми значениями функции принадлежности просто не указываются в данном списке):

$$A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \dots + \mu_n/x_n \quad \text{или} \quad A = \sum_{i=1}^n \mu_i | x_i$$

где μ_i ($i=1, 2, \dots, n$) - степень принадлежности x_i множеству A .

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

Обычное (четкое) дискретное множество при такой форме записи можно представить в виде:

$$A = 1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n, \text{ или } A = \sum_{i=1}^n 1|x_i$$

Примечание. Знак «+» обозначает объединение, а не арифметическое суммирование.

б) в виде *таблицы*:

x_1	x_2		x_n
$\mu_A(x_1)$	$\mu_A(x_2)$	...	$\mu_A(x_n)$

Эти способы подходят для задания нечетких множеств с конечным дискретным носителем и небольшим числом элементов.

Если носитель НМ А состоит из бесконечного числа элементов, то нечеткое множество называется **бесконечным** множеством. В этом случае ФП задается графически или в виде аналитической зависимости. Иногда используется символическая запись в виде

$$A = \int_x \mu_A(x) | x$$

Примечание. Знак интеграла обозначает объединение, а не операцию интегрирования.

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Пусть $X=\{1,2,3,4,5\}$ и $A=0.2/1+0.4/2+0.7/4$

Определить носитель НМ.

Ответ: носитель НМ $A_s=\{1,2,4\}$.

Пример 2. Пусть $X=N$ - множество натуральных чисел. Определим нечеткое конечное множество «натуральные числа, близкие числу 7»:

а) в виде списка

$$A=0.2/4+0.5/5+0.8/6+1/7+0.8/8+0.5/9+0.2/10;$$

б) в виде таблицы

x_i	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x_i)$	0.2	0.5	0.8	1	0.8	0.5	0.2

Пример 3. Пусть $X=R$ - множество действительных чисел. Определим нечеткое бесконечное множество «действительные числа, близкие числу 7» с помощью ФП вида:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + (x - 7)^2} \cdot \quad \text{Тогда} \quad A = \int_x \frac{[1 + (x - 7)^2]^{-1}}{x}$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

Точка перехода множества A – это элемент множества A , для которого $\mu_A(x)=0.5$.

α -срез нечеткого множества (или множество **α -уровня**) есть множество (обычное) элементов x , для которых $\mu_A(x)$ принимает значение не меньше заданного числа α ($0 \leq \alpha \leq 1$):

$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A \geq \alpha\}$. Строгий α -срез: $A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A > \alpha\}$.

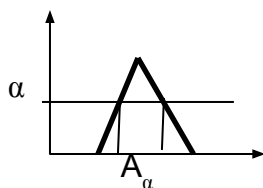


Рис.3.

Понятие множества α -уровня является обобщением понятия носителя НМ.

Ядро НМ есть обычное множество элементов, для которых $\mu_A=1$:

$\text{core } A = \{x \in X \mid \mu_A(x)=1\}$.

НМ называется **унимодальным** (строго унимодальным), если $\mu_A(x)=1$ только на одном x из X .

Пример 4. Пусть $X=\{1,2,3,\dots,10\}$. $A=0.1/2+0.3/4+0.7/5+0.8/8+1/10$.

Определить α -срезы НМ A :

$A_0 = X = \{1,2,3,\dots,10\}$, $A_{0.1} = \{2,4,5,8,10\}$, $A_{0.3} = \{4,5,8,10\}$,

$A_{0.7} = \{5,8,10\}$, $A_{0.8} = \{8,10\}$, $A_1 = \{10\}$ – ядро НМ (унимодальное НМ).

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

Высота нечеткого множества – это точная верхняя грань (supremum, максимум) его функции принадлежности:

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

Если $h(A)=1$, то множество A нормализованное (нормальное), если $h(A)<1$ – НМ субнормализованное (субнормальное) и для приведения его к нормальному виду необходима нормировка путем деления $\mu_A(x)$ на его высоту: $\mu_A(x)/h(A)$.

