Лекция 6. «Свободные затухающие и вынужденные колебания»

- Свободные затухающие колебания
- Декремент и логарифмический декремент колебаний
- Установившиеся и вынужденные колебания
- Механический резонанс

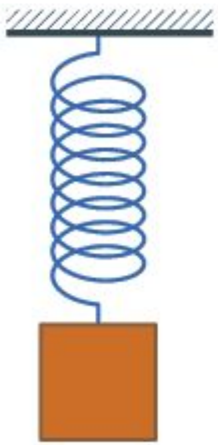
Знание законов заключается не в том, чтобы помнить их слова, а том, чтобы постигать их смысл.

Цицерон

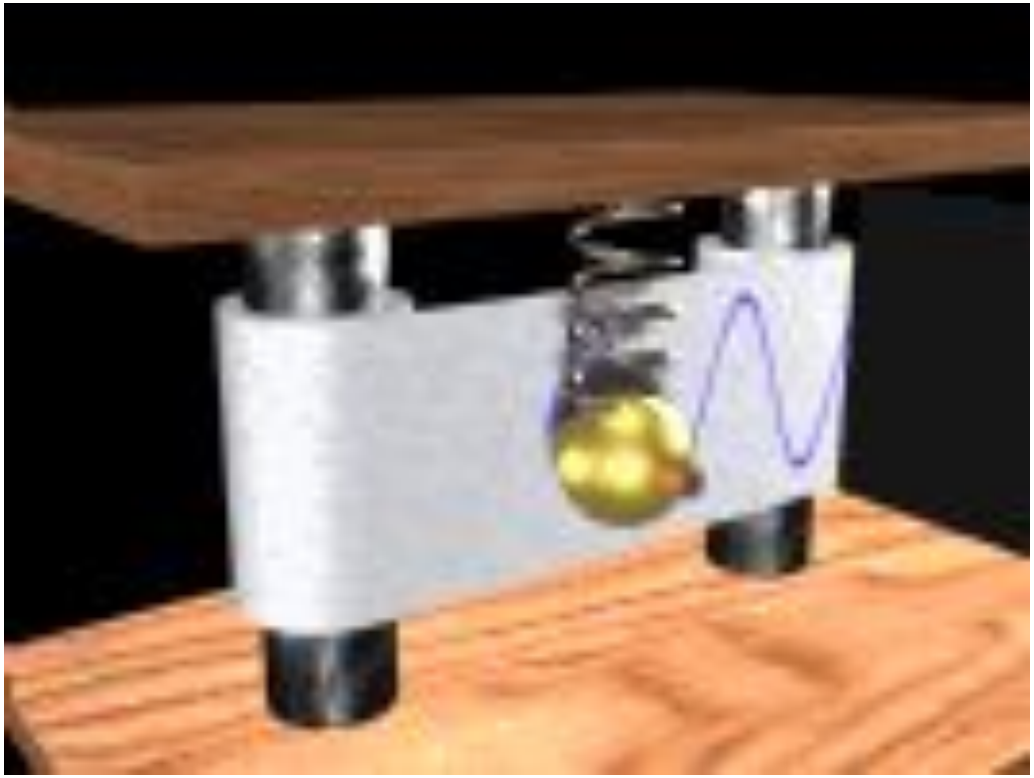
Все подобно всему в каком-нибудь отношении.

