Тема: «Применение производной к исследованию функции»

Применение производной к исследованию функции

1) промежутки возрастания, убывания

2) точки экстремума и значение функции в этих точках

3) наибольшее и наименьшее значение функции

4) построение графика функции

Признак возрастания (убывания)функции

Достаточный признак возрастания функции. Если f ’ (x)>0 в каждой точке интервала I, то функция возрастает на I.

Достаточный признак убывания функции. Если f ’ (x)< 0 в каждой I, то функция убывает на I.

Если f ’ (x)= 0 в каждой точке интервала I, то f является постоянной (константой)на интервале I.

Промежутки возрастания, убывания

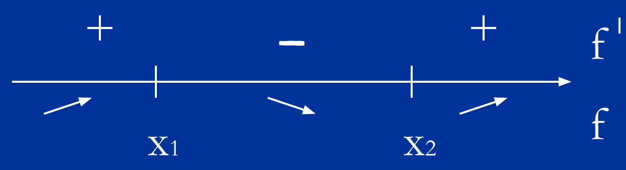
$f'(x)$ - ?

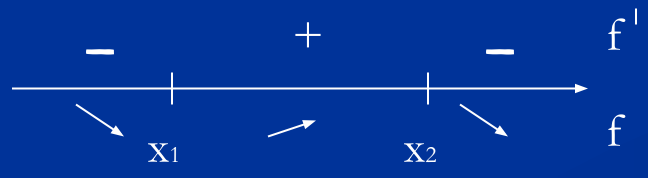
$f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I

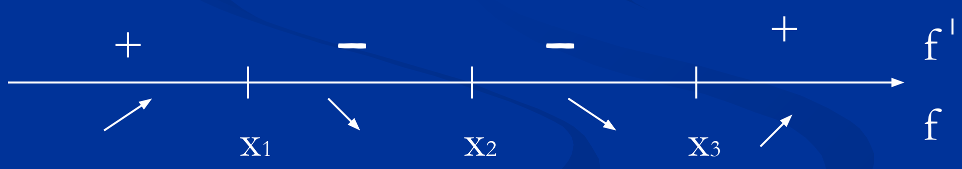
f возрастает на I

$f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I

f убывает на I







↗ -функция возрастает,

↘ - функция убывает.

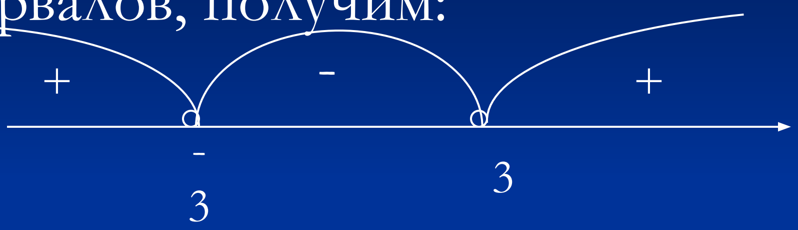
Пример: Найти промежутки

возрастания и убывания функции.

Построить график $f\ (x)=x^3 – 27x$

Решение:

Данная функция определена на множестве всех действительных чисел. Из равенства f ’ $(x)=3x^2 - 27x$ следует, что f ’ > 0, если $3x^2 - 27 > 0$. Решаем это неравенство методом интервалов, получим:



$3x^2 - 27 > 0$,

$3(x^2 - 9) > 0$,

$3(x - 3)(x + 3) > 0$.

Получили, что f ’ > 0 на интервале $(-\infty; -3)$ и $(3; +\infty)$ и значит, на этих интервалах функция f возрастает.

