Решение задач С2.

Нахождение расстояния между двумя скрещивающимися прямыми

- Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Для решения задач подобного типа существует несколько методов решения.

- 1. (Метод построения общего перпендикуляра или поэтапно-вычислительный метод). В этом случае строится общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный каждой из них) и находится его длина

- 2. (Метод параллельных прямой и плоскости). В этом случае строится плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстояние от ка- кой-нибудь точки второй прямой до по- строенной плоскости.

- 3. (Метод параллельных плоскостей). В этом случае данные скрещивающиеся прямые заключаются в параллельные плоскости, проходящие через них, и находится расстояние между эти- ми плоскостями.

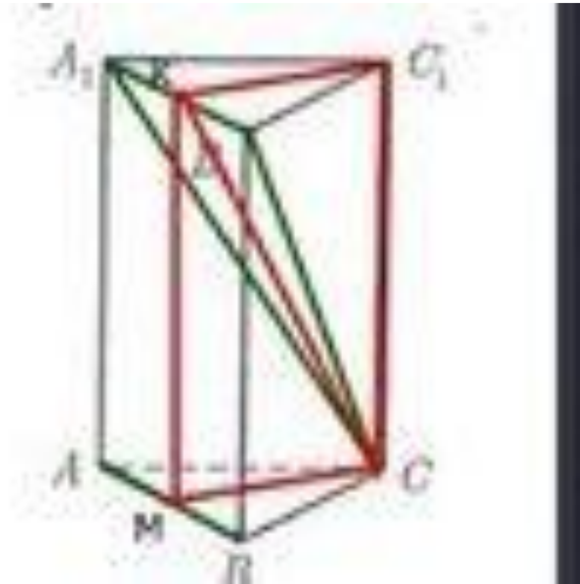
Рассмотрим решение задачи

В правильной треугольной призме ABCA 1 B 1 C 1, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CB 1

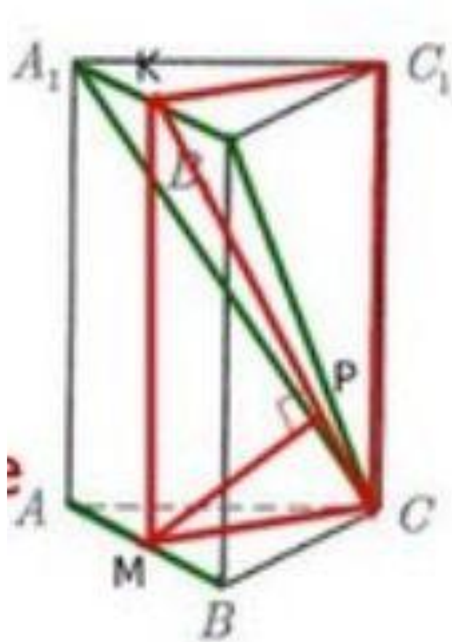
- Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой. Чтобы найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, нужно:
- 1. Через одну из прямых провести плоскость, параллельную второй прямой.
- 2. Из любой точки первой прямой опустить перпендикуляр на плоскость и найти его длину. То есть задача сводится к нахождению расстояния от точки до плоскости. Это можно сделать геометрическим методом или с помощью метода координат.

Решение геометрическим методом

- Возьмем точку М, являющуюся серединой отрезка АВ. Проведем через эту точку плоскость МСС 1. Докажем, что плоскость МСС 1 перпендикулярна прямой АВ, и, следовательно, плоскости А 1 В 1 С: Отрезок МС является медианой, и, следовательно, высотой равностороннего треугольника АВС. Прямая КМ параллельна прямой СС 1 и, следовательно, перпендикулярна АВ. То есть прямая АВ перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости МСС 1, и, следовательно перпендикулярна плоскости.



Теперь рассмотрим в плоскости МСС 1 прямоугольный треугольник МКС и проведем в нем высоту МР: Длина высоты МР треугольника и есть расстояние между прямыми АВ и СВ 1, которой нам нужно найти.



Чтобы найти высоту МР, выразим два раза площадь треугольника МКС

$$S = \frac{1}{2} KM \cdot MC = \frac{1}{2} KC \cdot MP$$

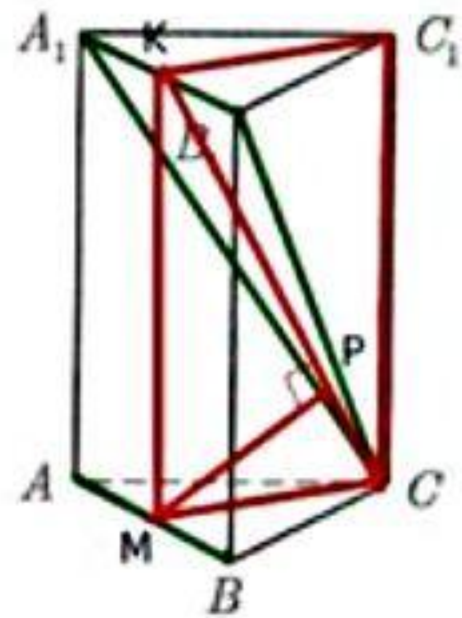
$$KM \cdot MC = KC \cdot MP$$

$$KM = 1 \qquad MC = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$KC = \sqrt{1 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot MP$$

$$MP = \frac{\sqrt{21}}{7}$$



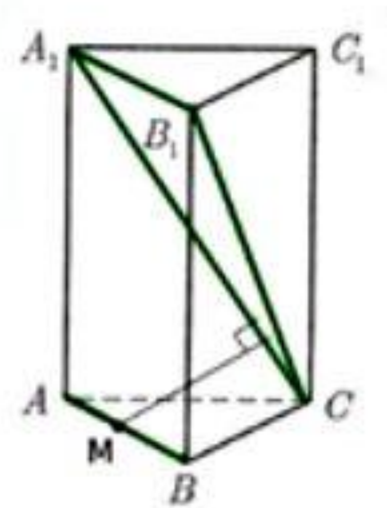
Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Аналитический способ решения задачи

