



Проверка статистических гипотез

Проф. Митин Александр Иванович
Доц. Сафонова Татьяна Евгеньевна

Зависимость между случайными величинами

- Установить **факт** зависимости (независимости) двух случайных величин
- Измерить **степень** зависимости двух случайных величин
- Установить **форму** зависимости между случайными величинами и дать **прогноз** значений зависимой случайной величины

Проверка статистических гипотез

- **Гипотеза** - предположение, которое мы собираемся проверить
- **Статистическая гипотеза** - предположение о распределении вероятностей на выборочном пространстве
- **Проверка статистических гипотез** – проверка соответствия характеристик выборки некоторым теоретическим (*предполагаемым*) значениям этих характеристик

Виды гипотез

- Выдвинутую гипотезу о законе распределения случайной величины (т.е. о его виде и параметрах) называют **нулевой** (основной) и обозначают H_0
- Гипотезу, которая противоречит нулевой, называют конкурирующей (**альтернативной**) и обозначают H_1, H_2, \dots

Статистический критерий

- **Статистический критерий** - правило, по которому гипотеза H_0 принимается или отвергается.

Статистика критерия

- Согласно большинству статистических критериев проверка статистической гипотезы осуществляется путем вычисления специальных функций от наблюдаемых значений (вариант выборки)
- Такая функция называется **статистикой критерия**
- Статистики строятся так, чтобы их распределения при H_0 и при H_1 **сильно различались** \Rightarrow поскольку распределения статистик хорошо известны, достаточно вычисленное значение статистики сравнить с некоторым **табличным** значением

Критическая область и ошибки проверки гипотез

- В области допустимых значений статистики выделяется **критическая область** – совокупность значений статистики, при которых нулевая гипотеза **отвергается**
- **Критическая точка** – точка, отделяющая критическую область от области принятия гипотезы
- **Ошибка первого рода** - отвергнуть правильную гипотезу (H_0 верна, но отклоняется)
- **Ошибка второго рода** - принять неправильную гипотезу (H_0 неверна, но принимается)