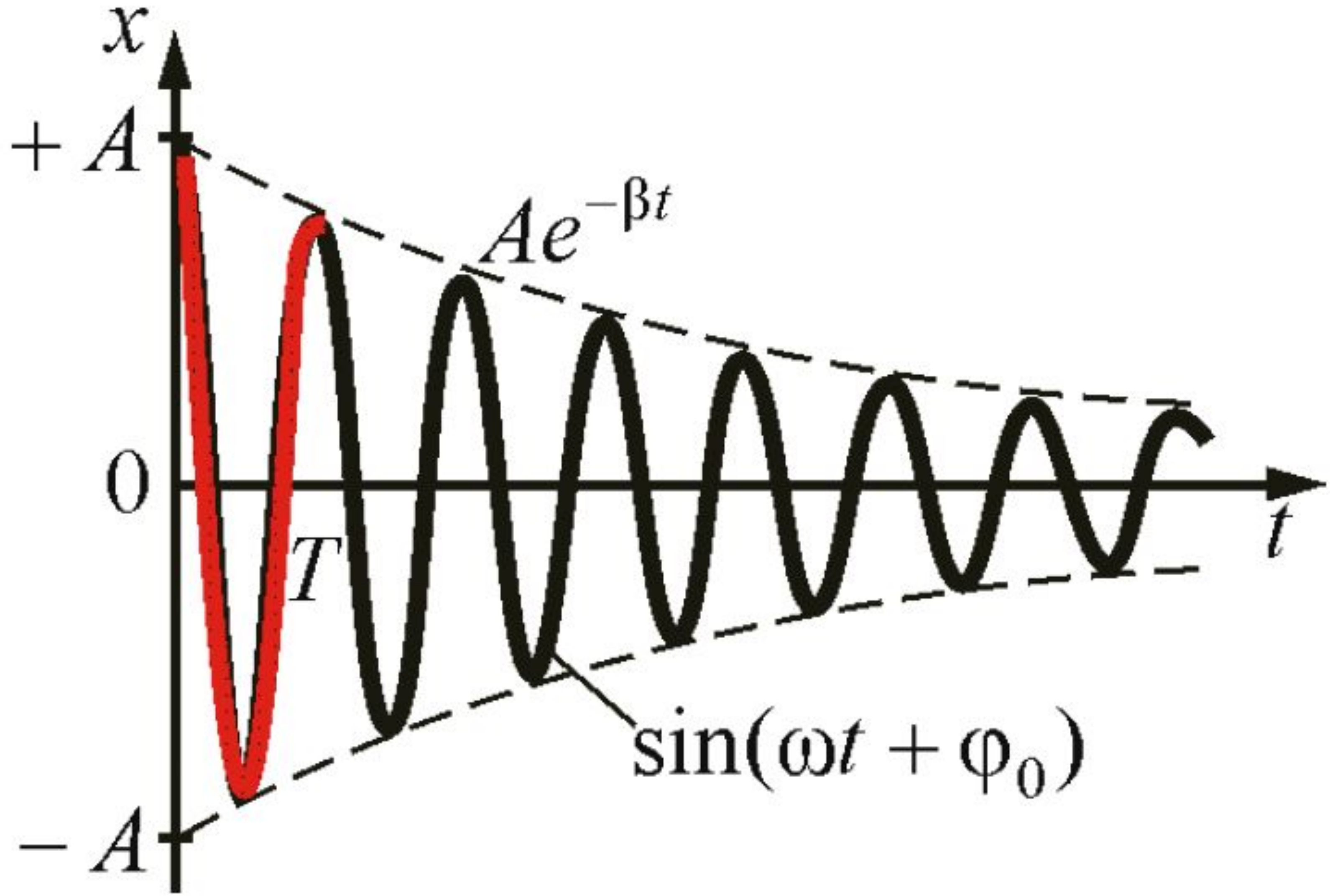
Протагор

Свободные затухающие колебания



Анимация




x
+ A
$Ae^{-\beta t}$
0
T
t
$\sin(\omega t + \varphi_0)$
− A

Затухающие колебания

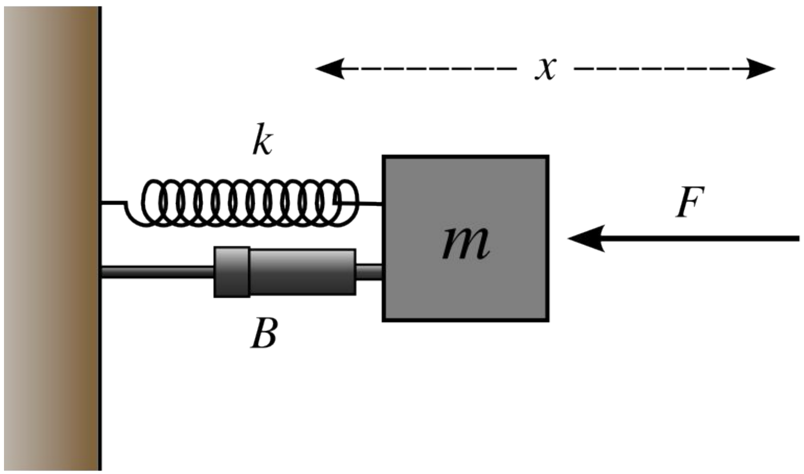
Затухание колебаний – постепенное ослабление колебаний с течением времен обусловленное потерей энергии колебательной системой.

Свободные колебания реальной системы всегда затухают. Причиной затухания

механических колебаний является трение,

электрических колебаний – тепловые потери проводниках.

Свободные затухающие колебания



$$ma_x = -kx - r\upsilon_x$$

kx – возвращающая сила,
$r\upsilon_x$ – сила трения.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

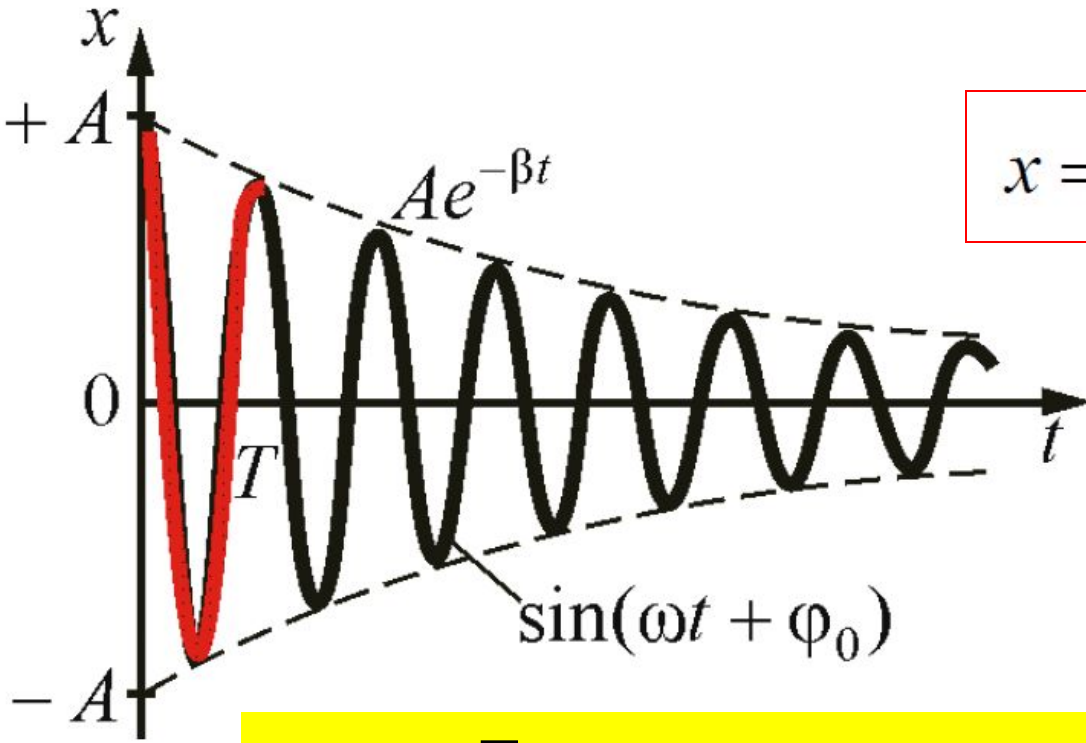
Обозначим:

$$\boxed{\frac{r}{2m} = \beta; \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2.}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.}$$

(при $\beta \le \omega_0$)

