

Механика.

- Лектор:
- Парахин А.С., к. ф.-м. наук, доцент.

5. Кинематика вращательного движения твёрдого тела.

- 5.1. Поступательное и вращательное движение т.т.
- Определение.
- Твёрдым телом называется система материальных точек, силы взаимодействия между которыми таковы, что расстояние между любыми двумя точками тела неизменно.

Поступательное движение.

- Определение.
- Поступательным движением т.т. называется такое движение, при котором прямая, проходящая через любые две точки т.т. остаётся параллельной самой себе.
- При поступательном движении скорости и ускорения всех точек тела одинаковые. Одинаковыми являются и ускорения.

Вращательное движение.

- Определение.
- Вращательным движением т.т. называется такое его движение, при котором все точки т.т. движутся по окружностям.

Ось вращения.

- Поскольку т.т. есть твёрдое, плоскости окружностей, по которым движутся точки т.т., должны быть взаимно параллельны. По той же причине, центры всех окружностей должны лежать на одной прямой, перпендикулярной плоскостям окружностей. Эта прямая неподвижна в процессе вращения т.т.

Определение оси вращения.

- Определение.
- Прямая, на которой лежат центры окружностей точек т.т. в процессе вращения т.т. и остающаяся неподвижной, и называется осью вращения т.т.

5.2. Угловые кинематические характеристики.

- Определение.
- Угол поворота т.т. вокруг оси относительно некоторого начального положения называется угловой координатой.
- Угловая координата может быть положительной, может быть отрицательной. Обозначается φ и измеряется в радианах.

Угловое перемещение.

- Определение.
- Изменение угловой за некоторый промежуток времени называется угловым перемещением за этот промежуток времени.

Правило буравчика.

- Угловое перемещение есть векторная величина. Оно направлено по оси вращения и подчиняется правилу правого винта или правилу буравчика: если буравчик вращать, как вращается тело, то вкручивание буравчика по резьбе укажет направление углового перемещения.

Угловая скорость.

- Определение.
- Угловой скоростью вращения т.т. называется векторная физическая величина, равная производной от угловой координаты по времени.
- Обозначается $\vec{\omega}$, и по определению:
- $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

Следствия из определения угловой скорости:

-
- 1. Вектор. Направлен по оси вращения, подчиняется правилу буравчика.
- 2. Размерность. $[\omega] = \frac{[\varphi]}{[t]} = \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$

Проекции на ось вращения.

- В проекции на ось вращения

- $\omega_s = \frac{d\varphi_s}{dt}$

Связь углового и линейного перемещения.

- Между угловой скоростью и линейной существует связь. Если за некоторое время dt тело повернётся на угол $d\varphi$, то точка, отстоящая от оси вращения на расстояние r , совершит элементарное перемещение
- $dr = r d\varphi$

Связь угловой и линейной скорости.

- Разделим на элементарный промежуток времени:
- $\frac{dr}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}$
- Выражение слева есть модуль линейной скорости, а дробь справа есть модуль угловой скорости. Так что:
- $v = r\omega$

Векторная связь угловой и линейной скорости.

- Кроме того, эти три величины есть векторы и в данной последовательности образуют правую тройку векторов, а угол между радиусом вектором и угловой скоростью равен 90 градусов, так что линейную скорость можно выразить векторным произведением:
- $\vec{v} = [\vec{r}, \vec{\omega}]$

Угловое ускорение.

- Определение.
- Угловым ускорением называется векторная физическая величина, равная производной от угловой координаты по времени.
- Обозначается $\vec{\varepsilon}$ и по определению:
- $$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Следствия из определения углового ускорения:

- 1. Вектор. Направлен по оси вращения, если угловая скорость растёт, он сонаправлен со скоростью, в противном случае противоположно направлен.
- 2. Размерность. $[\varepsilon] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$

5.3. Законы вращения.

- Если известна угловая скорость вращения, то из её определения:
- $\omega_s = \frac{d\varphi_s}{dt}$
- следует:
- $d\varphi_s = \omega_s dt.$

Закон вращения

- Проинтегрируем по времени
- $\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi_s = \int_0^t \omega_s dt$
- Получим:
- $\varphi - \varphi_0 = \int_0^t \omega_s dt \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega_s dt$

Закон равномерного вращения

- Это есть закон вращения т.т. в самом общем случае, когда известна угловая скорость. В частности, если скорость есть постоянная величина:
- $\varphi = \varphi_0 + \omega_s t$
- Вращение с постоянной скоростью называется равномерным. Так что получили закон равномерного вращения.

Закон изменения угловой скорости.

- Если же скорость неизвестна, её можно найти из определения ускорения.
- $\varepsilon_s = \frac{d\omega_s}{dt} \Rightarrow d\omega_s = \varepsilon_s dt$
- Если снова проинтегрировать, получим
- $\omega_s - \omega_{0s} = \int_0^t \varepsilon_s dt \Rightarrow \omega_s = \omega_{0s} + \int_0^t \varepsilon_s dt$

Закон равнопеременного вращения

- Это есть закон изменения угловой скорости в самом общем случае. Если ускорение есть постоянная величина,
- $\omega_s = \omega_{0s} + \varepsilon_s t$
- Вращение с постоянным ускорением называется равно переменным. Значит, это равенство есть закон изменения скорости для равнопеременного вращения.