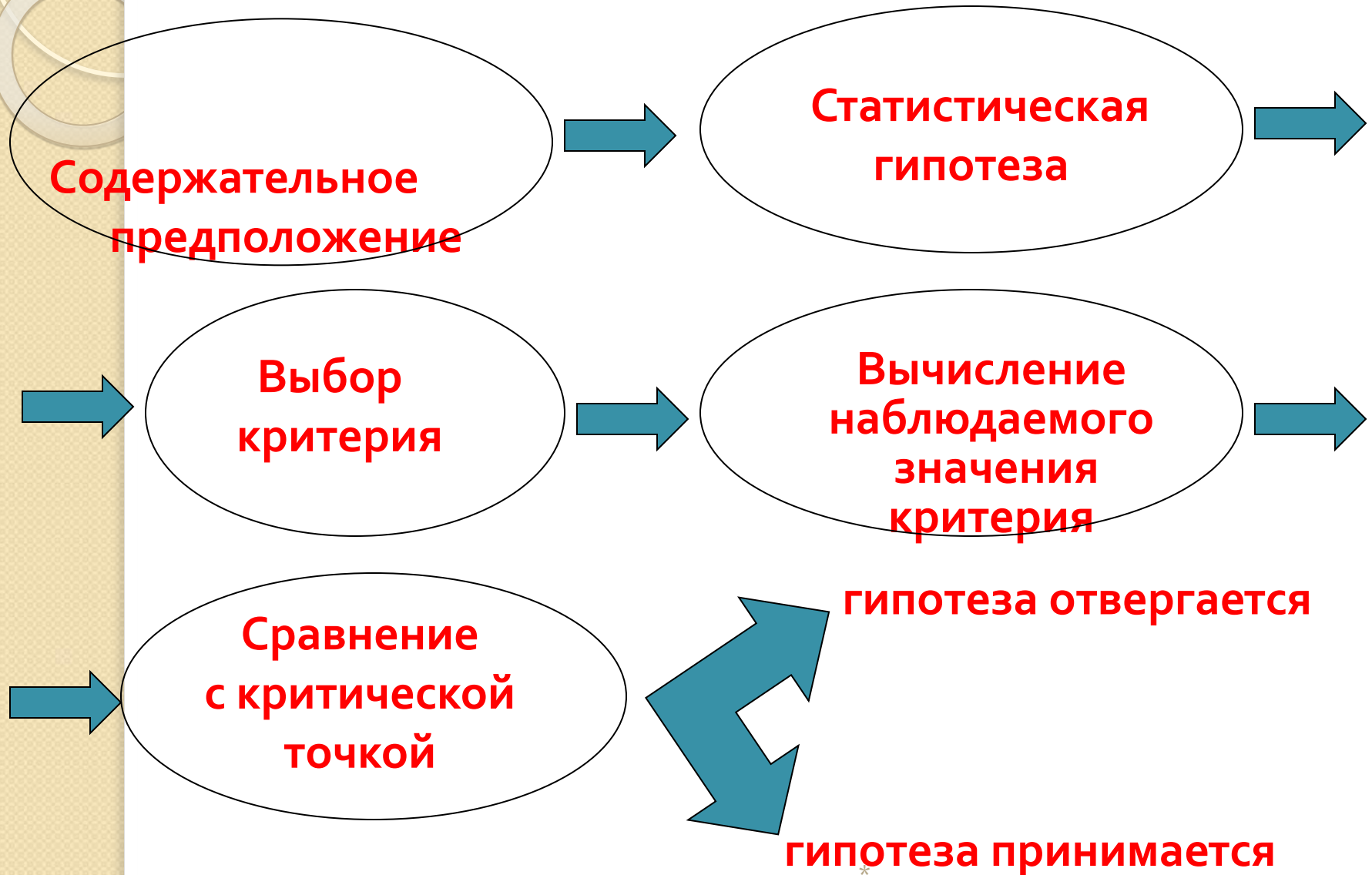
Уровень значимости и мощность критерия

- **Уровень значимости** - вероятность ошибочно отвергнуть гипотезу, когда она верна (т.е. вероятность ошибки первого рода); обозначается через α и заранее принимается достаточно *малым*
- **Мощность критерия** - вероятность принять гипотезу, когда она верна (т.е. вероятность *недопущения* ошибки второго рода); обозначается через β и выбирается по возможности *близким к 1* (при заранее заданном α)

Уровень значимости статистического критерия

- Выберем событие A , условная вероятность которого при гипотезе H_0 меньше ε .
- Если в эксперименте событие A произошло, то отвергаем гипотезу H_0 на уровне значимости ε .
- Событие A - критическое для гипотезы H_0 или **критерий** для H_0 .

Схема проверки статистических гипотез



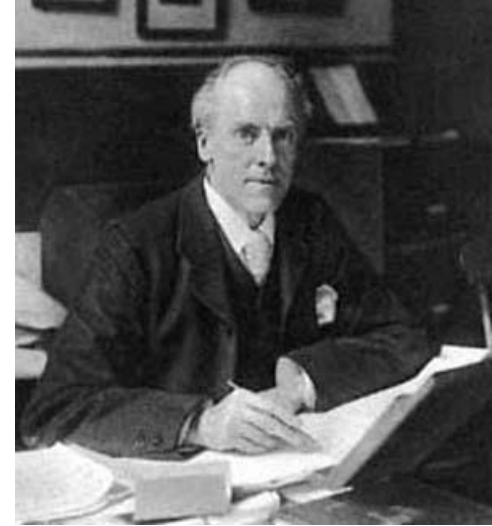
Критерий согласия К. Пирсона (критерий χ^2)

- Проверка при данном уровне значимости α гипотезы H_0 о равенстве **эмпирических частот** m_i попадания элементов выборки (значений признака) в область A_i ($i = 1, 2, \dots, k$) ($\sum_{i=1}^k m_i = n$) и **теоретических частот** $m_i' = nr_i$, где p_i – вероятность попадания признака в область A_i в соответствии с **предполагаемым** законом распределения

Распределение хи-квадрат

- Проверка при данном уровне значимости α гипотезы H_0 о равенстве **эмпирических частот** m_i попадания элементов выборки (значений признака) в область A_i ($i = 1, 2, \dots, k$) ($\sum_{i=1}^k m_i = n$) и **теоретических частот** $m_i' = nr_i$, где r_i – вероятность попадания признака в область A_i в соответствии с **предполагаемым** законом распределения

Карл Пирсон (1857 – 1936)