Пример 5. Пусть $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ и $A=0.1/2+0.5/4+0.3/6$.

Определить высоту НМ. Нормализовать НМ.

Ответ: высота $h(A)=0.5$.

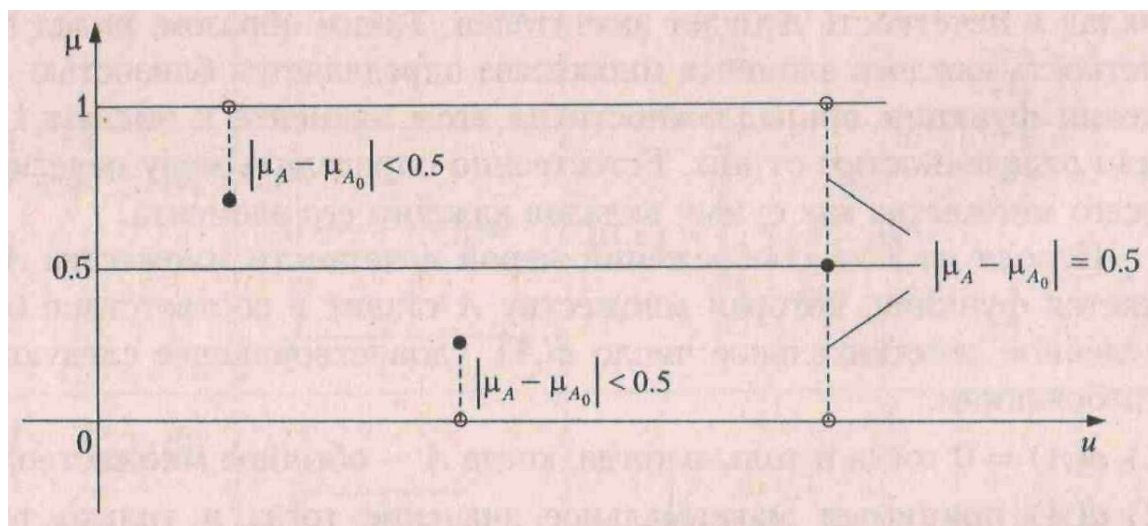
Нормализованное НМ: $A=0.2/2+1/4+0.6/6$.

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

Обычное (четкое) множество A_0 , **ближайшее** к нечеткому множеству A , – это подмножество множества X , характеристическая функция которого имеет вид:

$$\mu_{A_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_A(x) > 0.5 \\ 0, & \text{если } \mu_A(x) < 0.5 \\ 1 \text{ или } 0, & \text{если } \mu_A(x) = 0.5 \end{cases}$$

Геометрический смысл понятия «обычное множество A_0 , ближайшее к нечеткому множеству A » проиллюстрирован на рисунке 4.



- - функция $\mu_A(x)$
- - функция $\mu_{A_0}(x)$

Рис.4.

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

Мера нечеткости множества – это расстояние от нечеткого множества до ближайшего к нему обычного (четкого) множества

$$d(A) = \rho(\mu_A, \mu_{A0})(x_i \in X)$$

В функциональных пространствах наиболее часто используют два способа вычисления расстояний (метрики): линейное (расстояние Хемминга) и евклидово (табл. 1).

Таблица 1

Вид метрики	Вид множества	
	U – дискретное множество, n – число его элементов	U = [a,b]– непрерывное множество
Расстояние Хемминга (линейное)	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) $	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \int_a^b \mu_A(x) - \mu_B(x) dx$
Евклидово расстояние	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}$	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \sqrt{\int_a^b (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2 dx}$

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

Чтобы с помощью $\rho(\mu_A, \mu_{A_0})$ можно было сравнивать нечеткие множества, имеющие различные носители, необходимо нормировать $\rho(\mu_A, \mu_{A_0})$, потребовав, чтобы для любого множества мера нечеткости не превышала какой-то определенный порог, например 1.

Нормированное расстояние между нечетким множеством A и ближайшим к нему обычным множеством называют **индексом нечеткости** и обозначают I_A . Основные формулы вычисления индекса нечеткости приведены в табл. 2.