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi_0)$$

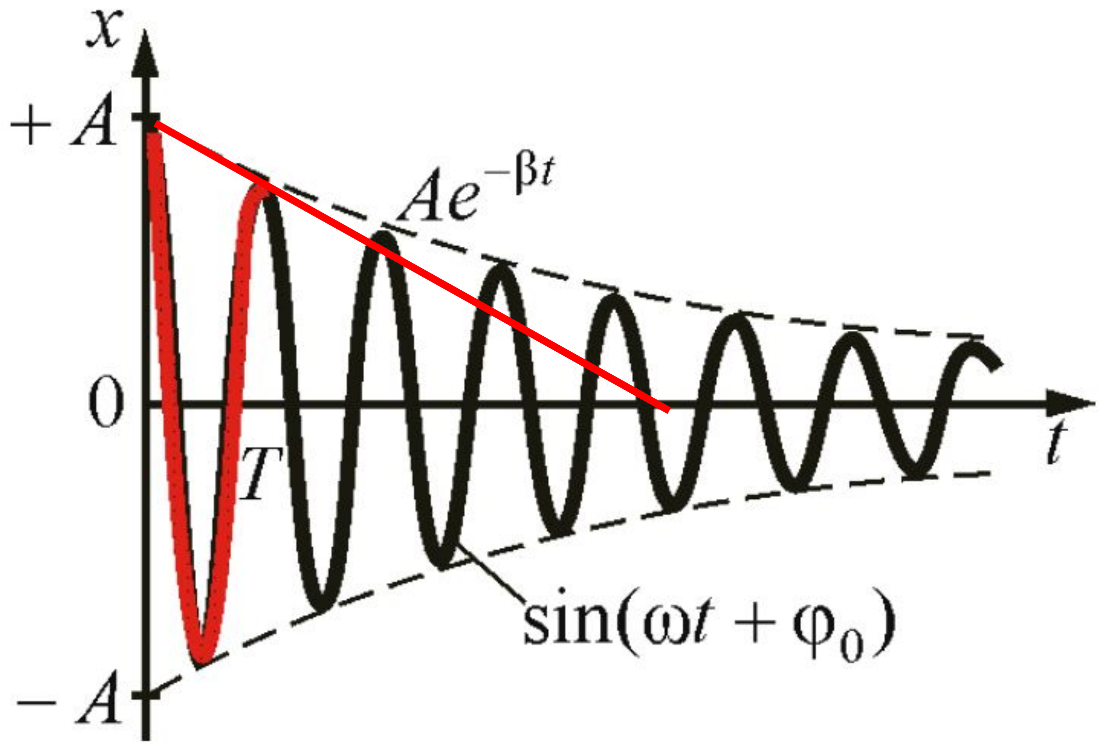


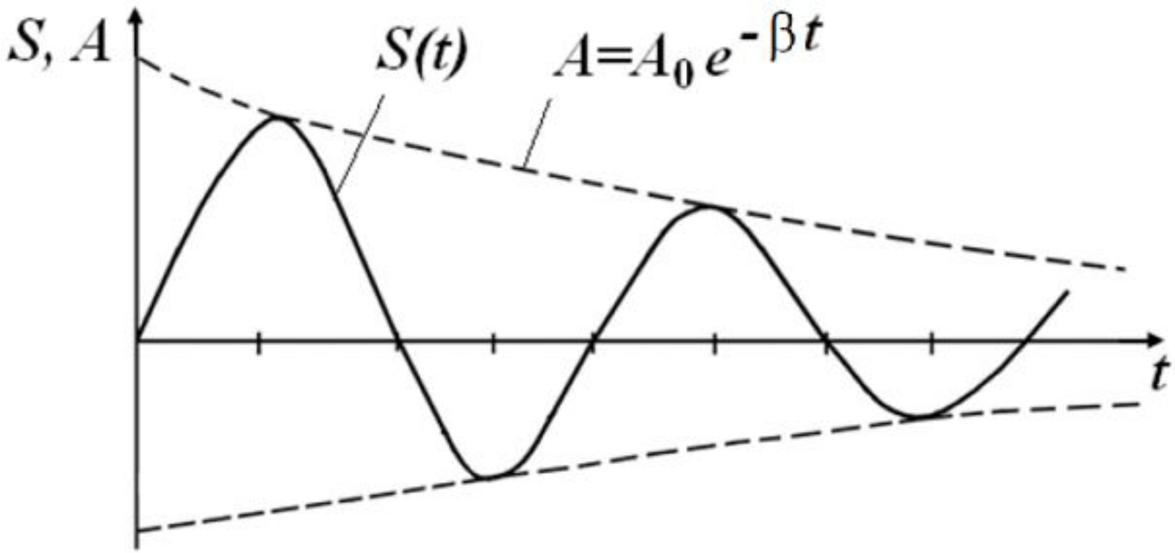
Декремент затухания (колебаний)

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = e^{\beta T},$$

где β – коэффициент затухания.

τ - время релаксации, время в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e (2.718) раз





$$S = \underbrace{A_0 e^{-\beta t}}_{A} \cos(\omega t + \varphi).$$

Затухание нарушает периодичность колебаний. Поэтому вводится определение *условный период T* – промежуток времени между двумя последующими *max* (*min*).

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Вывод формулы, определяющей период свободных затухающих колебаний

Из формулы: $\boxed{x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi_0)}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\beta A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \beta^2 A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + \beta\omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) +$$

$$+ \beta\omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Подставим эти значения в (☆) и сократим на $A_0 e^{-\beta t}$

Следующие промежуточные выкладки можно опустить

$$\beta^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + 2\beta\omega \sin(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) -$$

$$- 2\beta^2 \cos(\omega t + \varphi_0) - 2\omega\beta \sin(\omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = 0;$$

$$-\beta^2 \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = 0.$$

Сократим на $\cos(\omega t + \varphi_0)$ и выразим ω

$$-\beta^2 - \omega^2 - \omega_0^2 = 0;\ \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2;$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\ ,}$$

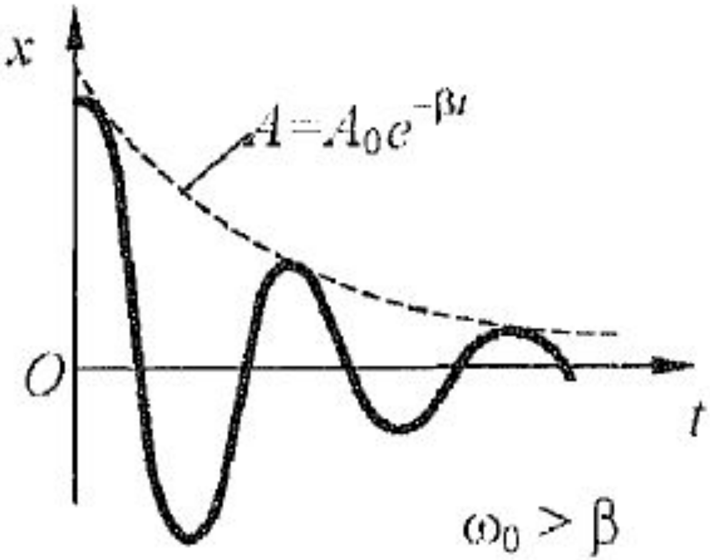
где ω_0 – *круговая частота собственных колебаний* (без затухания);

ω – *круговая частота свободных затухающих колебаний.*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};\quad \beta = \frac{r}{2m};\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

Период затухающих колебаний $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

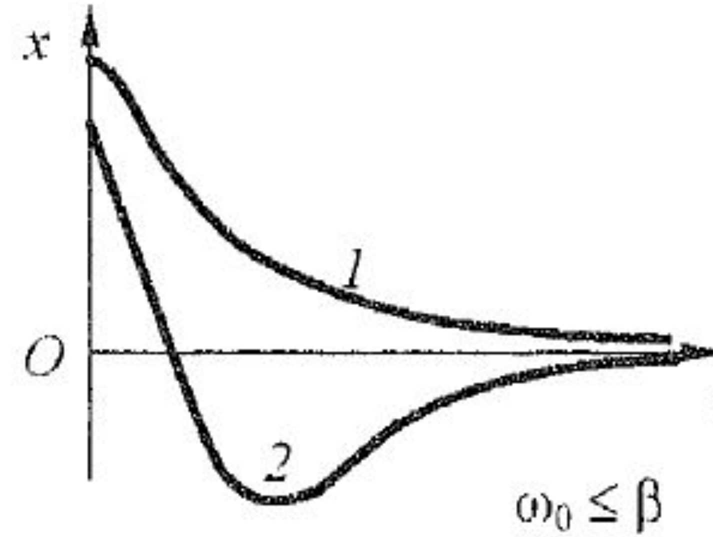
Корни характ. уравнения мнимые



а

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t - \varphi_0)$$

Корни характ. уравнения действительные числа



б

$$x(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t},$$

$$\lambda_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2},$$

$$\lambda_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Процесс затуханий колебаний характеризует декремент затухания (декремент колебаний) - отношение амплитуды затухающих колебаний через период

$$\chi = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}.$$

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln\chi = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Время, за которое амплитуда уменьшается в e раз, называют **временем релаксации** τ. Оно описывается выражением

