Тема 3. Модели рационального спектра

Модели рационального спектра – метод параметрического описания данных.

Параметрическая модель ФВР основана на понятии формирующего фильтра.

На входе фильтра – формирующее воздействие $u(n)$, т.е. ВР со стандартными статистиками :

$$E\{u(n)\}=0\,;\,E\left\{u^2(n)\right\}=\sigma_u^2\,;\,\rho_u(m)=\begin{cases}1\,,\,m=0\\0\,,\,m\neq 0\end{cases};$$

Формирующее воздействие – белый шум (БШ) :

$$\rho_u(m)\overset{ДПФ}{\Leftrightarrow}P_u(k)=\begin{cases}1\,,\,k\geq 0\\0\,,\,k<0\end{cases}$$

На выходе фильтра – уникальный ВР $x(n)$ с заданными статистиками :

$$E\{x(n)\}=0\,;\,E\left\{x^2(n)\right\}=\sigma_x^2\,;\,\rho_x(m)\overset{ДПФ}{\Leftrightarrow}P_x(k)$$

Фильтр формирует заданные корреляционно-спектральные свойства ВР $x(n)$

Модели формирующего фильтра (ФФ) : 1) уравнение дискретной свертки;

2) линейное разностное уравнение; 3) операторная форма.

Описание ФФ с помощью уравнения дискретной свертки

$$x(n)=\sum_{k=0}^{+\infty} h(k)u(n-k);\ h(n)\equiv 0\ ,\ n<0$$ - физически реализуемый БИХ - фильтр

Описание ФФ с помощью линейного разностного уравнения порядка (*p* , *q*)

$$x(n)=\left(\sum_{k=1}^{p} a(k)x(n-k)\right)+\left(u(n)-\sum_{k=1}^{q} b(k)u(n-k)\right)$$

БИХ часть – АР(p) КИХ часть – СС(q)

АРСС (p, q) / ARMA (p, q)

Авторегрессия – скользящее среднее порядка (p, q)

Параметры АРСС – модели :

1) порядок p и коэффициенты $a(1), a(2), \ldots , a(p)$ авторегрессии ;

2) порядок q и коэффициенты $b(1), b(2), \ldots , b(q)$ скользящего среднего.

Задача идентификации АРСС модели – по заданным статистикам ВР $x(n)$ оценить порядок (p, q) модели и ее коэффициенты

Операторная форма описания ФФ

Оператор запаздывания на k шагов времени :

$$x(n-k)=z^{-k}\{x(n)\}\,;\,u(n-k)=z^{-k}\{u(n)\}$$

Линейное разностное уравнение в терминах оператора запаздывания :

$$1\{x(n)\}=\sum_{k=1}^{p}a(k)z^{-k}\{x(n)\}+1\{u(n)\}-\sum_{k=1}^{q}b(k)z^{-k}\{u(n)\}$$

Свойство линейности оператора запаздывания :

$$1\{x(n)\}=\left(\sum_{k=1}^{p}a(k)z^{-k}\right)\{x(n)\}+1\{u(n)\}-\left(\sum_{k=1}^{q}b(k)z^{-k}\right)\{u(n)\}$$

Операторная форма АРСС модели : $A_p\left(z^{-1}\right)\{x(n)\}=B_q\left(z^{-1}\right)\{u(n)\}$

Полиномы авторегрессии и скользящего среднего степеней p и q :

$$A_p\left(z^{-1}\right)=1-\sum_{k=1}^{p}a(k)z^{-k}\;;\;B_q\left(z^{-1}\right)=1-\sum_{k=1}^{q}b(k)z^{-k}$$

z – комплексная переменная $\Rightarrow A_p\left(z^{-1}\right);B_q\left(z^{-1}\right)$ - ДПЛ последовательностей

$$a(1),\ldots,a(p)\text{ и }b(1),\ldots,b(q)$$

Системная функция ФФ в комплексной области

$$H\left(z^{-1}\right)=\frac{L\{x(n)\}}{L\{u(n)\}}=\frac{B_q\left(z^{-1}\right)}{A_p\left(z^{-1}\right)}=\sum_{k=0}^{+\infty}h(k)z^{-k}$$ - ДПЛ импульсной характеристики ФФ

$$z(m)=\exp\left(j2\pi m/K\right)$$ - m-е дискретное значение комплексной переменной на единичной окружности

Передаточная функция ФФ в частотной области – ДПФ ИХ

$$H(m)=H\left(z^{-1}\right)\Big|_{z=z(m)}=\frac{B_q(m)}{A_p(m)}=\sum_{k=0}^{+\infty}h(k)\exp\left(-j2\pi\frac{k\,m}{K}\right)$$