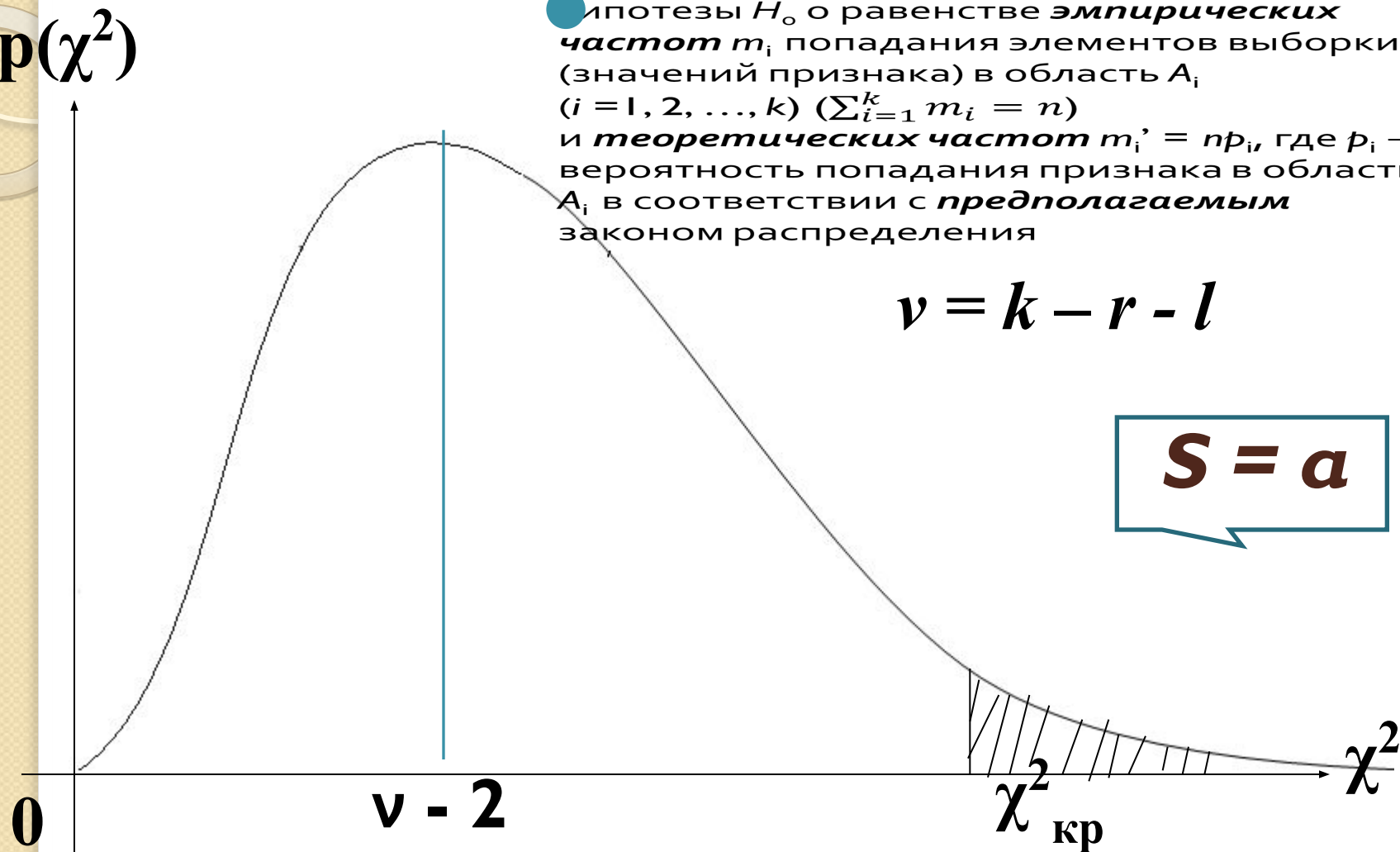
- В 1900 году основал журнал «Biometrika», посвящённый применению статистических методов в биологии
- Опубликовал основополагающие труды по математической статистике (более 400 работ)
- Разработал теорию корреляции, критерии согласия, алгоритмы принятия решений и оценки параметров
- С его именем связаны такие широко используемые термины и методы, как кривые Пирсона, распределение Пирсона, критерий согласия Пирсона (критерий хи-квадрат), коэффициент корреляции Пирсона и корреляционный анализ, ранговая корреляция, множественная регрессия, коэффициент вариации, нормальное распределение и многие другие