$$\tau = 1/\beta.$$

Число колебаний, совершаемых системой за время релаксации,

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}.$$

Добротностью колебательной системы называют величину

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}.$$

Можно показать, что

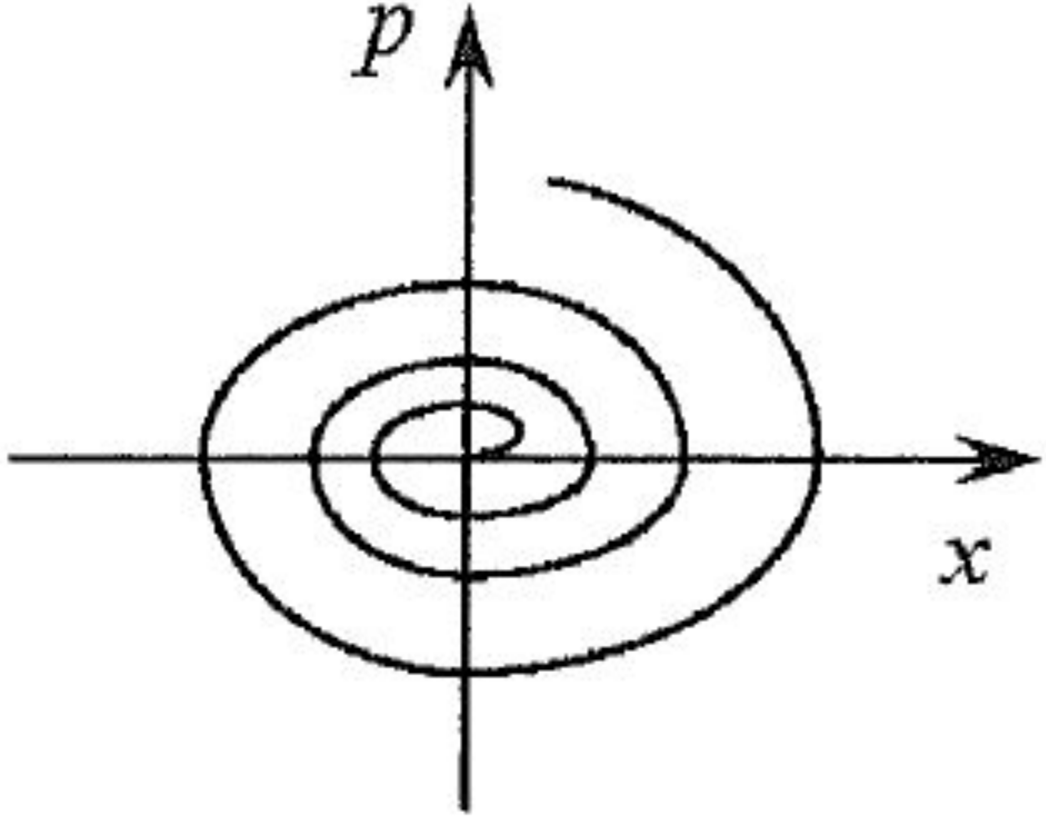
$$Q = \pi N_e.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ добротности колебательной системы

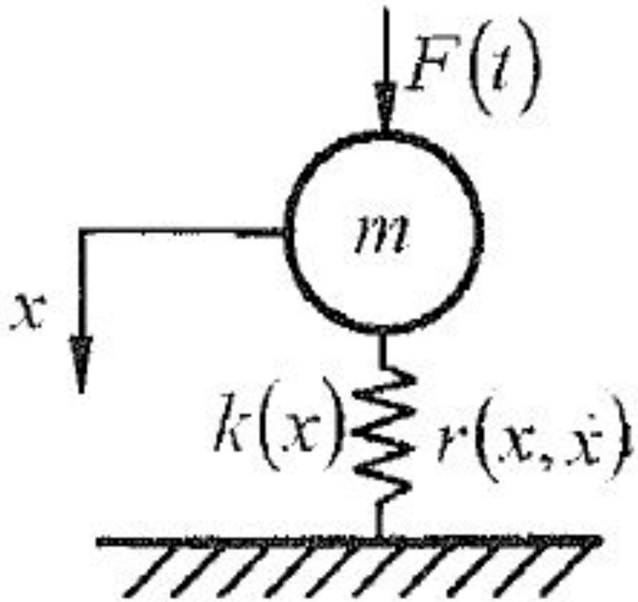
Q равна произведению 2π на отношение энергии $W(t)$ колебательной системы в момент времени t к убыли этой энергии за промежуток времени от t до $t + T$:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}.$$

Фазовая траектория затухающих колебаний



Вынужденные колебания



$F_x(t) = F_0 \cos \Omega t,$ где F_0 и Ω – амплитуда и частота вынуждающей силы соответственно.

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos\Omega t,$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t,$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Дальше частота внешней вынуждающей силы Ω обозначается как ω

Вынужденные колебания

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t. \qquad (1)$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,} \qquad (2)$$

Неоднородное линейное ДУ 2-го порядка

где $f_0 = \frac{F_0}{m}$, $\beta = \frac{r}{2m}$ — коэффициент затухания,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — собственная частота

Решением неоднородного линейного ДУ является сумма 2-х частей: решения однородного ДУ:

Это общее

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha'),$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а a_0 и α' — произвольные постоянные.

и частное решение, не содержащее произвольных постоянных

Предполагая, что решение имеет вид:

$$x = a \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\varphi = -\alpha'$$

Дифференцируем его и подставляем в (2):

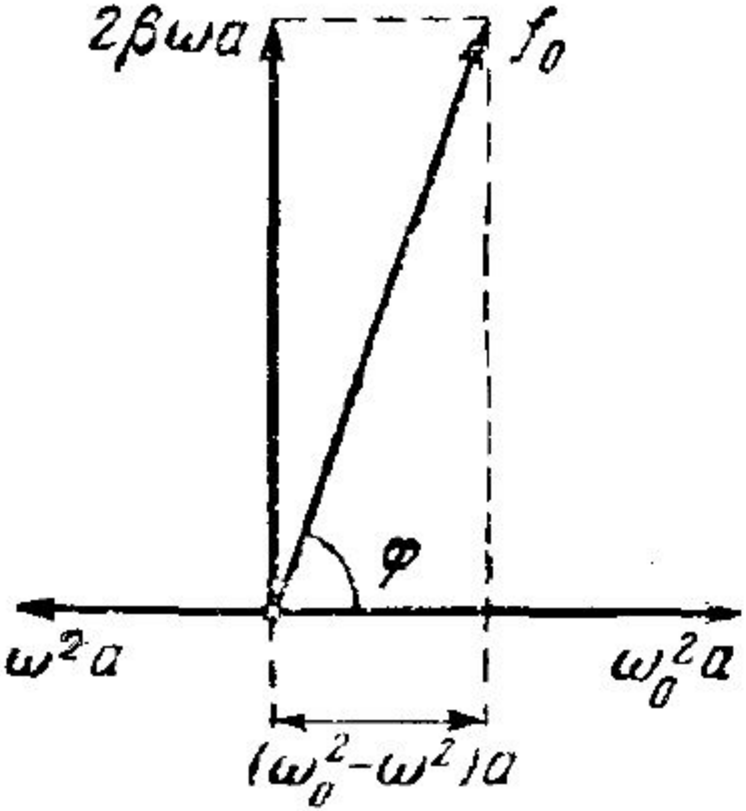
Три составляющих уравнения (2):

$$2\beta\dot{x} = -2\beta\omega a \sin(\omega t - \varphi) = 2\beta\omega a \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

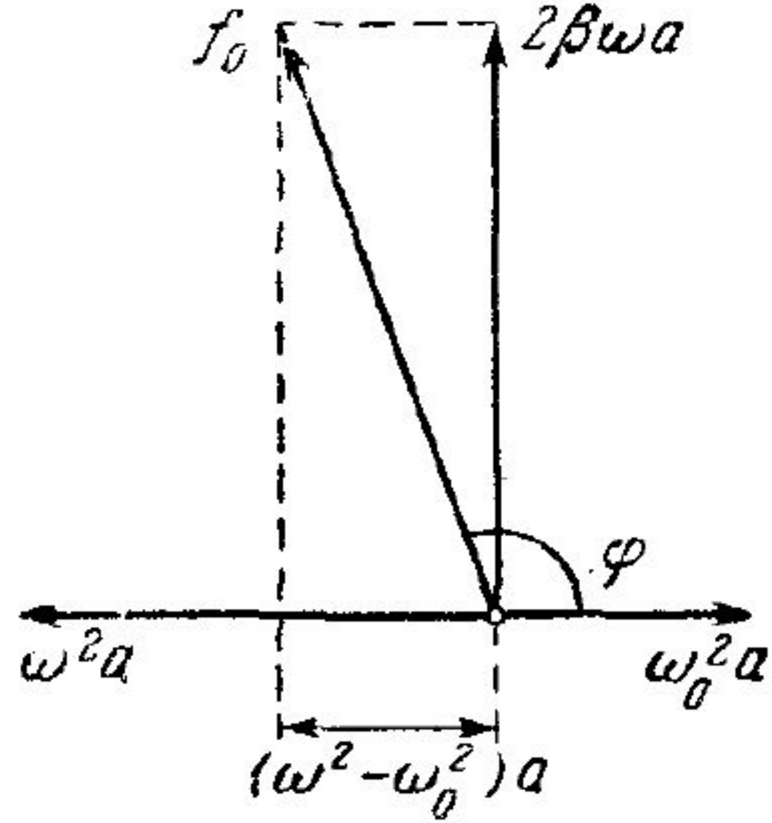
$$\ddot{x} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi).$$