ДПФ полиномов авторегрессии и скользящего среднего

$$A_p(m)=A_p\left(z^{-1}\right)\Big|_{z=z(m)}=1-\sum_{k=1}^{p}a(k)\exp\left(-j2\pi\frac{k\,m}{K}\right)$$

$$0\le m\le K-1$$

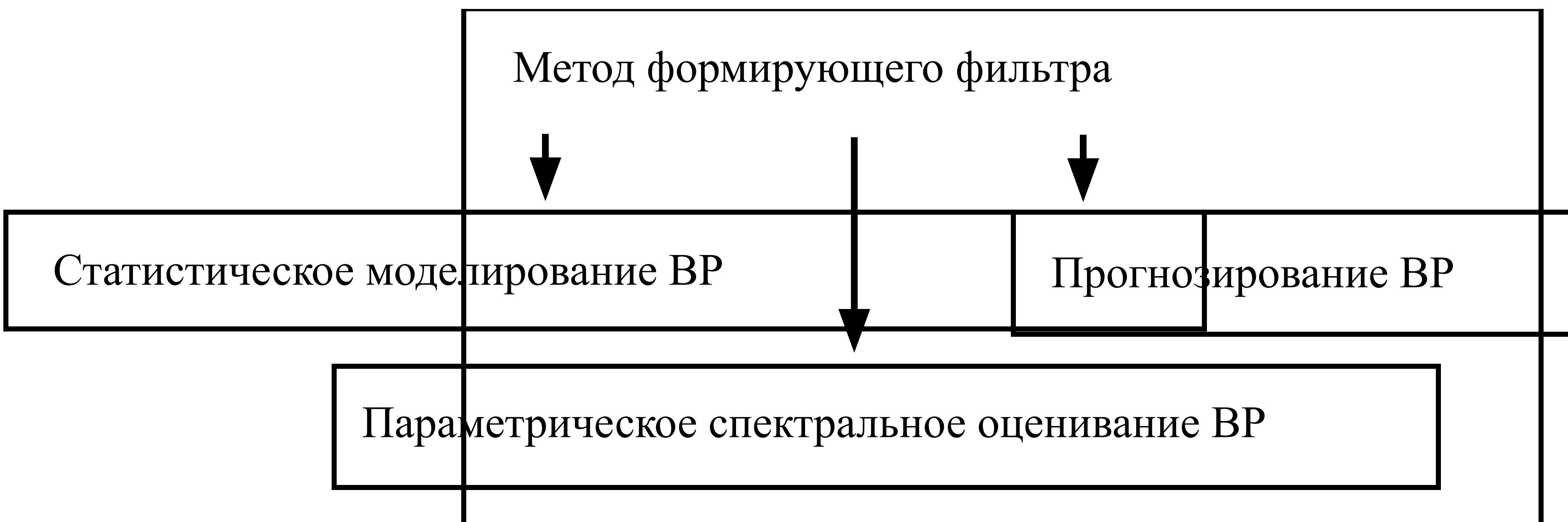
$$B_q(m)=B_q\left(z^{-1}\right)\Big|_{z=z(m)}=1-\sum_{k=1}^{q}b(k)\exp\left(-j2\pi\frac{k\,m}{K}\right)$$

СПМ временного ряда на выходе ФФ

$$P_x(m)=\sigma_u^2\Delta t\, P_u(m)\left|B_q(m)/A_p(m)\right|^2;\ 0\le m\le K-1$$

Энергетический спектр ВР на выходе ФФ – дробно – рациональная функция :

$$P_x(m)=\sigma_u^2\Delta t\left|\frac{1-\sum\limits_{k=1}^{q}b(k)\exp(-j2\pi k\,m/K)}{1-\sum\limits_{k=1}^{p}a(k)\exp(-j2\pi k\,m/K)}\right|^2$$



Коэффициент корреляции временного ряда на выходе ФФ

$$\rho_x(m) = \begin{cases} \rho_x^{(AR)}(m) + \rho_x^{(MA)}(m), \ 0 < m \le q \\ \rho_x^{(AR)}(m) \qquad\qquad\qquad\qquad , m > q \end{cases}$$

$$\rho_x^{(AR)}(m) = \sum_{k=1}^{p} a(k)\rho_x(m-k), \ m > 0$$ - линейная часть

$$\rho_x^{(MA)}(m) = \frac{\sum_{k=1}^{q-m} b(k)b(k+m) - b(m)}{1 + \sum_{k=1}^{q} b^2(k)}, \ 0 < m \le q$$

- нелинейная часть

Типы моделей рационального спектра

1. Модели авторегрессии : $q = 0$ => ARMA(p,0) => AR(p) , $p = 1,2$;

2. Модели скользящего среднего : $p = 0$ => ARMA(0,q) => MA(q) , $q = 1,2$;

3. Смешанные модели : ARMA(p,q) => p , $q = 1,2$.