Таблица 2

Вид метрики	Вид множества	
	U – дискретное множество, n – число элементов носителя НМ	U = [a,b]– непрерывное множество
Индекс нечеткости по Хеммингу (линейный)	$I_A^L = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) - \mu_{A_0}(x_i) $	$I_A^L = \frac{2}{b-a} \int_a^b \mu_A(x) - \mu_{A_0}(x) dx$
Индекс нечеткости по Евклиду	$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_{A_0}(x_i))^2}$	$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{b-a}} \sqrt{\int_a^b (\mu_A(x) - \mu_{A_0}(x))^2 dx}$

ПРИМЕР

Пусть даны нечеткие множества

$$A = 0,3/1 + 0,5/2 + 0,2/3 + 0,7/4 + 0,6/5;$$

$$B = 0,7/1 + 0,5/2 + 0,8/3 + 0,3/4 + 0,4/5;$$

$$C = 0,5/1 + 0,5/2 + 0,5/3.$$

Определить, какое из множеств более нечеткое.

Решение.

«Более нечетким» является то множество, которое имеет больший индекс нечеткости.

1) найдем обычные множества, ближайšie к A , B и C :

$$A_0 = 0/1 + 0/2 + 0/3 + 1/4 + 1/5;$$

$$B_0 = 1/1 + 0/2 + 1/2 + 0/4 + 0/5;$$

$$C_0 = 0/1 + 0/2 + 0/3;$$

2) вычислим меру нечеткости по линейной метрике:

$$d^L(A) = |0,3-0| + |0,5-0| + |0,2-0| + |0,7-1| + |0,6-1| = 1,7,$$

$$d^L(B) = |0,7-1| + |0,5-0| + |0,8-1| + |0,3-0| + |0,4-0| = 1,7,$$

$$d^L(C) = |0,5-0| + |0,5-0| + |0,5-0| = 1,5;$$

ПРИМЕР

3) вычислим меру нечеткости по метрике Евклида:

$$d^E(A) = \sqrt{(0,3-0)^2 + (0,5-0)^2 + (0,2-0)^2 + (0,7-1)^2 + (0,6-1)^2} \approx 1,109,$$

$$d^E(B) = \sqrt{(0,7-1)^2 + (0,5-0)^2 + (0,8-1)^2 + (0,3-0)^2 + (0,4-0)^2} \approx 1,109,$$

$$d^E(C) = \sqrt{(0,5-0)^2 + (0,5-0)^2 + (0,5-0)^2} \approx 0,866,$$

4) применим формулы, приведенные в табл. 2, для вычисления индексов нечеткости множеств A , B и C . Получим:

$$I_A^L = I_B^L = \frac{2}{5} \cdot 1.7 = 0.68$$

$$I_C^L = \frac{2}{3} \cdot 1.5 = 1$$

$$I_A^E = I_B^E = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 1.109 \approx 0.992$$

$$I_C^E = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0.866 \approx 1$$

Таким образом, самое нечеткое множество – множество C , т.к. имеет самые большие индексы нечеткости.

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

Нечеткое множество называют **выпуклым**, если его функция принадлежности удовлетворяет следующему неравенству:

$$\mu_A(x) \geq \min\{\mu_A(a), \mu_A(b)\}$$

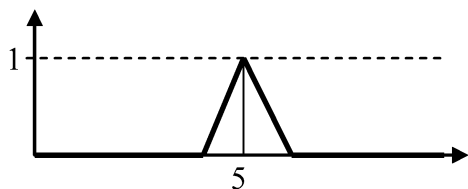
для любых значений $x, a, b \in X$, при которых $a < x < b$ и $a \neq b$.

Иначе нечеткое множество является **вогнутым**.

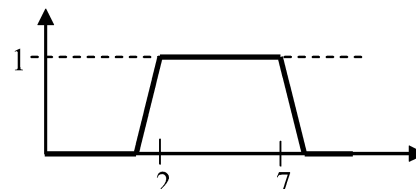
Нечеткое число – специальный тип нечеткого множества. НМ называется нечетким числом, если выполняются следующие четыре условия.