$$\omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi).$$

Наиболее простое решение - графическое



а) $\omega < \omega_0$



б) $\omega > \omega_0$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2\, a^2 + 4\beta^2\omega^2 a^2 = f_0^2,$$

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

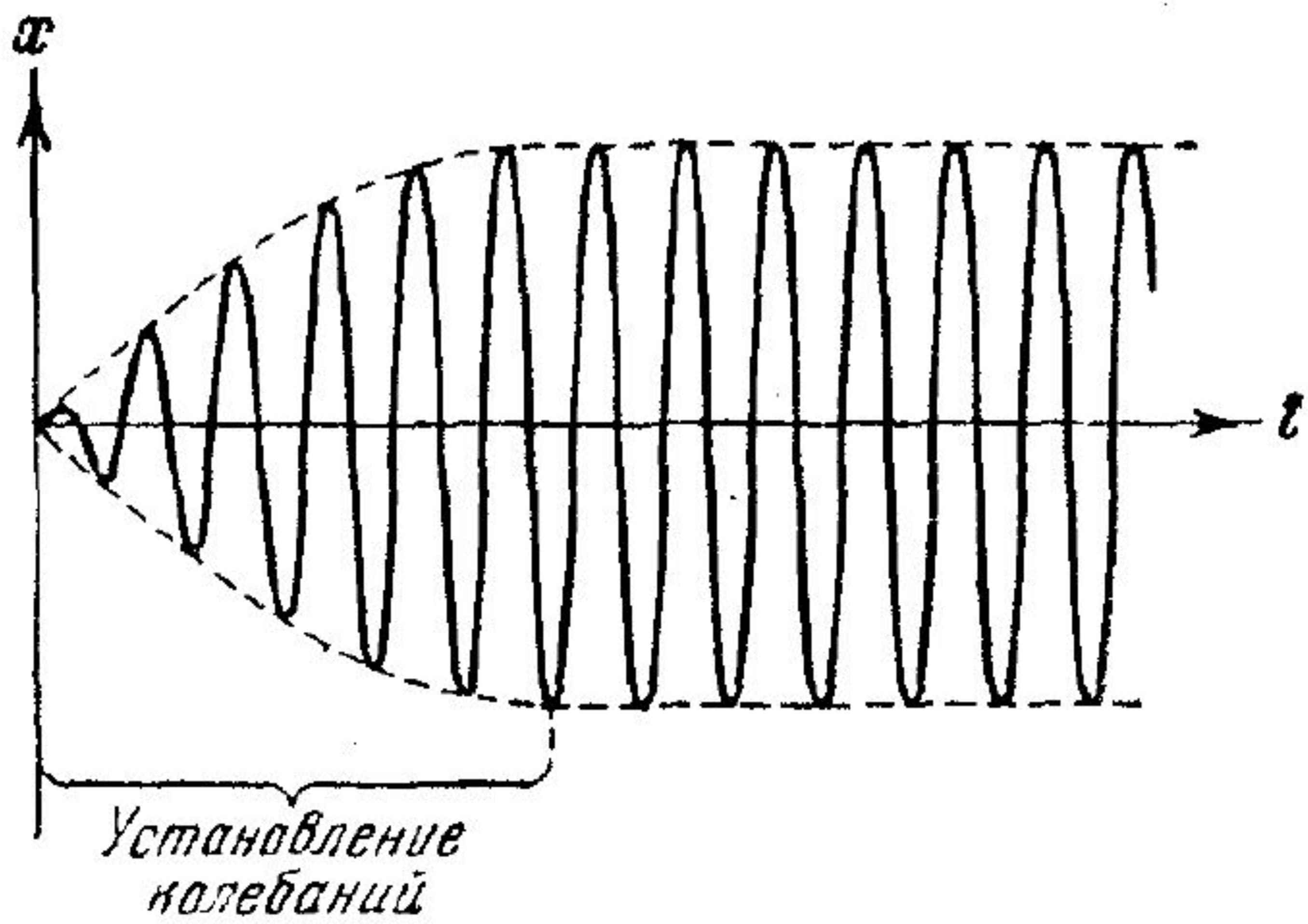
Из рисунка также следует:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Подставив значения *a* и *φ* в частное решение, получим:

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Начальный (переходный) и установившийся процессы колебаний



Общее решение определяет переходный процесс, поскольку присутствует экспоненци$e^{-\beta t}$ьный множитель

Частное решение определяет установившиеся вынужденные колебания. Частота вынужденных колебаний определяется частотой колебаний вынуждающей силы.

Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс

Для данной колебательной системы (определенных ω_0 и β) амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания φ также зависит от частоты вынуждающей силы

