

**«Математика
полезна тем, что
она трудна».
(А. Д. Александров)**



Предел последовательности



Задание 1.

В числовых последовательностях, где n - натуральное число, найдите первые 10 членов.

$$1) x_n = \frac{1}{n}, \quad 2) y_n = n^2, \quad 3) z_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

$$4) u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad 5) v_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$6) g_n = (-1)^n, \quad 7) f_n = 2$$



Задачи: 1) узнать новое

понятие: **переменная величина.**

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие по некоторому закону число x_n , то говорят, что задана числовая последовательность $\{x_n\}$.

Иногда говорят, что задана «переменная величина x_n , зависящая от натурального числа n » или, короче, «переменная x_n »



Какие величины являются переменными? Запишите их номера.

$$1) x_n = \frac{1}{n}, \quad 2) y_n = n^2, \quad 3) z_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

$$4) u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad 5) v_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$6) g_n = (-1)^n, \quad 7) f_n = 2$$



Ответ: с 1) по 6).

Задачи: 1) узнать новое понятие:
бесконечно малая величина.

Переменную α_n , зависящую от натурального n , называют **бесконечно малой**, если она стремится к нулю при неограниченном возрастании n .

$$(\alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty)$$



Бесконечно малая величина

Задание 2. Из числовых величин, выпишите бесконечно малые.

$$1) x_n = \frac{1}{n}, \quad 2) y_n = n^2, \quad 3) z_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

$$4) u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad 5) v_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$6) g_n = (-1)^n, \quad 7) f_n = 2$$



Ответ: 1), 3), 4).

Задачи: 1) узнать новое понятие:
бесконечно большая величина.

Переменную β_n , зависящую от натурального n , называют **бесконечно большой**, если она стремится к бесконечности при неограниченном возрастании n .

$$(\beta_n \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty)$$



Бесконечно большая величина;

Задание 3. Из числовых величин, выпишите бесконечно большие.

$$1) x_n = \frac{1}{n}, \quad 2) y_n = n^2, \quad 3) z_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

$$4) u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad 5) v_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$6) g_n = (-1)^n, \quad 7) f_n = 2$$



Ответ: 2).

Предел последовательности.

Пусть задана переменная x_n .

Если x_n можно записать в виде суммы

$$x_n = a + \alpha_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где a – некоторое число и α_n – бесконечно малая, то говорят, что x_n имеет своим **пределом число a**

Или что x_n стремится к числу **a** .

Пишут $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, (x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow +\infty)$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \quad a - \text{некоторое число}$$

Если α_n - бесконечно малая величина, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$$

Если $\alpha_n = 0$ для любого натурального n ,

α_n бесконечно малая величина




Примеры

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0,$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$


$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} a = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a + \alpha_n) = a (\alpha_n = 0)$$