Авторегрессионные модели временного ряда

Теорема декомпозиции Уолда – любую АРСС- модель или СС- модель можно аппроксимировать АР- моделью более высокого порядка.

$$\rho_x(m)=\sum_{k=1}^{p} a(k)\rho_x(m-k),\ m=1,2,\ldots,p$$

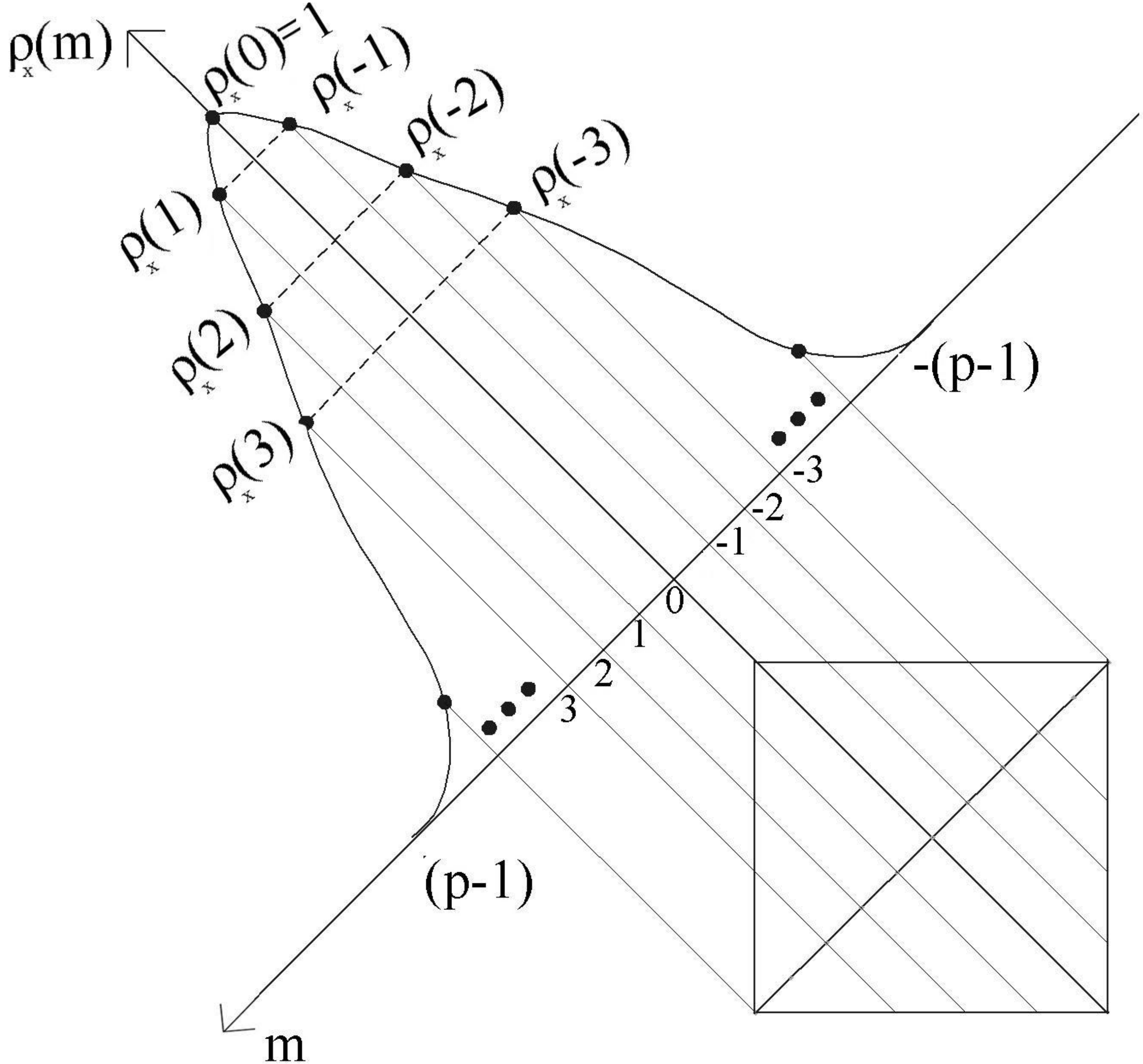
Система линейных нормальных уравнений Юла – Уолкера :

$$\begin{cases} a(1)\rho_x(0)+a(2)\rho_x(-1)+\ldots+a(p)\rho_x(-(p-1))=\rho_x(1) \\ a(1)\rho_x(1)+a(2)\rho_x(0)+\ldots+a(p)\rho_x(-(p-2))=\rho_x(2) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a(1)\rho_x(p-1)+a(2)\rho_x(p-2)+\ldots+a(p)\rho_x(0)=\rho_x(p) \end{cases}$$

Матричная форма системы уравнений Юла – Уолкера : $R_p\vec{a}_p=\vec{\rho}_p$

$\vec{a}_p=(a(1),a(2),\ldots,a(p))^T$ - вектор-столбец АР- параметров

$\vec{\rho}_p=(\rho_x(1),\rho_x(2),\ldots,\rho_x(p))^T$ - корреляционный вектор-столбец



ρx(m)
ρx(0)=1
ρx(-1)
ρx(-2)
ρx(-3)
ρx(1)
ρx(2)
ρx(3)
-(p-1)
-3
-2
-1
0
1
2
3
(p-1)
m

Теплицева автокорреляционная матрица

$$R_p = \begin{pmatrix} \rho_x(0) & \rho_x(-1) & \cdots & \rho_x(-(p-1)) \\ \rho_x(1) & \rho_x(0) & \cdots & \rho_x(-(p-2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_x(p-1) & \rho_x(p-2) & \cdots & \rho_x(0) \end{pmatrix}$$