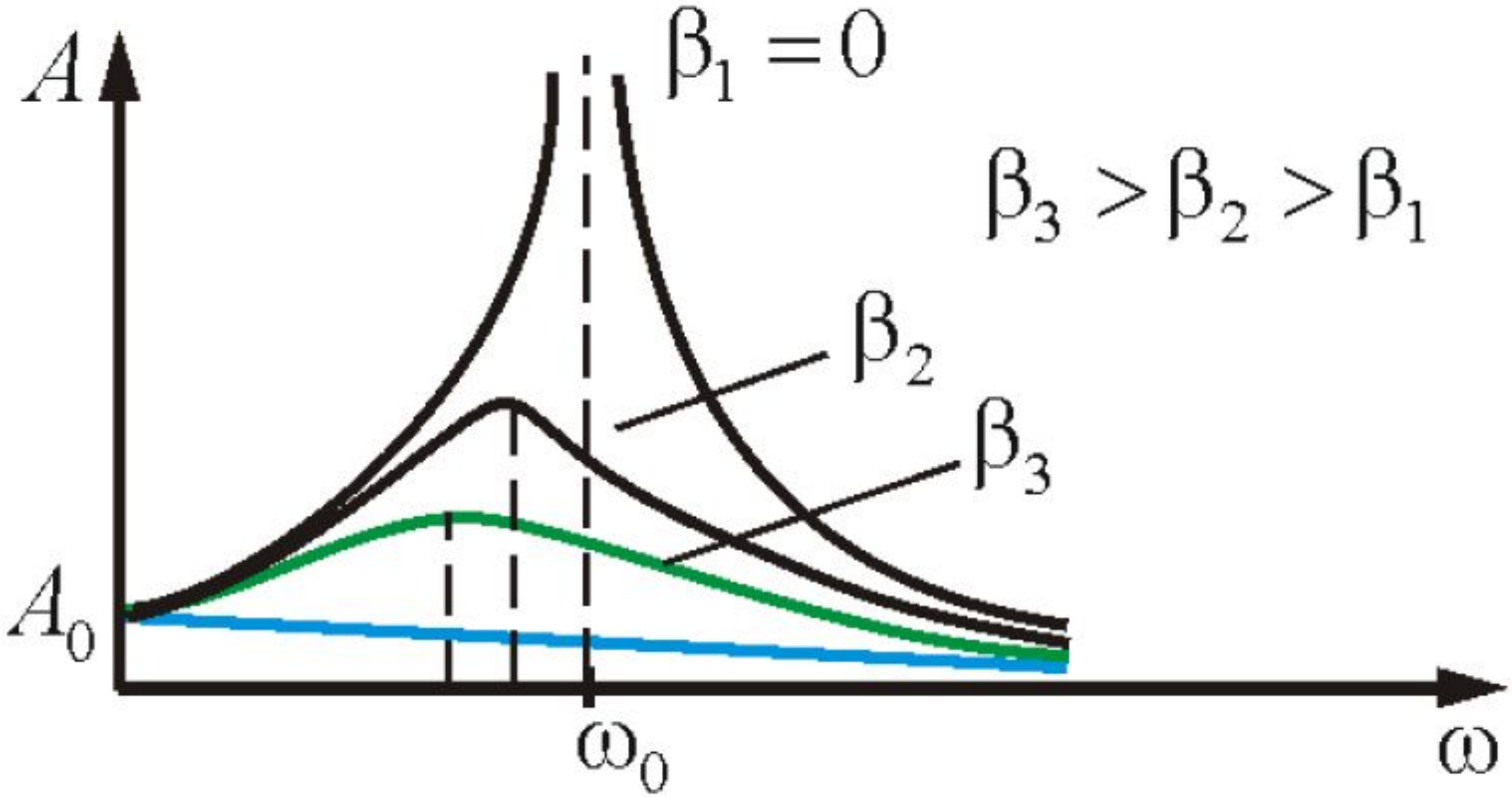
$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Определив минимум подкоренного выражения путем дифференц –ия и приравнивания 0, получим:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\,\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

$$\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Резонанс



$$A_{max} = A(\omega_{рез}) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2\right)^2 + 4\beta^2\left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right)}} =$$

$$= \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2\omega_0^2 - 8\beta^4}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{f_0}{2\beta\omega_1}.$$

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота свободных затухающих колебаний

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

При малых затуханиях $\beta^2 << \omega_0^2 \Rightarrow \omega_{рез} \approx \omega_0$

– собственной частоте колебательной системы и амплитуда резонансных колебаний

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0} = \underbrace{\frac{\omega_0}{2\beta}}_{Q} \cdot \frac{f_0}{\omega_0^2} = Q\frac{f_0}{\omega_0^2},$$

$Q - добротность.$

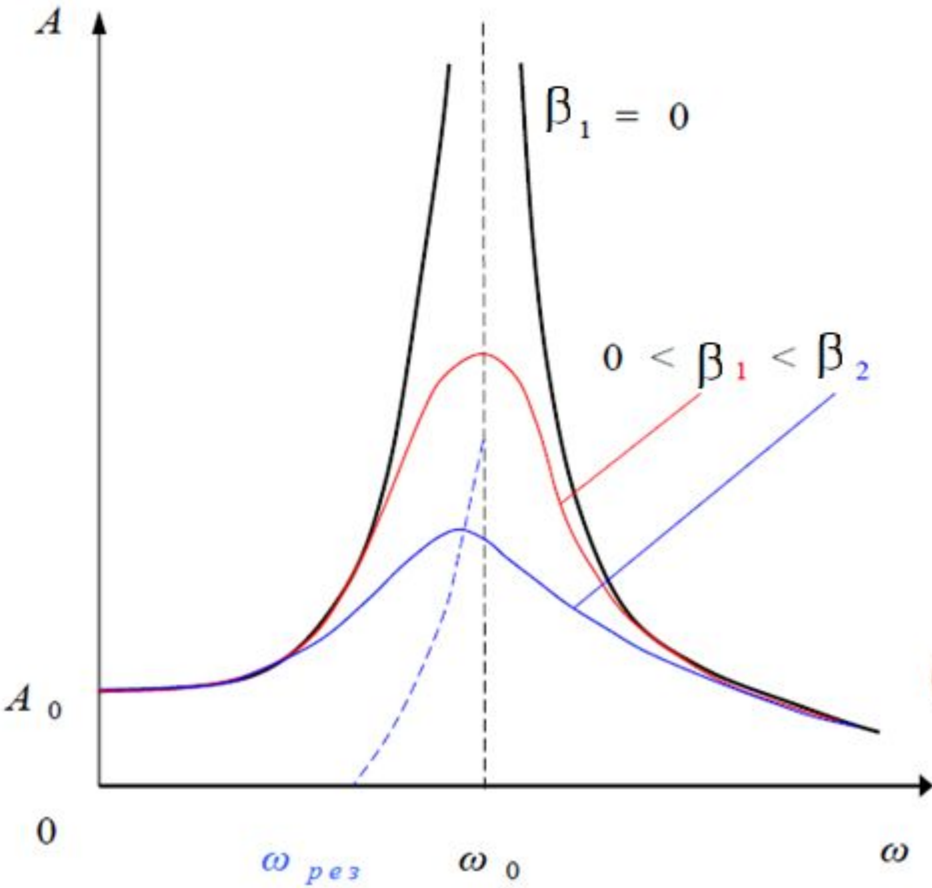
График зависимости амплитуды колебаний A

от частоты ω вынуждающей силы

называется *резонансными кривыми*. или АЧХ

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

По мере роста коэффициента затухания δ пики на резонансных кривых сглаживаются, а $\omega_{рез}$ уменьшается.



$$A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F}{m\omega_0^2} \qquad -$$

статическое отклонение, найдено из уравнения для A при $\omega = 0$.

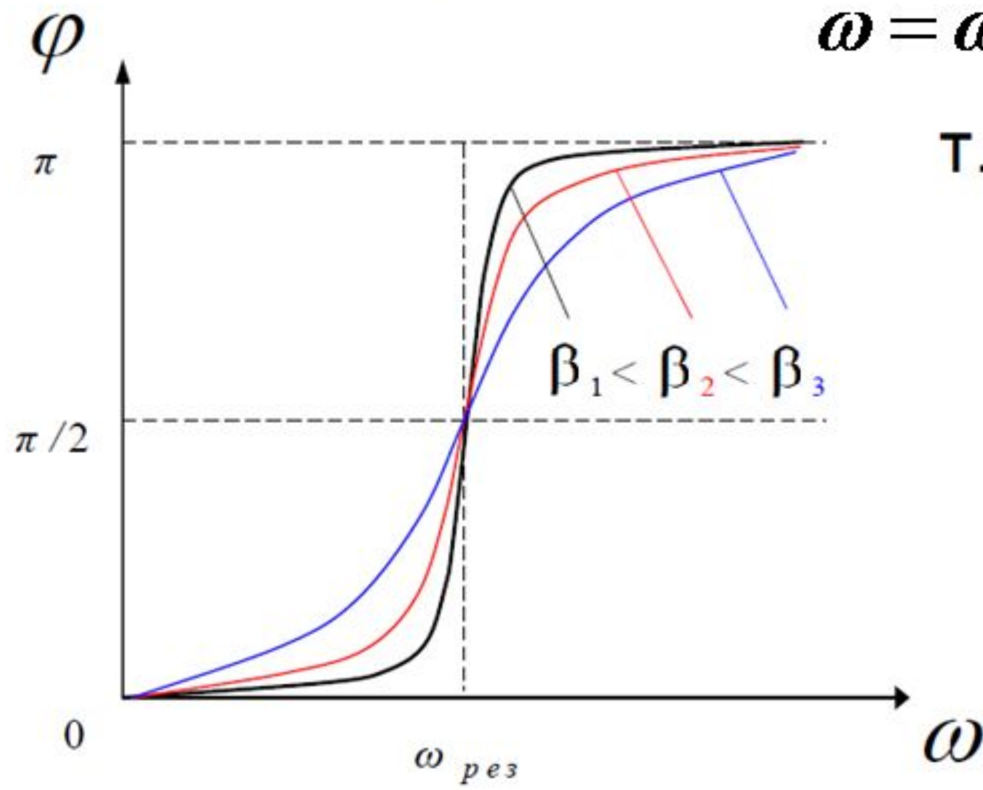
Зависимость фазы колебаний φ от частоты ω вынуждающей силы называется *фазовыми резонансными кривыми*. или ФЧХ