Статистика критерия хи-квадрат

Проверка при данном уровне значимости α гипотезы H_0 о равенстве **эмпирических частот** m_i попадания элементов выборки (значений признака) в область A_i ($i = 1, 2, \dots, k$) ($\sum_{i=1}^k m_i = n$) и **теоретических частот** $m_i' = nr_i$, где r_i – вероятность попадания признака в область A_i в соответствии с **предполагаемым** законом распределения

$$\nu = k - r - l$$

$$S = \alpha$$



Критерий Стьюдента (Т- критерий)

Проверка при заданном уровне значимости нулевой гипотезы о равенстве математических ожиданий (генеральных средних) двух нормальных генеральных совокупностей с неизвестными, но одинаковыми дисперсиями при альтернативе их неравенства

(малые независимые выборки)

Стьюдент - Госсетт, Уильям Сили (1876 – 1937)



- Изучал химию в дублинском университете
- Мастер-пивовар у Гиннеса (с 1899), поставить пивоварение на научную основу. Работа в биометрической лаборатории Карла Пирсона. Решил проблему вариаций данных и развил новые методы.
- В 1907 вернулся к Гиннесу главным пивоваром. Из-за связей с фирмой не мог публиковаться под настоящим именем.
- Метод для работы с малыми выборками – критерий Стьюдента.

Критерий Стьюдента (Т- критерий)

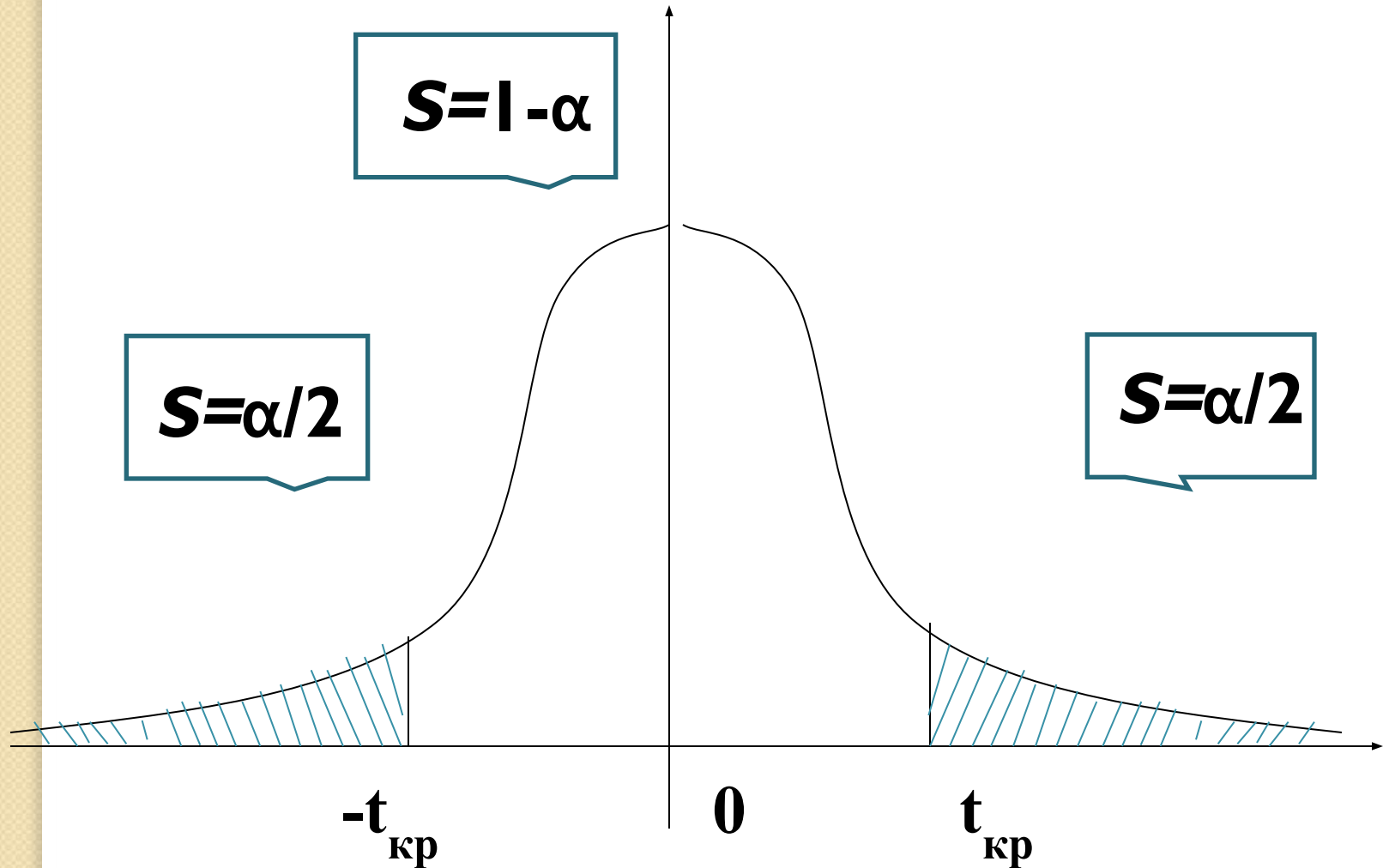
- 1. Вычисление наблюдаемого значения критерия