Алгоритм Левинсона – Дурбина (ЛД)

***Шаг* 0 :** Инициализация. Тестировать АР(1) - модель.

$$p = 1;\, a_1(1) = \rho_x(1);\, \sigma_1^2 = 1 - a_1^2(1)$$

***Шаг* 1 :** Тестировать АР – модель текущего порядка. $p = p + 1$.

$$a_p(p) = \left(\rho_x(p) - \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1}(k)\rho_x(p-k)\right) \Big/ \sigma_{p-1}^2$$

***Шаг* 2 :** Рекурсия Левинсона.

$$a_p(k) = a_{p-1}(k) - a_p(p)\, a_{p-1}(p-k);\, k = \overline{1;(p-1)}$$

***Шаг* 3 :** Вычислить дисперсию ошибки линейного прогноза.

$$\left|a_p(p)\right| \le 1; \sigma_p^2 = \left(1 - a_p^2(p)\right)\sigma_{p-1}^2$$

***Шаг* 4 :** Критерии продолжения рекурсии. Если

$$\left|a_p(p)\right| > \varepsilon_1; \left|\sigma_p^2 - \sigma_{p-1}^2\right| > \varepsilon_2$$

то идти к Шагу 1. В противном случае закончить вычисления.

Свойства алгоритма Левинсона - Дурбина

1. Объем вычислений : алгоритм исключения Гаусса ~ p^3; алгоритм ЛД ~ p^2

2. Алгоритм рекурсивный по порядку авторегрессии p :

$$\left\langle a_1(1); \sigma_1^2 \right\rangle \blacktriangleright \left\langle a_2(1); a_2(2); \sigma_2^2 \right\rangle \blacktriangleright \left\langle a_3(1); a_3(2); a_3(3); \sigma_3^2 \right\rangle$$

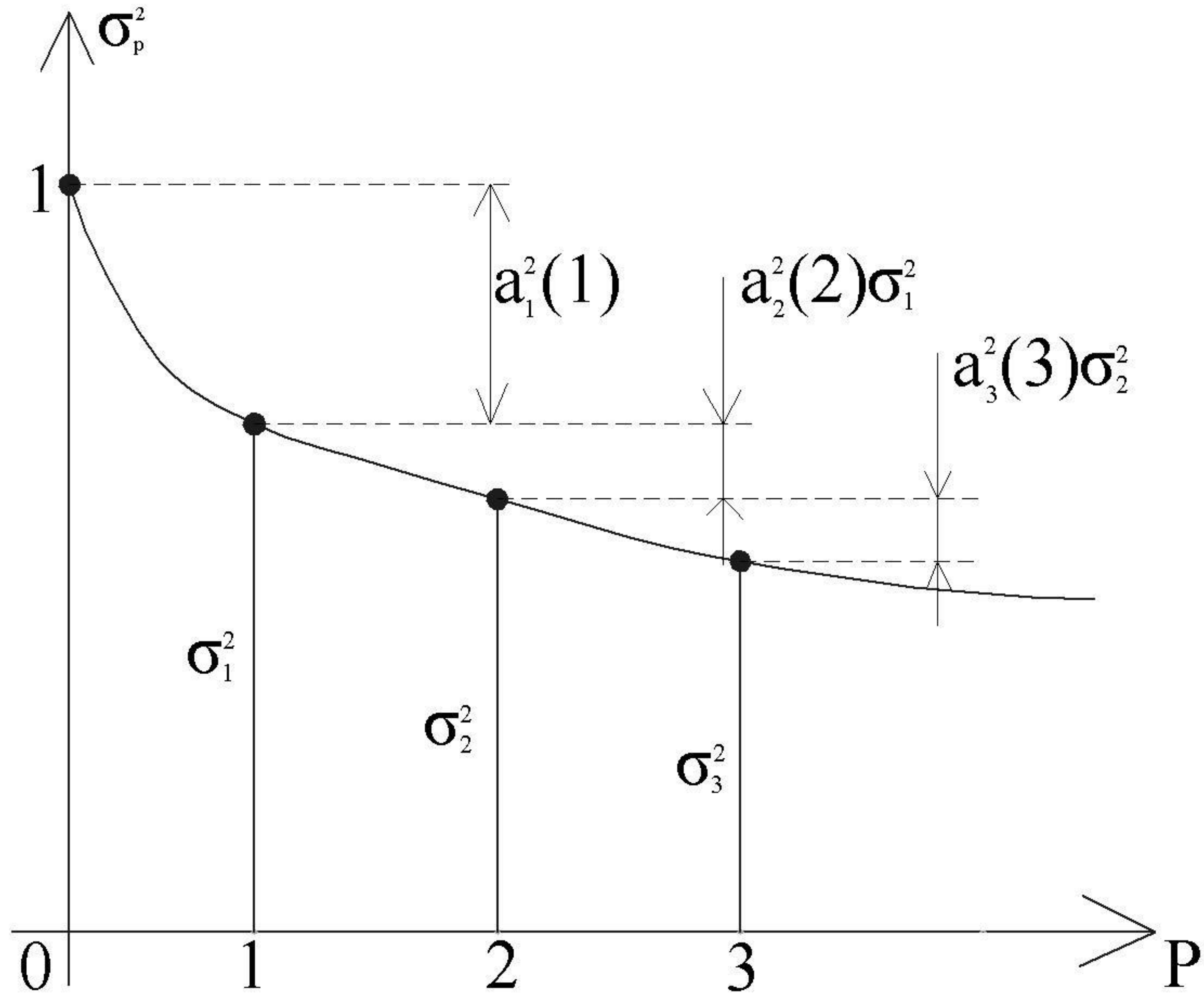
3. Критерий правильного выбора порядка авторегрессии p :