- 1) A - выпуклое;
- 2) A – нормализованное ($h(A)=1$);
- 3) $\mu_A(x)$ - кусочно-непрерывная;
- 4) ядро A содержит одну точку ($\text{core } A$).

Нечеткий интервал – специальный тип нечеткого множества. НМ называется нечетким интервалом, если выполняются условия 1, 2, 3, но не выполняется условие 4. (Если A – выпуклое, A – нормальное, $\mu_A(x)$ – кусочно-непрерывная, то НМ называется нечетким интервалом.)



нечеткое число «приблизительно 5»



нечеткий интервал «от ≈ 2 до ≈ 7 »

ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Формальное определение нечеткого множества не накладывает никаких ограничений на выбор конкретной функции принадлежности для его представления.

Однако на практике удобно использовать те из них, которые допускают аналитическое представление в виде некоторой простой математической функции. Это упрощает не только соответствующие численные расчеты, но и сокращает вычислительные ресурсы, необходимые для хранения отдельных значений этих функций принадлежности.

Необходимость типизации отдельных функций принадлежности также обусловлена наличием реализаций соответствующих функций в рассматриваемых далее инструментальных средствах.

Выделяют 3 типа ФП:

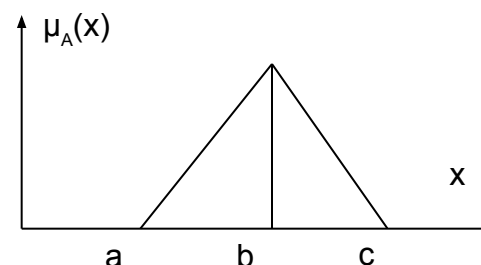
1. кусочно-линейные функции принадлежности
2. Z-образные и S-образные функции принадлежности
3. П-образные функции принадлежности

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФП

Это функции, которые, состоят из отрезков прямых линий, образуя непрерывную или кусочно-непрерывную функцию. Наиболее характерным примером таких функций являются "треугольная" и "трапецевидная" функции принадлежности.

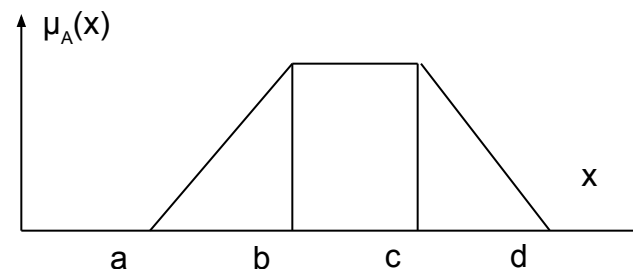
Треугольная функция принадлежности в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_{\Delta}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases}$$



Трапецевидная функция принадлежности в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_T(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{cases}$$



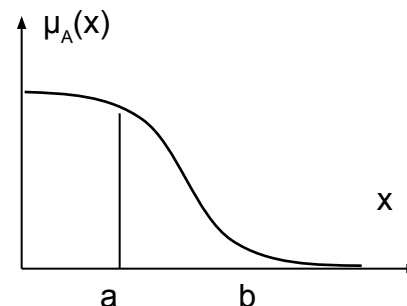
КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФП

Кусочно-линейные функции используются для задания таких свойств множеств, которые характеризуют неопределенность типа: "приблизительно равно", "среднее значение", "расположен в интервале", "подобен объекту", "похож на предмет" и др. Они также служат для представления нечетких чисел и интервалов.