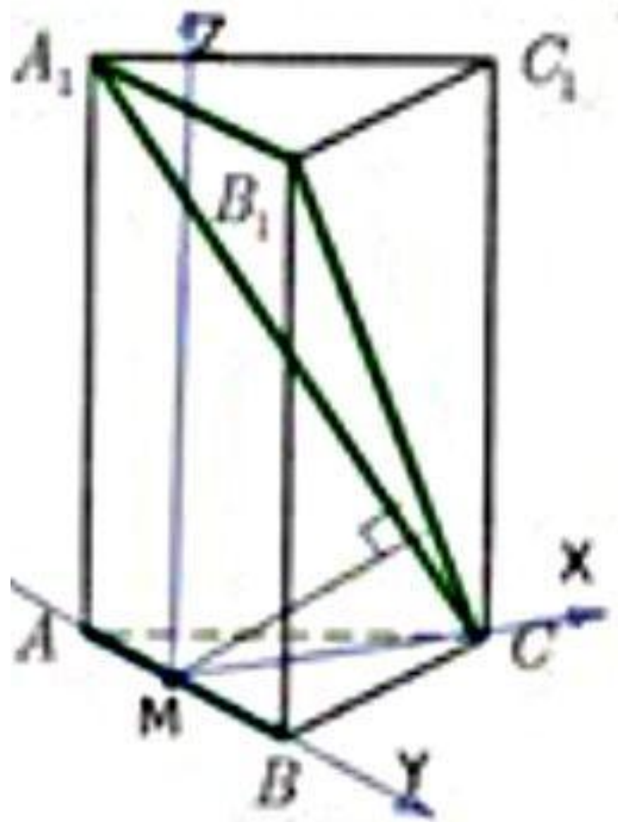
- Как мы помним из геометрического метода решения это задачи, расстояние между прямыми АВ и A_1C есть расстояние от точки М, которая является серединой отрезка АВ до плоскости B_1A_1C:

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$ вычисляется по такой формуле:

$$\rho = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

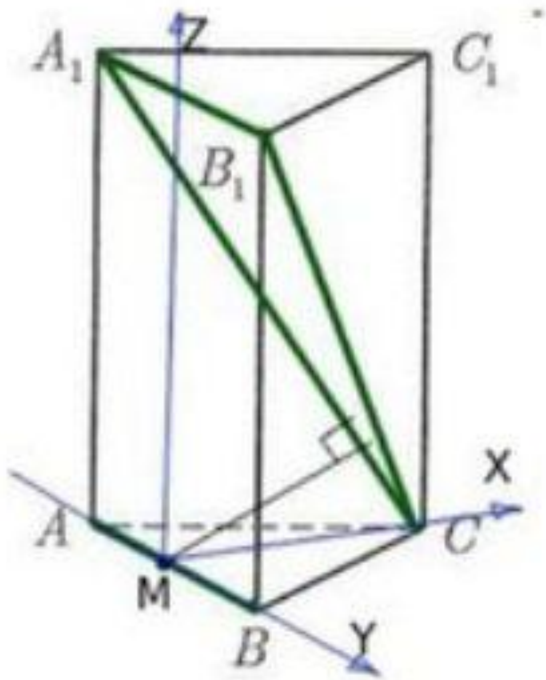


- Нам надо выбрать систему координат таким образом, чтобы координаты точки М и точек А 1, В 1 и С, задающих плоскость А 1 В 1 С вычислялись наиболее простым способом и содержали как можно больше нулей. Поэтому удобно выбрать систему координат вот таким образом: Поместим нашу призму в систему координат. Если мы решаем задачу с кубом или прямоугольным параллелепипедом, то выбор системы координат очевиден: мы помещаем начало координат в одну из вершин куба, а оси направляем вдоль ребер. В случае призмы это не столь очевидно.



A_1
C_1
B_1
X
A
M
C
B
Y

Запишем координаты получившихся точек



$M(0;\ 0;\ 0)$

$A_1(0;-\frac{1}{2};1)$

$B_1(0;\frac{1}{2};1)$

$C(\frac{\sqrt{3}}{2};0;0)$

- Чтобы найти коэффициенты a, b, c и d в уравнении $ax+by+cz+d=0$ плоскости A_1B_1C, примем коэффициент $d=1$, и подставим координаты точек A_1, B_1 и C в уравнение плоскости. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0\cdot a-\frac{1}{2}b+c+1=0 \\ 0\cdot a+\frac{1}{2}b+c+1=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+0\cdot b+0\cdot c+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{2}b+c+1=0 \\ \frac{1}{2}b+c+1=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+1=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a&=-\frac{2}{\sqrt{3}} \\ b&=0 \\ c&=-1 \end{aligned}$$

Подставим значения коэффициентов и координаты точки M(0;0;0) в формулу для расстояния.

$$\rho = \frac{\left|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Получим:

$$\rho = \frac{\left|-\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1\right|}{\sqrt{(-\frac{2}{\sqrt{3}})^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3} + 1}} = 1 : \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$