$$tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

При резонансе Затухания отсутствуют:

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow tg\varphi \Rightarrow \infty \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

т.е. колебания и вынуждающая сила имеют сдвиг по фазе $\frac{\pi}{2}$



Добротность КС – определяется отношением амплитуды колебаний при резонансе к амплитуде статического отклонения

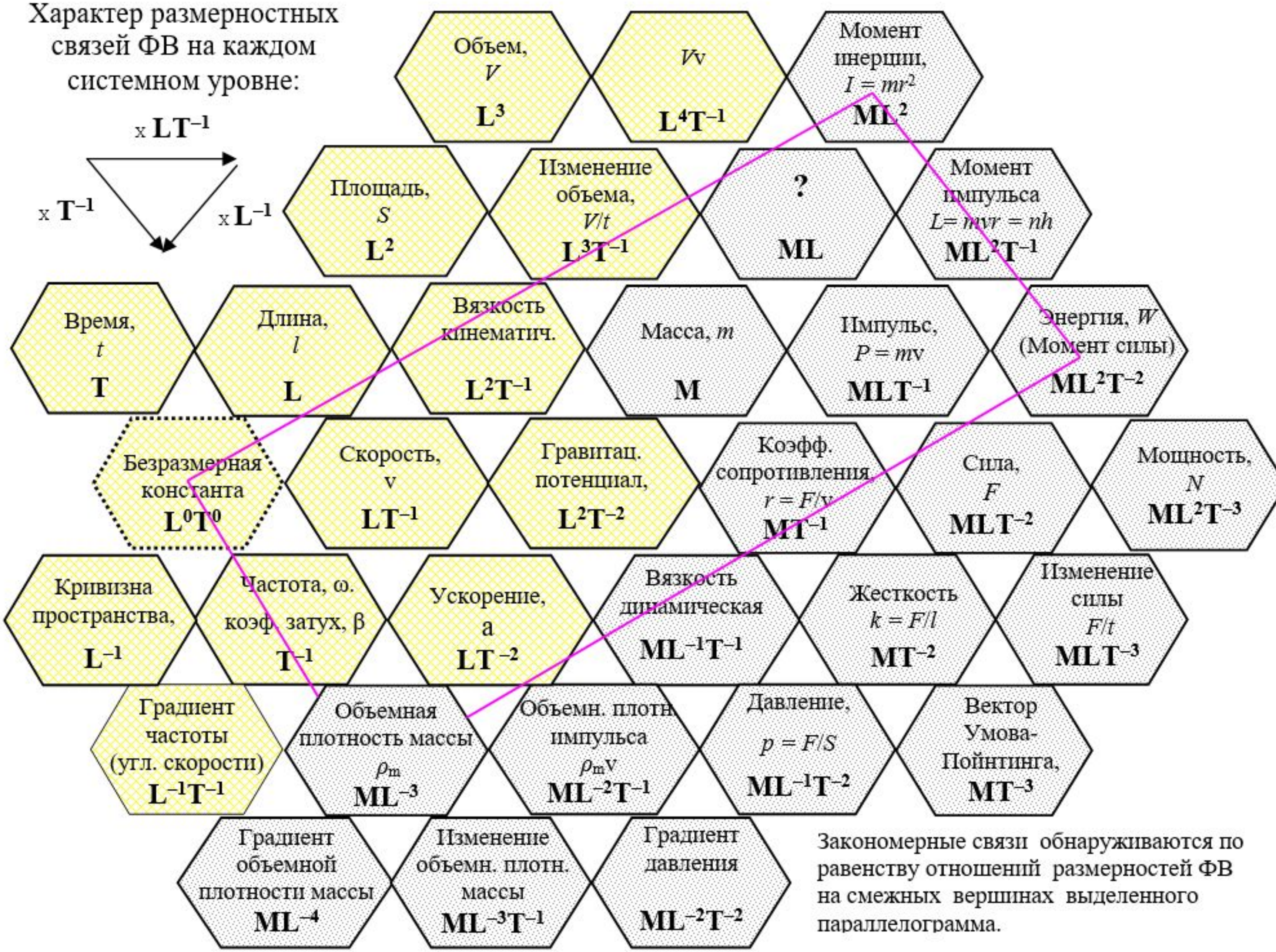
$$Q = \frac{A_{рез}}{A_{ст}}$$

Автоколебания и параметрический резонанс

- разобрать самостоятельно

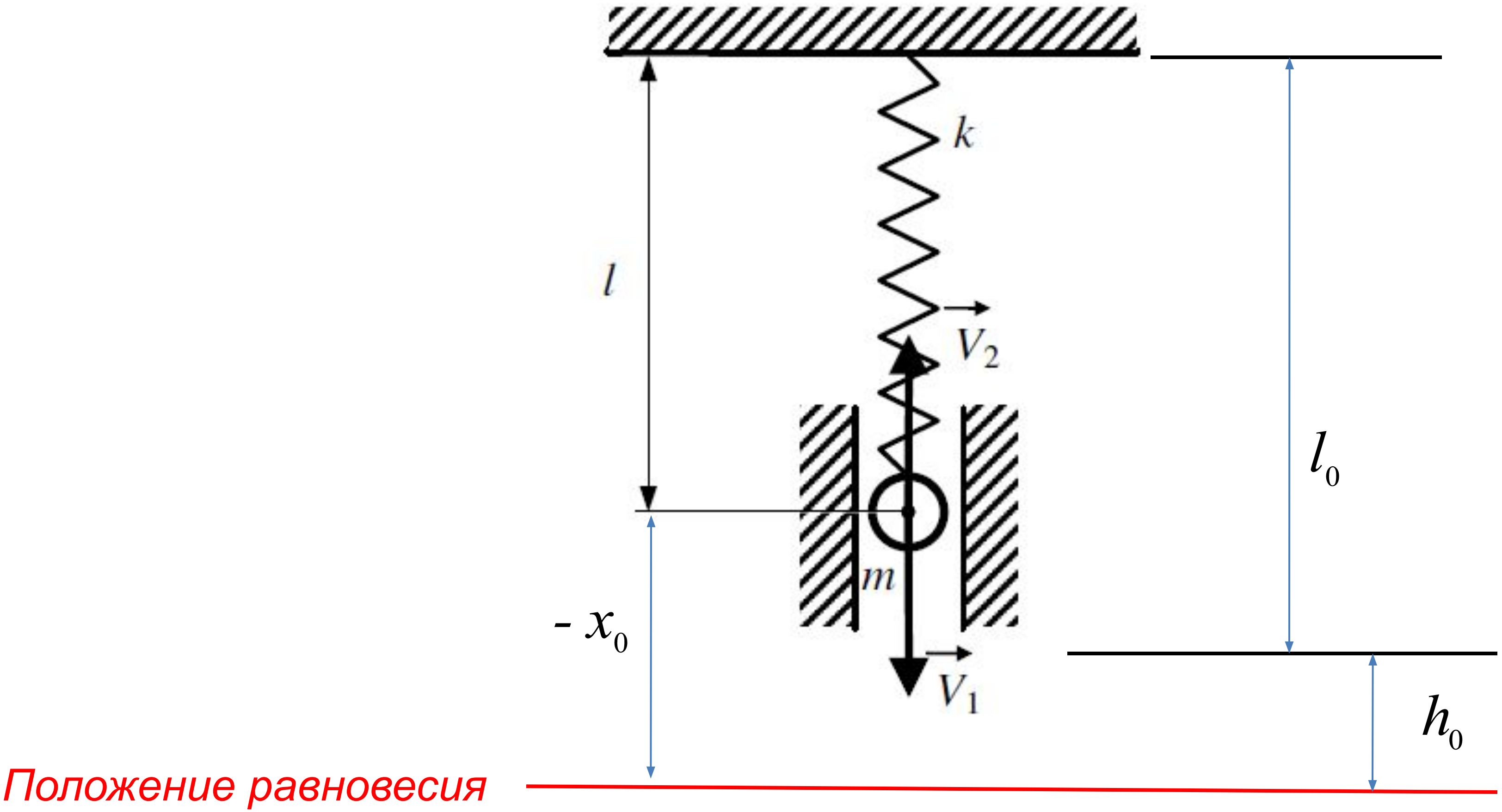
СИСТЕМА МЕХАНИЧЕСКИХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

(Механические ФВ образуют два системных уровня общих базовых величин)



Закономерные связи обнаруживаются по равенству отношений размерностей ФВ на смежных вершинах выделенного параллелограмма.

К выполнению ДЗ по колебаниям



$$\boxed{h_0 = \frac{mg}{k}}$$

l_0 - длина пружины в свободном состоянии;