$$\left|\sigma_p^2 - \sigma_{p-1}^2\right| > \varepsilon_2$$

4. Применение <u>смещенной оценки</u> автокорреляционной матрицы R_p :

$$\rho_n(m) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} v(n-k)v(n-m-k)$$

обеспечивает ее положительную полуопределенность.



σ_p^2
1
$a_1^2(1)$
$a_2^2(2)\sigma_1^2$
$a_3^2(3)\sigma_2^2$
σ_1^2
σ_2^2
σ_3^2
0
1
2
3
P

5. Необходимое и достаточное условие положительной полуопределенности автокорреляционной матрицы R_p:

$$\left| a_p(p) \right| \le 1,\ p = 1, 2, \ldots;\ K_p = a_p(p)$$ - коэффициенты отражения

6. Нули полинома авторегрессии лежат внутри единичной окружности плоскости комплексной переменной z:

$$A_p\left(z^{-1}\right) = \prod_{k=1}^{p}\left(z^{-1} - g_k\right);\ \left| g_k \right| < 1$$

В этом случае ФФ $1/A_p(m)$ устойчивый, а процесс АР(p) – стационарный.

Основные понятия теории линейного прогноза

Цифровые фильтры линейного прогноза (ЛП) :

$$\hat{v}_p^f(n+p) = \sum_{k=1}^{p} a_p^f(k) v(n+p-k)$$ - «вперед» (forward) ;

$$\hat{v}_p^b(n) = \sum_{k=1}^{p} a_p^b(k) v(n+k)$$ - «назад» (backward) ;

$n = 1, 2, \ldots, (N-p)$ - окно обучения фильтров.

Коэффициенты фильтров совпадают для вещественных ВР :

$$a_p^f(k) = a_p^b(k) = a_p(k) \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

Коэффициенты фильтров оценивают методом наименьших квадратов, т. е. оптимизируют по критерию минимума дисперсии ошибок ЛП:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{2(N-p)} \sum_{n=1}^{N-p} \left(\left(e_p^f(n)\right)^2 + \left(e_p^b(n)\right)^2 \right)$$

Ошибки ЛП :

$$e_p^f(n) = v(n+p) - \hat{v}_p^f(n+p) =$$

$$= v(n+p) - \sum_{k=1}^{p} a_p(k) v(n+p-k)$$

- фильтр ошибки ЛП в «прямом» направлении;

$$e_p^b(n) = v(n) - \hat{v}_p^b(n) = v(n) - \sum_{k=1}^{p} a_p(k) v(n+k)$$

- фильтр ошибки ЛП в «обратном» направлении.

$A_p(m)$- передаточная функция ЦФ ошибки ЛП в «прямом» направлении.

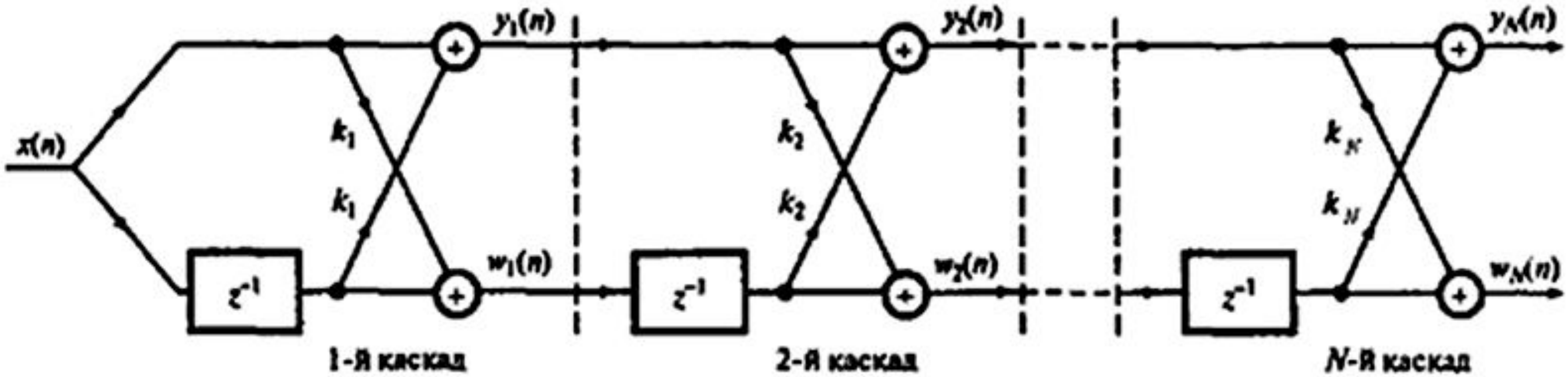
Фильтр инверсный по отношению к ФФ $1/A_p(m)$