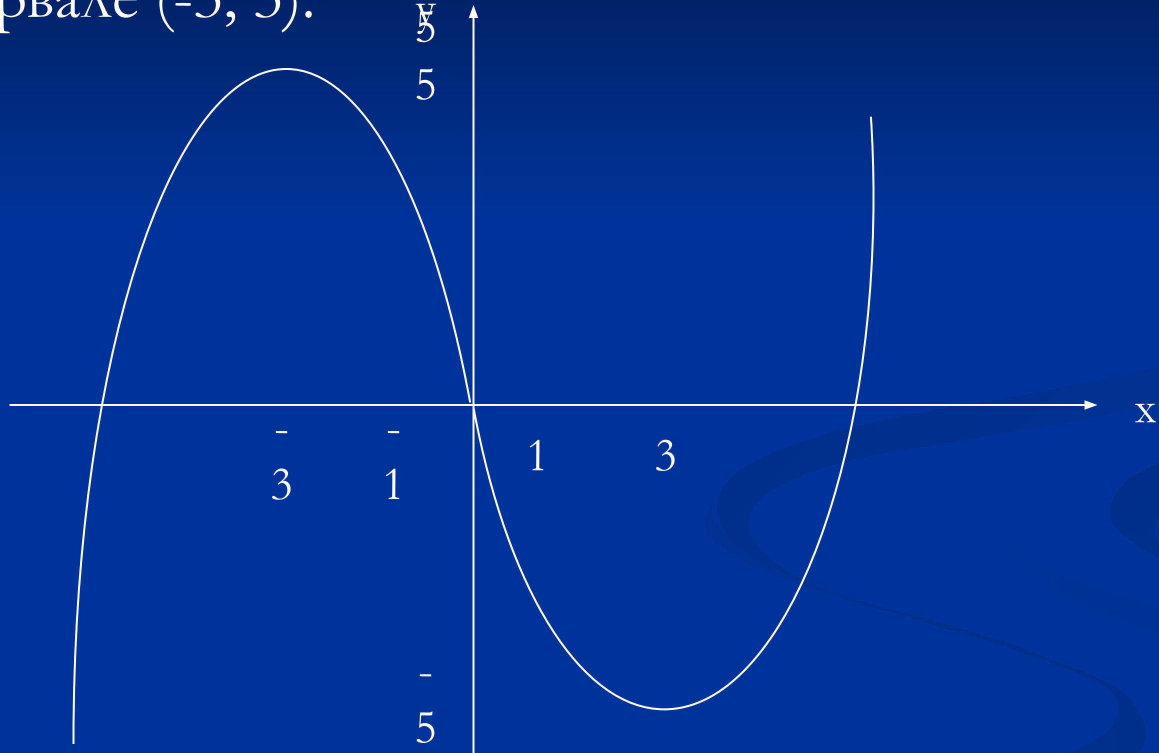
Аналогично f ’ < 0 на интервале (-3; 3), поэтому на этом интервале f убывает.

Вычисляем значение функции в точках -3 и 3.

$f(-3)=(-3)^2 - 27*(-3)= -27+81=54$;

$f(3)=27-81=-54$.

На координатной плоскости отметим точки M (-3; 54) и N (3; 54) и нарисуем проходящий через них график функции, возрастающей на интервалах (-∞; -3) и (3; +∞) и убывающей на интервале (-3; 3).



Функция f, непрерывна в точке -3 и 3, возрастает на промежутке (- ∞; -3], [3; +∞) и убывает на отрезке [-3; 3]

Критические точки функции, максимума и минимума

Внутренние точки D(f) функции, в которой ее производная равна нулю или не существует, называются критическими точками (только они могут быть точками экстремума).

Необходимое условие экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f, то она равна нулю:

$f'(x_0) = 0$.

Признаки максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) > 0$ на интервале (a, x_0) и $f'(x) < 0$ на интервале(x_0, b), то точка x_0 является точкой максимума функции f. (Если в точке x_0 производная меняется знак с «+» на «-», то x_0 есть точка максимума)

Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0 , а $f'(x) < 0$ на интервале (a, x_0) и $f'(x) > 0$ на интервале(x_0, b), то точка x_0 является точкой минимума функции f. (Если в точке x_0 производная меняется знак с «-» на «+», то x_0 есть точка минимума)

Точки экстремума и значение функции в этих точках

Максимум функции

- Функция f определена и непрерывна на (a. b)
- f '(x) - ?
- f '(x) > 0 на (a, x₀) — f '(x) < 0 на (x₀, b)
- x_0 - точка максимума
- $f(x_0)$

Минимум функции

- Функция f определена и непрерывна на (a. b)
- f '(x) - ?
- f '(x) < 0 на (a, x₀) — f '(x) > 0 на (x₀, b)
- x_0 - точка минимума
- $f(x_0)$

x_0 – точка максимума

x_0 – точка минимума

Пример: Найти критические точки функции. Определить, какие из них являются точками максимума,
а какие – точками минимума.

$$f(x) = 9+8x^2-x^4$$

Решение:

$f' = 16x - 4x^3$;

$f'(x)$ определена во всех точках,

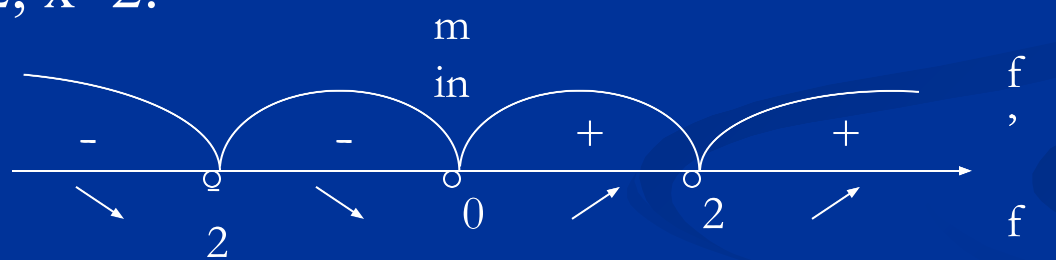
$f' = 0$,

$16x - 4x^3 = 0$,

$4x(4 - x^2) = 0$,

$x=0$ или $(2-x)(2+x)=0$

$x=0$, $x=-2$, $x=2$.



В точке 0 производная меняет знак с «-» на «+» ($f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty;-2) \cup (-2; 0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$).