h_0 - дополнительное растяжение пружины в поле гравитации;

$-x_0$ - начальное смещение массы от положения равновесия.

$$F = -k(x + h_0)$$

$$m\ddot{x} = mg - k(x + h_0)$$

С учетом $mg = kh_0$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \alpha_0)$$

При *t* = 0 $x_0 = A\cos\alpha_0$ $\text{v}_0 = -A\omega\sin\alpha_0$

$$x_0 = A\cos\alpha_0 \qquad\qquad \frac{v_0}{\omega} = -A\sin\alpha_0$$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{A\omega}\right)^2 = 1$$

Отсюда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

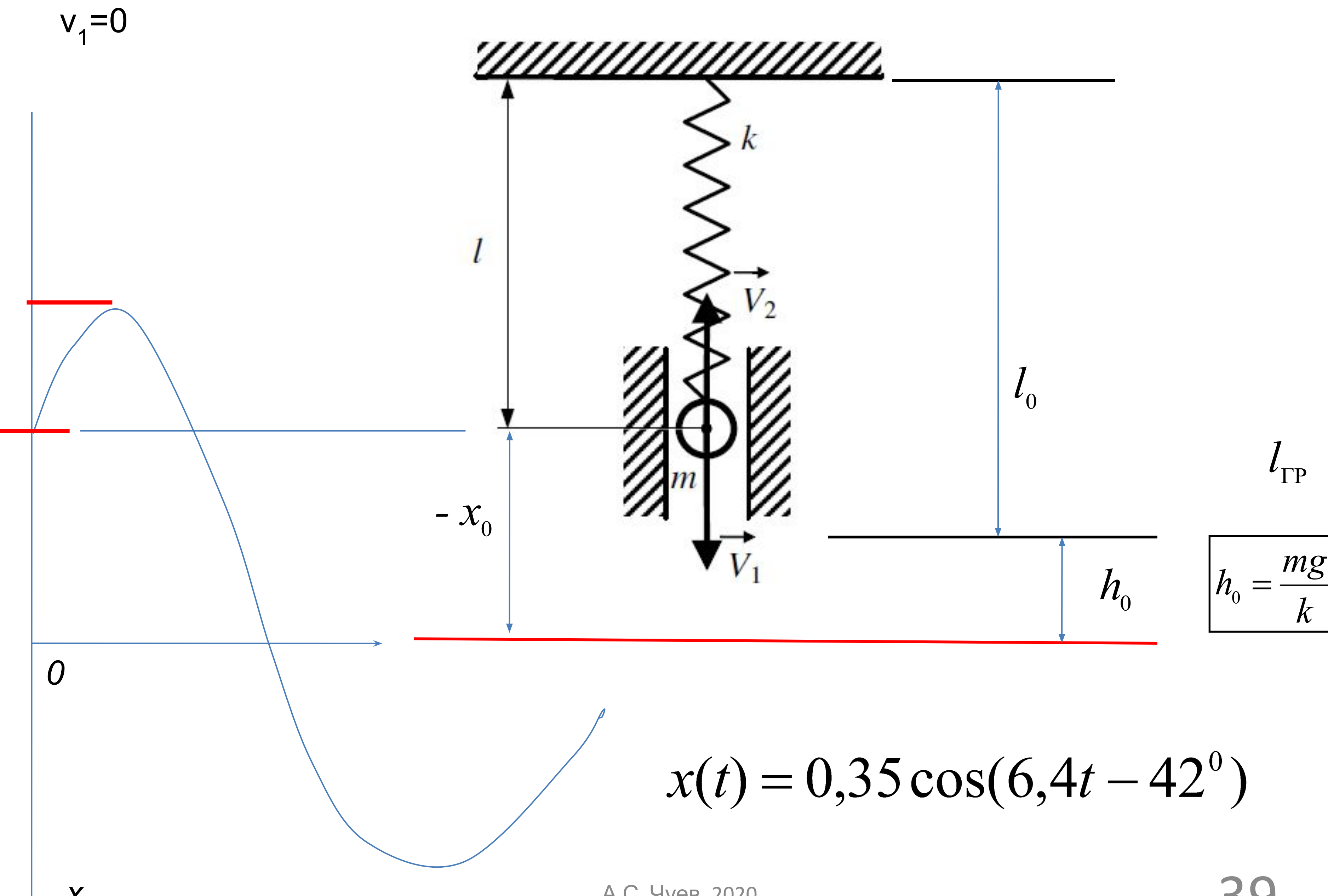
Другой способ: $$\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$

С учетом $\omega^2 = k/m$

$$\alpha_0 = \arccos\frac{x_0}{A}$$

косинус функция четная, поэтому α_0 дополнительно уточняем через тангенс

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_0}{x_0\omega}\right)$$



$$h_0 = \frac{mg}{k}$$

$$x(t) = 0{,}35\cos(6{,}4t - 42^0)$$

Конец лекции 6