Z-ОБРАЗНЫЕ И S-ОБРАЗНЫЕ ФП

Z-образная ФП или *сплайн-функция* в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_z(x; a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 1 - 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ 2\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} < x < b \\ 0, & b \leq x \end{cases}$$



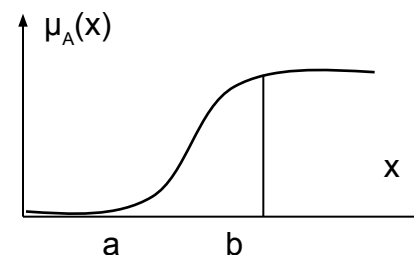
Z-образные функции используются для представления таких свойств нечетких множеств, которые характеризуются неопределенностью типа: "малое количество", "небольшое значение", "незначительная величина", "низкая себестоимость продукции", "низкий уровень цен или доходов", "низкая процентная ставка" и многих других.

Общим для всех таких ситуаций является *слабая степень проявления* того или иного качественного или количественного признака.

Z-ОБРАЗНЫЕ И S-ОБРАЗНЫЕ ФП

S-образная ФП или *сплайн-функция* в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_s(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} < x < b \\ 1, & b \leq x \end{cases}$$



S-образные функции используются для представления таких свойств нечетких множеств, которые характеризуются неопределенностью типа: "большое количество", "большое значение", "значительная величина", "высокий уровень доходов и цен", "высокая норма прибыли", "высокое качество услуг", "высокий сервис обслуживания" и многих других.

Общим для всех таких ситуаций является *высокая степень проявления* того или иного качественного или количественного признака.

Z-ОБРАЗНЫЕ И S-ОБРАЗНЫЕ ФП

К типу S-образных и одновременно Z-образных функций принадлежности может быть отнесена так называемая *сигмоидальная* функция (сигмоид), которая в общем случае задается аналитически следующим выражением:

$$f(x; a, b) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}$$

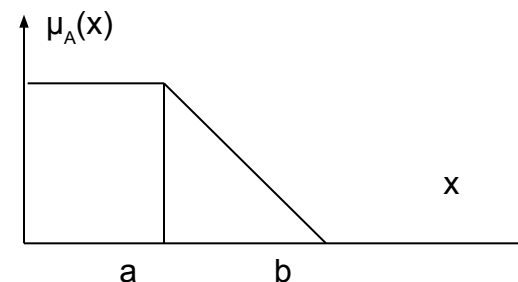
При этом в случае $a > 0$ может быть получена S-образная функция принадлежности, а в случае $a < 0$ – Z-образная функция принадлежности.

Z-ОБРАЗНЫЕ И S-ОБРАЗНЫЕ ФП

В качестве *частных* случаев Z- и S-образных кривых удобно рассматривать их линейные формы.

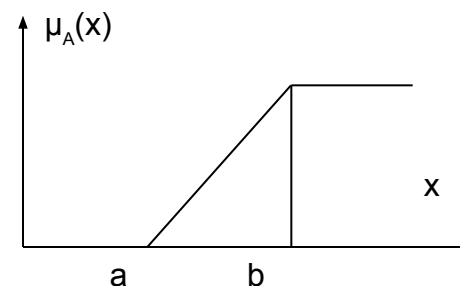
Линейная Z-образная функция в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_{\downarrow}(x; a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & b \leq x \end{cases}$$



Линейная S-образная функция в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_{\uparrow}(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & b \leq x \end{cases}$$



П-ОБРАЗНЫЕ ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

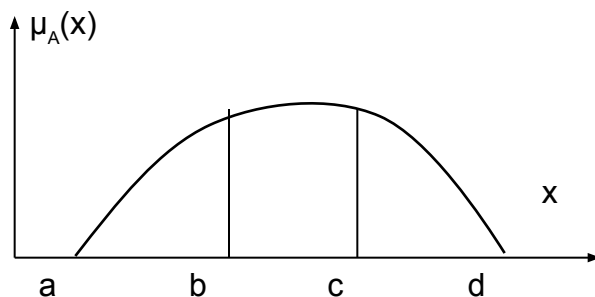
Рассмотрим некоторые разновидности П-образных функций.