Пользуясь признаками максимума и минимума, получаем, что точка 0 является точкой минимума $f_{min}(x) = f(0) = 9$.

Наибольшее и наименьшее значение функции

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значение функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее значение функции.

Пример: Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)= x^4 - 8x^2 - 9$ на промежутках [-1; 1] [0; 3].

Решение:

Находим критические точки.

Т.к. производная f ' = $4x^3$-16x определена для любого x. Остается решить уравнение f '(x)=0.

$4x^3-16x=0$,

$4x(x^2-4)=0$,

$x=0$ или $(x-2)(x+2)=0$,

$x=0$, $x=2$, $x=-2$.

Выбираем наибольшее и наименьшее из чисел

$f(0)= -9$, $f(2)=-25$, $f(-1)=-16$, $f(1)=-16$, $f(3)=0$.

Критическая точка -2 не принадлежит указанным промежуткам. Наибольшее значение достигается в точке 3 и равно 0, а наименьшее в точке 2 и равно -25.

$\max f(x)=f(3) = 0$ $\min f(x) = f(2) = -25$

[-1; 1]и [0; 3] [-1; 1]и [0; 3]

Применение исследования на наибольшее (наименьшее) значение функции к решению прикладных задач

Для этого:

1. Задача «переводится» на язык функции. Для этого выбирают удобный параметр x, через который интересующую нас величину выражают как функцию f (x);
2. Средствами анализа находится наибольшее и наименьшее значение этой функции на некотором промежутке;
3. Выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Пример: Кусок проволоки длинной 48 м сгибается так, чтобы образовался прямоугольник. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, чтобы его площадь принимала наибольшее значение

Решение:

1. Обозначим через x длину стороны прямоугольника, а вторая сторона равна (24-x). Тогда площадь равна $S(x) = x(24 - x)$. По смыслу задачи $0 < x < 24$, таким образом, мы свели поставленную задачу к следующей: найти наибольшее значение функции $S(x) = x(24 - x)$ на интервале (0; 24).
2. Правило нахождения наименьших и наибольших значений функции было сформировано на отрезке. Функция S(x) непрерывна на всей числовой прямой; мы будем искать ее наибольшее значение на отрезке [0; 24], потом сделаем выводы для решаемой задачи. Находим критические точки функции:

$S'(x) = 24 – 2x$,

$S'(x)=0$,

$24-2x=0$,

$x=12$,

$S(12) = 12*(24 - 12) = 144$.

Т.к. $S(0)=0$ и $S(24)=0$, своего наибольшего значения на отрезке [0; 24] функция S достигает при $x=12$, т.е. $\max S(x)= S(12)=144$.

Наибольшее значение функции достигается внутри отрезка [0; 24], а следовательно, и внутри интервала (0; 24).

3. Вспомним что x – длина стороны прямоугольника, имеющей при заданных условиях максимально возможную площадь. Полученый результат означает, что максимальную площадь имеет коробка со стороной 12 см и 12 см, т.е. квадрат.

$y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$

Практическое применение к исследованию функции

Пример: Исследовать функцию $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ и построить ее график

Схема исследования:

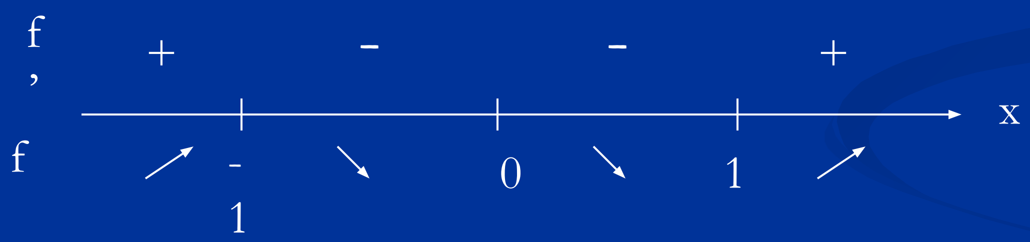
1. Найти область определения
2. Выяснить, является функция четной или нечетной
3. Найти точки пересечения с осями
4. Найти промежутки возрастания, убывания
5. Найти точки экстремума и значение функции в этих точках
6. Построить график

$y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$

Пример: Исследовать функцию $y=f(x)= 3x^5 - 5x^3 + 2$ и построить ее график.

Решение:

1. $D(y)=R$
2. Функция ни четная, ни нечетная
3. Точки пересечения с осями: график f(x) пересекается с осью ординат в точке (0; 2). Найдем точки пересечения с осью абсцисс, для этого решим уравнение $3x^5 - 5x^3 + 2 = 0$, один из корней которого (x=1) легко находится. Другие корни (если они есть) могут быть найдены только приближенно. Поэтому для данной функции остальные точки пересечения графика с осью абсцисс находить не будем.
4. Промежутки монотонности: $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2-1)$



5. Точки экстремума и значение функции в этих точках:

$x_{max} = -1$ $x_{min} = 1$ $f(-1) = 4$ $f(1) = 0$

6. Построить график