Рекурсия Левинсона для ошибок ЛП в «прямом» и «обратном» направлениях :

$$e_p^f(n) = e_{p-1}^f(n) - K_p\, e_{p-1}^b(n-1);\; e_0^f(n) = v(n)$$

$$e_p^b(n) = e_{p-1}^b(n-1) - K_p\, e_{p-1}^f(n);\; e_0^b(n) = v(n)$$

Решетчатый фильтр (структура)



Свойства решетчатого фильтра :

1. Инверсный по сравнению с ФФ, так называемый обеляющий фильтр.

2. Устойчив к ошибкам вычислений и квантования по сравнению с ФФ.

3. Ошибки ЛП для текущего порядка ортогональны : $E\left(e_p^f(n)\, e_p^b(n)\right) = 0$

Частный коэффициент корреляции ВР – нормированная корреляция между $v(n-p)$ и $v(n)$ за вычетом доли корреляции, вызванной влиянием промежуточных отсчетов ряда $v(n-p+1),\dots,v(n-1)$.

Статистический смысл коэффициента отражения $K_p = a_p(p)$ - частный коэффициент корреляции ВР. Альтернативное определение коэффициента отражения в терминах ошибок ЛП : $K_p = \sqrt{r_p^f(1) r_p^b(1)}$.

$$r_p^f(1) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} e_{p-1}^f(n-k) e_{p-1}^b(n-k-1)}{\sum_{k=0}^{K-1} \left(e_{p-1}^f(n-k)\right)^2}$$

- частный коэффициент корреляции ошибки ЛП «вперед».

$$r_p^b(1) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} e_{p-1}^f(n-k) e_{p-1}^b(n-k-1)}{\sum_{k=0}^{K-1} \left(e_{p-1}^b(n-k-1)\right)^2}$$

- частный коэффициент корреляции ошибки ЛП «назад».

Геометрический алгоритм Берга

***Шаг* 0 :** Инициализация. Вычислить начальные значения ошибок ЛП

$$p=0\,;\, e_0^f(n)=e_0^b(n)=v(n)\,;\, \sigma_0^2=1$$

***Шаг* 1 :** Тестировать АР – модель текущего порядка. $p=p+1$. Вычислить выборочные оценки частных коэффициентов корреляции для ошибок ЛП «вперед» $r_p^f(1)$ и «назад» $r_p^b(1)$.

Вычислить выборочную оценку коэффициента отражения

$$a_p(p)=K_p=\sqrt{r_p^f(1)r_p^b(1)}$$

***Шаг* 2 :** Рекурсия Левинсона. Вычислить ошибку ЛП для АР- модели текущего порядка

$$e_p^f(n)=e_{p-1}^f(n)-K_p\,e_{p-1}^b(n-1)$$

$$e_p^b(n)=e_{p-1}^b(n-1)-K_p\,e_{p-1}^f(n)$$

Если $p>1$, то вычислить младшие коэффициенты авторегрессии

$$a_p(k)=a_{p-1}(k)-K_p(p-k)\,;\,k=\overline{1\,;\,(p-1)}$$

***Шаг* 3 :** Вычислить дисперсию ошибки линейного прогноза

$$\sigma_p^2 = \left(1 - a_p^2(p)\right)\sigma_{p-1}^2$$

***Шаг* 4 :** Критерии продолжения рекурсии. Если

$$\left| K_p \right| > \varepsilon_1 ; \left| \sigma_p^2 - \sigma_{p-1}^2 \right| > \varepsilon_2$$

то идти к Шагу 1. В противном случае закончить вычисления.

СС(q) - модели временного ряда

$$v(n) = u(n) - \sum_{k=1}^{q} b(k)u(n-k);$$

Нерекурсивный ЦФ

$$u(n) \longrightarrow \boxed{B_q\left(z^{-1}\right)} \xrightarrow{v(n)}$$

Способы оценки СС- параметров :

1. Решение <u>системы нелинейных уравнений</u>

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{q-1} b(k)b(k+1) - b(1)\right) \Big/ D_q = \rho_v^{(MA)}(1) \\ \left(\sum_{k=1}^{q-2} b(k)b(k+2) - b(2)\right) \Big/ D_q = \rho_v^{(MA)}(2) \\ \vdots \\ (b(1)b(q) - b(q-1)) \big/ D_q = \rho_v^{(MA)}(q-1) \\ -b(q) \big/ D_q = \rho_v^{(MA)}(q) \end{cases}$$

$$D_q = 1 + b^2(1) + b^2(2) + \cdots + b^2(q); \sigma_u^2 = \rho_v^{(MA)}(0) \Big/ D_q$$