Первый вид П-образной функции в общем случае задается аналитически следующим выражением:

$$f_{\Pi_1}(x; a, b, c, d) = f_S(x; a, b) \cdot f_Z(x; c, d)$$

Второй вид П-образных функций определяется как произведение двух сигмоидальных функций и в общем случае может быть задан аналитически следующим выражением:

$$f_{\Pi_2}(x; a, b, c, d) = f(x; a, b) \cdot f(x; c, d)$$



П-ОБРАЗНЫЕ ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Третий вид П-образной функции – *колоколообразная* (bell-shaped) функция, которая в общем случае задается аналитически следующим выражением:

$$f_{\Pi_3}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}}$$

Четвертый вид П-образной функции – это хорошо известная в теории вероятностей функция плотности нормального распределения в предположении, что $\sqrt{2\pi}\sigma = 1$, которая задается аналитически следующим выражением:

$$f_{\Pi_4}(x; \sigma, c) = e^{\frac{-(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$

Параметр σ^2 в теории вероятностей называется *дисперсией* распределения, а параметр c – *математическим ожиданием*.

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Методы построения ФП нечетких множеств различаются по следующим признакам:

1. Предполагаемый вид области определения НМ: числовая (дискретная или непрерывная) или нечисловая.
2. Применяемый способ экспертного опроса: индивидуальный или групповой.
3. Тип используемой экспертной информации: качественная (неметрическая) или количественная (метрическая).
4. Интерпретация данных экспертного опроса: вероятностная или детерминированная.

Наибольшее распространение при построении функций принадлежности нечетких множеств получили *прямые* и *косвенные* методы.

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Как правило, прямые методы построения функций принадлежности используются для таких *свойств, которые могут быть измерены в некоторой количественной шкале*. Например, такие физические величины, как скорость, время, расстояние, давление, температура и другие имеют соответствующие единицы и эталоны для своего измерения.

В прямых методах эксперт либо группа экспертов просто задают для каждого $x \in X$ значение функции принадлежности $\mu_A(x)$. При *прямом* построении функций принадлежности следует учитывать то обстоятельство, что теория нечетких множеств не требует абсолютно точного задания функций принадлежности. Зачастую бывает достаточно зафиксировать лишь наиболее характерные значения и вид (тип) функции принадлежности.

К прямым методам построения ФП относят *частотный* метод, основанный на *вероятностной* интерпретации функции принадлежности ($\mu_A(x)$ интерпретируется как вероятность того, что ЛПР отнесет x к нечеткому множеству A).

Пример. Пусть имеется коллективный ЛПР, состоящий из n экспертов, из них n_1 ($n_1 < n$) экспертов говорят, что x принадлежит нечеткому множеству A . Тогда $\mu_A(x) = n_1/n$.

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

К прямым методам построения ФП относится также метод, основанный на выборе ФП из *стандартного набора* графиков.

Пример. Пусть необходимо построить нечеткое множество, которое представляет свойство «скорость движения автомобиля около 50 км/ч» и нечеткое множество, которое представляет свойство «скорость движения автомобиля находится приблизительно в пределах 50-60 км/ч».

На начальном этапе может оказаться достаточным представить соответствующее нечеткое множество треугольной функцией принадлежности f_{Δ} с параметрами $a = 40$ км/ч, $b = 50$ км/ч и $c = 60$ км/ч. Аналогично, в случае построения нечеткого множества для представления свойства "скорость движения автомобиля находится приблизительно в пределах 50-60 км/ч", на начальном этапе может оказаться достаточным представить соответствующее нечеткое множество трапециевидной функцией принадлежности f_T с параметрами $a = 45$ км/ч, $b = 50$ км/ч, $c = 60$ км/ч и $d = 65$ км/ч.

В последующем функция принадлежности может быть уточнена опытным путем на основе анализа результатов решения конкретных задач.

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Процесс построения или задания нечеткого множества на основе некоторого известного заранее количественного значения измеримого признака получил специальное название – *фаззификация* или приведение к нечеткости.

Речь идет о том, что хотя иногда нам бывает известно некоторое значение измеримой величины, мы признаем тот факт, что это значение известно неточно, возможно с погрешностью или случайной ошибкой. При этом, чем меньше мы уверены в точности измерения признака, тем большим будет интервал носителя соответствующего нечеткого множества.