6. Динамика вращательного движения.

- 6.1. Основное уравнение динамики вращательного движения.
- Опыт показывает, что угловое ускорение т.т. также определяется силами, действующими на т.т.

Зависимость от расстояния до оси

- Однако, эффективность действия этих сил определяется не только величиной силы, но и точкой её приложения. Чем дальше точка приложения от оси вращения, тем эффективнее действует сила – она вызывает большее ускорение.

Момент силы.

- Поэтому вместо силы используют так называемый момент силы.
- Определение.
- Моментом силы называется векторная величина, равная произведению радиуса вектора точки приложения на саму силу.
- Обозначается $\vec{M}$ и по определению:
- $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$

Следствия из определения момента силы:

- 1. Вектор. Направлен перпендикулярно к радиусу вектору точки приложения и к самой силе. Если сила перпендикулярна оси, то момент силы направлен по оси. Направление определяется правилом буравчика: если буравчик вращать так, как старается повернуть тело сила, то вкручивание буравчика покажет направление момента силы.
- 2. Размерность. $[M] = [r][F] = \text{м} \cdot \text{Н}$

Плечо силы

- Модуль момента силы определяется по правилу определения модуля векторного произведения:
- $M = rF \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}})$
- Определение.
- Физическая величина, равная расстоянию линии действия силы до оси вращения называется плечом силы.

Выражение момента через плечо

- Обозначается l . В том случае, когда сила перпендикулярна оси вращения,
- $l = r \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}})$
- Так что в этом случае модуль момента силы равен:
- $M = lF$

Инертность во вращении

- По-другому во вращении определяется и инертность тела. Она по-прежнему определяется массой, но, кроме того также зависит от расстояния данной точки до оси вращения. При чём эта зависимость квадратичная.

Момент материальной точки

- Определение.
- Моментом инерции м.т. называется физическая величина равная произведению массы точки на квадрат её расстояния до оси вращения.
- Обозначается I и по определению
- $I = mr^2$

Момент инерции т.т.

- Момент инерции т.т. равен сумме моментов инерции его частичек.
- $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$
- Следствия: 1.Скаляр, 2.Размерность есть $\text{кг} \cdot \text{м}^2$

Моменты инерции разных тел

- Для разных тел момент инерции вычисляется по-разному. Так для обруча относительно оси, перпендикулярной обручу и проходящей через центр, момент инерции равен $I_{\text{обр}} = mr^2$, для диска $I_{\text{диск}} = 0.5mr^2$, для шара $I_{\text{шар}} = 0.4mr^2$.

Основное уравнение динамики вращательного движения.

- С использованием момента силы и момента инерции второй закон Ньютона для вращения можно записать так:

- $$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$$

Формулировка закона.

- Этот закон гласит:
- Угловое ускорение т.т. прямо пропорционально моменту сил, действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела и направлено в сторону действия момента сил.

6.2. Работа сил при вращении.

- Пусть под действием сил т.т. совершило элементарное угловое перемещение $d\vec{\varphi}$. Тогда частица с номером i совершила линейное перемещение $d\vec{r}_i = [d\vec{\varphi}, \vec{r}_i]$, а сила $\vec{F}_i$, действующая на эту частицу тела совершила работу
- $$dA_i = (\vec{F}_i, d\vec{r}_i) = (\vec{F}_i, [d\vec{\varphi}, \vec{r}_i]) = (d\vec{\varphi}, [\vec{r}_i, \vec{F}_i]) = (d\vec{\varphi}, \vec{M}_i)$$

Элементарная работа сил над всем телом

- Чтобы найти полную работу, совершённую всеми силами над всем телом, нужно просуммировать по всем частицам:
- $dA = \sum_{i=1}^n (d\vec{\varphi}, \vec{M}_i) = (d\vec{\varphi}, \vec{M})$

Выражение элементарной работы

- Таким образом, элементарная работа по вращению т.т. равна скалярному произведению элементарного перемещения на момент всех сил. Согласно определению скалярного произведения:
- $dA = d\varphi M \cos(\widehat{d\vec{\varphi}, \vec{M}})$

Выражение работы через проекции

- Но $M \cos(\widehat{d\vec{\varphi}, \vec{M}}) = M_s$ есть проекция момента силы на ось вращения. Так что элементарную работу можно представить следующим образом:
- $dA = M_s d\varphi_s$

Конечная работа

- А конечная работа может быть найдена интегрированием:
- $A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_s d\varphi_s$

Кинетическая энергия вращения

- Найдём теперь кинетическую энергию тела:

$$\begin{aligned} \bullet \quad E_k &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i [\vec{r}_i, \vec{\omega}]^2}{2} = \\ &= \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2} \end{aligned}$$

Закон изменения кинетической энергии вращения

- Теперь можно записать закон изменения кинетической энергии вращения т.т. в элементах:

- $$dE_k = d\frac{I\omega^2}{2} = dA = M_s d\varphi_s$$

- Спасибо за
внимание.