$$T_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

Критерий Стьюдента (Т- критерий)

- 2. По таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = n+m-2$ найти критическую точку (двустороннюю) - t .
- 3. Если $|T_{\text{набл}}| > t$, нулевую гипотезу отвергают. Иначе нет оснований отвергнуть гипотезу.

Критерий Стьюдента (Т- критерий)



Критерий Фишера – Снедекора (F-критерий)

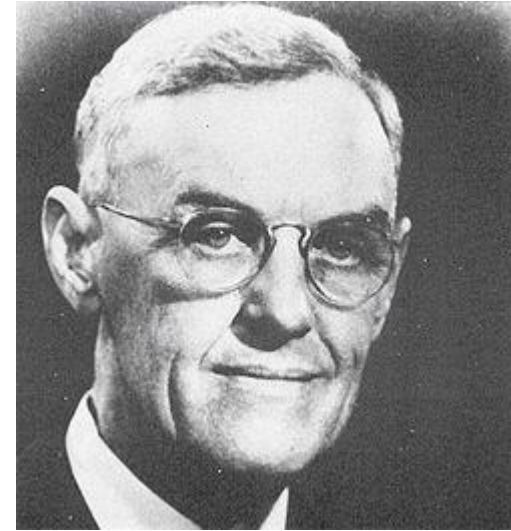
Проверка при данном уровне значимости гипотезы (нулевой гипотезы) о равенстве генеральных дисперсий (т.е. дисперсий двух генеральных совокупностей) при конкурирующей гипотезе неравенства этих дисперсий.

Фишер, Рональд Эйлмер (1890-1962)



- статистик (с 1919) на старейшей опытной агрономической станции в Великобритании.
- Формальные статистические методы для анализа экспериментальных данных. Выводы по выборке.
- Табак и рак легких (статистический спор).

Снедекор, Джордж Уоддел (1881-1974)



- американский математик и статистик.
- ученик знаменитого статистика Рональда Фишера.
- Существует мнение, что F-распределение рассчитал именно он и назвал его в честь своего учителя.
- основал первый в США факультет статистики в Государственном Университете Айовы.