Следует помнить, что в большинстве практических случаев абсолютная точность измерения является лишь удобной абстракцией для построения математических моделей.

КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Как правило, косвенные методы определения значений функции принадлежности используются в тех случаях, когда *отсутствуют очевидные измеримые свойства* (количественные признаки), которые могут быть использованы для построения нечетких моделей рассматриваемой предметной области, есть только *качественные* признаки.

Среди косвенных методов наиболее известен так называемый *метод попарных сравнений*. Этот метод используется для конечных нечетких множеств и состоит в следующем.

Пусть имеется n экспертов и необходимо найти степени принадлежности k точек. Каждый i -й эксперт должен определить (по своему усмотрению) парные соотношения типа

$$m_{lj} = \begin{cases} 1, & m_l > m_j, \\ 0, & m_l \leq m_j; \end{cases} \quad l, j = \overline{1, k}.$$

Экспертная оценка для i -ого эксперта определяется по формуле:

$$\alpha_{il} = \frac{\sum_{j=1}^k m_{lj}}{\sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^k m_{lj}}.$$

ПРИМЕР

Тогда функция принадлежности для l -го параметра равна

$$\mu_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_{il}, \quad l = \overline{1, k}.$$

Пример. Два эксперта должны определить, насколько три дома соответствуют оценке «пригоден для жилья». Мнение каждого из них основывается на собственных предпочтениях.

Матрицы парных соотношений для 1-го и 2-го эксперта имеют вид:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В матрице M_1 элемент $m_{11}=0$ по формуле (1), т.к. $m_i = m_j$ (дом сравнивается «сам с собой»), $m_{12}=1$, т.е. по мнению 1-го эксперта первый дом более пригоден для жилья, чем второй и т.д. Необходимо отметить, что элементы матрицы m_{lj} и m_{jl} , симметричные относительно главной диагонали, должны быть взаимнообратными, т.е. если один из них равен 0, то второй равен 1.

ПРИМЕР

Вычислим экспертные оценки для 1-го эксперта (в числителе – сумма единиц в строке l , в знаменателе – сумма всех единиц в матрице):

$$\alpha_{11} = \frac{m_{11} + m_{12} + m_{13}}{\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_{lj}} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_{12} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_{13} = \frac{1}{3}.$$

Аналогично, вычислим для 2-го эксперта

$$\alpha_{21} = \frac{m_{11} + m_{12} + m_{13}}{\sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_{lj}} = \frac{0}{3} = 0, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_{23} = \frac{2}{3}.$$

Вычислим функцию принадлежности для 1-го дома:

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{21}) = \frac{1}{6}.$$

Аналогично, вычислим ФП для 2-го и 3-го домов:

$$\mu_2 = \frac{1}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{22}) = \frac{1}{3}, \quad \mu_3 = \frac{1}{2}(\alpha_{13} + \alpha_{23}) = \frac{1}{2}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Собственно *процесс попарного сравнения* элементов может быть основан на субъективной интуиции или на *выполнении некоторой последовательности алгоритмических или логических* действий. При этом отдельные элементы универсума могут использоваться в качестве эталонов или все элементы могут быть разделены на группы с последующим сравнением этих групп между собой.

Из *алгоритмических* процедур наибольшую известность получили методы итеративного уточнения значений ФП, основанные на *нейронных сетях и генетических алгоритмах*.

Логические процедуры используют методы индуктивного обучения и построения нечетких метаправил. Иногда применяются методы *обработки статистических данных, факторного и дискриминантного анализа* с целью выделения значимых признаков для последующего сравнения элементов рассматриваемого универсума.

В заключение следует отметить, что в случае недостатка информации об особенностях функций принадлежности нечетких переменных рекомендуется начинать построение нечеткой модели с использования наиболее простых (типовых) форм ФП, а именно кусочно-линейных функций. В последствии их характер может быть уточнен и учтен на этапе коррекции нечеткой модели.