***Шаг* 0 :** Инициализация. $i = 1$. Вычислить начальные значения СС- параметров

$$b^{(0)}(k) = 0\,;\, k = 1, 2, \ldots, q$$

***Шаг* 1 :** Вычислить дисперсию БШ

$$D_q = 1 + \sum_{k=1}^{q} \left\{ b^{(i-1)}(k) \right\}^2 \,;\, \sigma_u^2 = \rho_v^{(MA)}(0) \big/ D_q$$

***Шаг* 2 :** $m = q$. Вычислить старший СС- параметр

$$b^{(i)}(q) = -D_q\, \rho_v^{(MA)}(q)$$

***Шаг* 3 :** $m = m - 1$. Вычислить младший СС- параметр

$$b^{(i)}(m) = \sum_{k=1}^{q-m} b^{(i-1)}(k)\, b^{(i)}(k+m) - D_q\, \rho_v^{(MA)}(m)$$

***Шаг* 4 :** Цикл по младшим СС- параметрам. Если $m > 1$, то идти к ***Шагу* 3**.

***Шаг* 5 :** Критерии продолжения вычислений. Если $m = 1$ и хотя бы один из СС- параметров удовлетворяет неравенству

$$\left| b^{(i)}(k) - b^{(i-1)}(k) \right| > \varepsilon\,;\, k = 1, 2, \ldots, q\,,$$

то $i = i + 1$. Идти к ***Шагу* 1**. В противном случае закончить вычисления.

2. Аппроксимация СС- процесса <u>эквивалентной АР- моделью высокого порядка</u>

$$B_q\left(z^{-1}\right)=1+\sum_{k=1}^{q}\widetilde{b}(k)z^{-k}\ ;\ A_\infty\left(z^{-1}\right)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{a}(k)z^{-k}$$

$$\widetilde{a}(k)=-a(k);\widetilde{b}(k)=-b(k);B_q\left(z^{-1}\right)=1/A_\infty\left(z^{-1}\right)$$

$$B_q\left(z^{-1}\right)A_\infty\left(z^{-1}\right)=1\overset{ДПЛ}{\Leftrightarrow}\widetilde{a}(n)+\sum_{k=1}^{q}\widetilde{b}(k)\widetilde{a}(n-k)=\begin{cases}1\ ,n=0\\0\ ,n\neq 0\end{cases}$$

Фильтр ошибки ЛП «вперед» :

$$e_q^{(MA)}(n)=\widetilde{a}_K(n)+\sum_{k=1}^{q}\widetilde{b}_q(k)\widetilde{a}_K(n-k);q<<K$$

для данных :

$$\widetilde{a}_K(0)=1,\widetilde{a}_K(n),n=1,2,\ldots,(q+K)$$

Вектор-столбец СС- параметров :

$$\vec{b}_q=\left(\widetilde{b}_q(1),\widetilde{b}_q(2),\ldots,\widetilde{b}_q(q)\right)^T=Arg\min_{\vec{b}_q}\left(\sum_n\left\{e_q^{(MA)}(n)\right\}^2\right)$$

Система линейных нормальных уравнений : $R_q\,\vec{b}_q=-\vec{\rho}_q$

$\vec{\rho}_q = \left(\rho_v(1,0), \rho_v(2,0), \ldots, \rho_v(q,0)\right)^T$ - корреляционный вектор

$R_q = \left\{\rho_v(m,k)\right\}\Big|_{\substack{k=\overline{1;q}\\ m=\overline{1;q}}}$ - корреляционная матрица

<u>Автокорреляционная оценка</u> СС- параметров (алгоритм Юла - Уолкера) :

$$\rho_v(m,k) = \rho_v(m-k) = \sum_{i=1}^{q+K} \tilde{a}_K(i-m)\tilde{a}_K(i-k)$$

Свойства оценки :

1. Корреляционная матрица теплицева – рационально применять алгоритм ЛД.
2. Смещенная оценка автокорреляции – ФФ устойчивый (минимально-фазовый).
3. Требует достаточно большого порядка $(q+K)$ модели авторегрессии.

<u>Ковариационная оценка</u> СС- параметров :

$$\rho_v(m,k) = \sum_{i=q+1}^{K} \tilde{a}_K(i-m)\tilde{a}_K(i-k)$$

Свойства оценки :

1. Корреляционная матрица является произведением теплицевых матриц.
2. Корреляционная матрица невырожденная если $q \le K/2$.

Дисперсия ошибки ЛП : $\sigma_u^2 = \rho_v(0,0) + \sum_{k=1}^{q} \widetilde{b}_q(k)\rho_v(0,k)$

3. Оценка СС- параметров <u>методом спектральной факторизации</u>

Факторизация <u>во временной области</u> : $\widetilde{b}(k) = -b(k); \widetilde{b}(0) = 1;$

$$\rho_r^{(MA)}(m) = \begin{cases} \sigma_u^2 \sum_{k=m}^{q} \widetilde{b}(k)\widetilde{b}(k-m), 0 < m \le q \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad , m > q \end{cases}$$