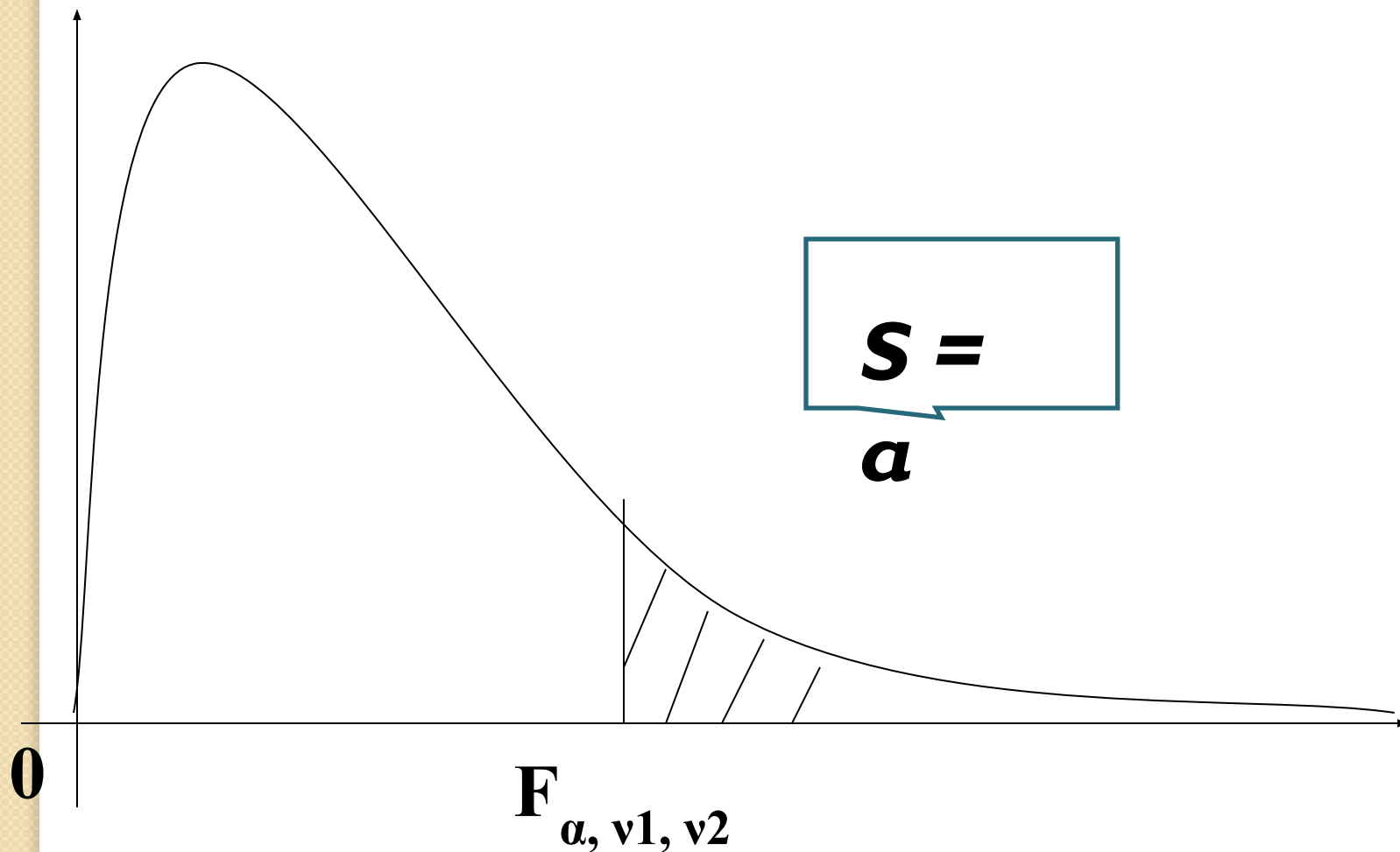
Критерий Фишера – Снедекора (F-критерий)

- 1. Вычислить наблюдаемое значение критерия - отношение большой исправленной дисперсии к меньшей.
- $F_{\text{набл}} = s_1^2 / s_2^2$
- 2. Найти число степеней свободы исправленных дисперсий:
 - $\nu_1 = n_1 - 1$ (большая)
 - $\nu_2 = n_2 - 1$ (меньшая)

Критерий Фишера – Снедекора (F-критерий)

- 3. По таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора по уровню значимости $\alpha / 2$ (вдвое меньше заданного значения) и числам степеней свободы ν_1 и ν_2 найти $F_{кр}$ - критическую точку.
- 4. Если $F_{набл} < F_{кр}$ - нет оснований отвергать нулевую гипотезу. Если $F_{набл} > F_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергают.

Критерий Фишера – Снедекора (F-критерий)



Критерий Стьюдента (Т- критерий)

Даны два ряда выборочных значений X и Y . Полагая, что имеет место нормальное распределение двумерной генеральной совокупности, проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции.

Критерий Стьюдента (Т- критерий)

- 1. Найти выборочный коэффициент корреляции r .
- 2. Вычислить наблюдаемое значение критерия

$$T_{\text{набл}} = r\sqrt{n-2} / \sqrt{1-r^2}$$

Критерий Стьюдента (Т- критерий)

- 3. По таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = n-2$ найти критическую точку двусторонней критической области t .
- 4. Если $T_{\text{набл}} < t$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Иначе нулевая гипотеза отвергается

Критерий Стьюдента (Т- критерий)

- Если нулевая гипотеза принимается, то X и Y некоррелированы, в противном случае - коррелированы.