Факторизация <u>в частотной области</u> : $P_r^{(MA)}(m) = \sigma_u^2 \Delta t \left| B_q(m) \right|^2$

$$B_q(m) = \sum_{k=0}^{q} \widetilde{b}(k) z^{-k}(m); z(m) = e^{j2\pi m/K} \; ; 0 \le m \le K-1$$

Факторизация <u>в области комплексной переменной</u> (в терминах ДПЛ) :

$$P_r^{(MA)}\left(z^{-1}\right) = \sum_{m=-q}^{q} \rho_r^{(MA)}(m) z^{-m} = \sum_{m=0}^{q} \widetilde{b}(m) z^{-m} \sum_{k=0}^{q} \widetilde{b}(k) z^{k}$$

Основная теорема алгебры : Если конечный степенной ряд $P_r^{(MA)}\left(z^{-1}\right)$ имеет симметричные коэффициенты $\rho_r^{(MA)}(-m)=\rho_r^{(MA)}(m)$, то его нули c_k образуют взаимно обратные пары, т. е. ряд можно представить в виде

$$P_r^{(MA)}\left(z^{-1}\right)=\tilde{b}^{\,2}(q)\prod_{k=1}^{q}\left(z^{-1}-c_k^{-1}\right)\left(z-c_k^{-1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$B_q\left(z^{-1}\right)=\sum_{k=0}^{q}\tilde{b}(k)z^{-k}=\tilde{b}(q)\prod_{k=1}^{q}\left(z^{-1}-c_k^{-1}\right)$$

Взаимосвязь между коэффициентами $\tilde{b}(k)$ и корнями c_k^{-1} полинома СС устанавливают симметрические функции :

$$V_k=\sum_{m_1=1}^{q-k+1}\sum_{m_2=m_1+1}^{q-k+2}\cdots\sum_{m_k=m_{k-1}+1}^{q}c_{m_1}^{-1}c_{m_2}^{-1}\cdot\cdots\cdot c_{m_k}^{-1}$$

$$\tilde{b}(q)=(-1)^q\prod_{k=1}^{q}c_k\ ;\tilde{b}(q-k)=(-1)^k\tilde{b}(q)\,V_k\ ;k=\overline{1;(q-1)}$$

4. Оценка СС- параметров <u>методом гомоморфного преобразования</u>

Шаг **1 :** Вычислить энергетический спектр СС- процесса

$$P_r^{(MA)}(k) = 2\Delta t \sum_{m=0}^{K-1} \rho_r^{(MA)}(m) \cos\left(2\pi \frac{m k}{K}\right); 0 \le k \le K-1$$

Шаг **2 :** Вычислить кепстры СС- процесса и его коэффициентов

$$\hat{\rho}_r^{(MA)}(m) = \frac{2}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \ln\left(P_r^{(MA)}(k)\right) \cos\left(2\pi \frac{m k}{K}\right);$$

$$\hat{b}(m) = \hat{\rho}_r^{(MA)}(m) \big/ 2\,; 0 \le m \le K-1$$

Шаг **3 :** Вычислить передаточную функция ФФ для СС- процесса

$$\hat{B}(k) = 2\Delta t \sum_{m=0}^{K-1} \hat{b}(m) \cos\left(2\pi \frac{m k}{K}\right); B_q(k) = \exp\left(\hat{B}(k)\right)$$

Шаг **4 :** Вычислить коэффициенты СС- процесса

$$\tilde{b}(m) = \frac{2}{K} \sum_{k=0}^{K-1} B_q(k) \cos\left(2\pi \frac{m k}{K}\right); 0 < m \le q$$

АРСС(p, q) - модели временного ряда

Субоптимальные оценки АРСС- параметров

Раздельное оценивание АР- и СС- параметров

Одновременное оценивание АР- и СС- параметров

Раздельное оценивание АР- и СС- параметров :

1. оценивание АР- параметров модифицированным МНК Юла – Уолкера ;
2. формирование остаточного ВР с помощью нерекурсивного фильтра ;
3. оценивание СС- параметров по остаточному ВР.

Модифицированный МНК Юла – Уолкера

Ошибка оценивания АР- параметров :

$$\varepsilon_p(m) = \hat{\rho}_r(m) - \sum_{k=1}^{p} a(k)\,\hat{\rho}_r(m-k),\ q+1 \le m \le M$$

$\hat{\rho}_r(m)$ - несмещенная оценка АКФ ; $p << M$ – переопределенная СЛНУ

$$\vec{a}_p = (a(1), a(2), \ldots, a(p))^T = Arg\min_{\vec{a}_p}\left(\sum_{m=q+1}^{M}\{\varepsilon_p(m)\}^2\right)$$

Остаточный ВР – модель СС(q)

Нерекурсивный ЦФ : $r(n) \longrightarrow A_p\left(z^{-1}\right) \longrightarrow s(n)$

$$s(n) = r(n) - \sum_{k=1}^{p} a(k) r(n-k) = u(n) - \sum_{k=1}^{q} b(k) u(n-k)$$

АКФ остаточного ВР :

$$\rho_s(m) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{p} \sum_{i=0}^{p} a(k) a(i) \hat{\rho}_r(m+i-k), & |m| \le q \\ 0, & |m| > q \end{cases}$$