Уральский федеральный университет

Дифференциальные уравнения и ряды

Лекция 12

§7. Применение рядов Тейлора

1. Вычисление приближенных значений функции

Для решения этой задачи используется и формула Тейлора, но преимуществом ряда Тейлора является то, что остаток ряда $R_n(x)$ оценить проще, чем остаточный член формулы Тейлора.

Основные приемы оценки остатка ряда:

- для знакочередующегося ряда $\left|R_n(x)\right| \le \left|u_{n+1}(x)\right|$;

- если ряд не является знакочередующимся, то остаток оценивают с помощью бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

- иногда для оценки положительных рядов удобна оценка $R_n(x) \le \int_n^{\infty} f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывная монотонно убывающая на промежутке $[1; +\infty)$ функция такая, что $f(i) = a_i$ (a_i − i-ый член ряда).

Пример 1. Вычислить ln 2 с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Воспользуемся разложением $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \; x \in (-1, 1]$.

Подставляем $x = 1$ (учитываем, что точка входит в область сходимости) и получаем $\ln 2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Применим формулу оценки остатка для знакочередующегося ряда и выясним сколько слагаемых нужно взять для достижения указанной точности

$$\left|R_n\right| \le \left|a_{n+1}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \le 10^{-2} \;\Rightarrow\; n+1 \ge 100 \Rightarrow\; n \ge 101.$$

Начиная со 101 номера получаем слагаемые, которые меньше ε. Т.е. нужно вычислить сумму 100 первых членов ряда, что весьма затруднительно.

Поэтому будем использовать другую функцию для вычисления указанного значения: $\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

Найдем разложение этой функции в ряд Маклорена:

$$\ln\frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+\quad).$$

Из разложения $\ln(1+x)$ получим разложение $\ln(1-x)$ путем смены знака при x:

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x^n}{n}, \quad \in[-1, 1).$$

$$\ln\frac{1-x}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$ [объединяем в один ряд]

$$=\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\ldots\right)=$$

$$=-2x-2\frac{x^3}{3}-\ldots-2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\ldots=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Область сходимости этого ряда определяем через пересечение областей сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-x^n}{n}$:

$$(-1,1]\cap[-1,1)\;\Rightarrow\;(-1,1).$$

Значит $\ln\frac{1-x}{1+x}=-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\; x\in(-1,1).$

При $x = \frac{1}{3}$ получим

$$\ln\frac{1+1/3}{1-1/3} = \ln 2 = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1/3)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{2n-1}(2n-1)},\ \ x = \frac{1}{3} \in (-1,\, 1).$$

Здесь уже имеем знакоположительный ряд, поэтому остаток оцениваем с помощью бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{3^{2k-1}(2k-1)} \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{3^{2k-1}} = \frac{2}{3^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{3^{2n}} \le 10^{-2}.$$

Из последнего неравенства найдем n ($n \in N$):

$$\frac{1}{3^{2n}} \le 10^{-2} \Rightarrow 3^{2n} \ge 100 \Rightarrow 2n \ge 5 \Rightarrow n \ge 3.$$

Значит, для достижения указанной точности нужно взять три первых члена ряда.

$$\ln 2 \approx \sum_{n=1}^{3} \frac{2}{3^{2n-1}(2n-1)} = \frac{2}{3 \cdot 1} + \frac{2}{27 \cdot 3} + \frac{2}{243 \cdot 5} = \frac{842}{1215} = 0,693... \approx 0,69.$$

Результат округляем до второго знака после запятой, т. к. $\varepsilon = 10^{-2}$. Ответ гарантирует один верный знак после запятой.

Ответ. $\ln 2 \approx \sum_{n=1}^{3} \frac{2}{3^{2n-1}(2n-1)} \approx 0,69$ с точностью 10^{-2}.

2. Вычисление интегралов

Ряды применяются в тех случаях, когда интеграл неберущийся или хотя и берущийся, но имеет громоздкую первообразную.

Разложение функции в степенной ряд позволяет интегрировать функцию, почленно интегрируя ее ряд в области сходимости.

Пример 2. Вычислить приближенное значение интеграла $\int_{0,1}^{0,2} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Воспользуемся разложением

$$(1+t)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} t^n, \; t \in (-1, 1).$$

Можно ряд записать в виде: $(1+t)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} t^n.$

У нас $t = x^3$, $\alpha = 1/3$:

$$\sqrt[3]{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot(-2)\ldots(-3n+4)}{3^n\cdot n!} x^{3n},$$

$$x^3 \in (-1, 1) \;\Rightarrow\; x \in (-1, 1).$$

Теперь, учитывая, что промежуток интегрирования находится в области сходимости, находим интеграл, почленно интегрируя ряд:

$$I = \int_{0,1}^{0,2} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx = \int_{0,1}^{0,2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot(-2)\ldots(-3n+4)}{3^n \cdot n!} x^{3n} \right) dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1\cdot(-2)\ldots(-3n+4)}{3^n \cdot n!} \int_{0,1}^{0,2} x^{3n}\,dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1\cdot(-2)\ldots(-3n+4)}{3^n \cdot n!} \left. \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \right|_{0,1}^{0,2} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1\cdot(-2)\ldots(-3n+4)}{3^n \cdot n!} \frac{(0,2)^{3n+1}}{3n+1} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1\cdot(-2)\ldots(-3n+4)}{3^n \cdot n!} \frac{(0,1)^{3n+1}}{3n+1} \right).$$

Начиная со второго слагаемого получим чередование знаков, т.к. каждая новая скобка в числителе первой дроби меняет знак на противоположный.

Будем вычислять сумму отдельно для каждого ряда с указанной точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ (члены ряда берем до тех пор, пока не получим значение, по модулю не превосходящее ε):

$$S_{верхн} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot(-2)\ldots(-3n+4)\cdot(0,2)^{3n+1}}{3^n\cdot n!\cdot(3n+1)}\right) =$$

$$= \underbrace{0,2}_{>\varepsilon} + \underbrace{\frac{(0,2)^4}{3\cdot 4}}_{=0,0001(3)>\varepsilon} - \underbrace{\frac{2\cdot(0,2)^7}{9\cdot 2\cdot 7}}_{=0,0000002\ldots<\varepsilon} + \ldots \approx 0,2 + 0,000133 \approx 0,20013.$$

На промежуточных этапах вычислений берем цифры с запасом, т.к. преждевременные округления дают дополнительную погрешность.

$$S_{нижн}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot(-2)\ldots(-3n+4)\cdot(0,1)^{3n+1}}{3^n\cdot n!\cdot(3n+1)}\right)=$$

$$=\underbrace{0,1}_{>\varepsilon}+\underbrace{\frac{(0,1)^4}{3\cdot 4}}_{=0,000008(3)<\varepsilon}-\ldots\approx 0,10000.$$

В ответе пишем 5 знаков после запятой с учетом ε, при этом гарантированы 4 верных знака после запятой.

$$I=S_{верхн}-S_{нижн}\approx 0,20013-0,10000=0,10013.$$

Ответ. $I\approx 0,10013$ с точностью $\varepsilon=10^{-5}$. Для достижения нужной точности на верхнем пределе интегрирования взяли 2 члена ряда, на нижнем − 1 член ряда.

3. Решение дифференциальных уравнений

Решение многих нетривиальных ДУ можно найти в виде ряда. Например, в виде ряда Тейлора (или его частичной суммы). Метод последовательного дифференцирования применяется для ДУ, разрешенных относительно старшей производной, при наличии начальных условий.

Пример 3.1. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = y\ln(xy) - x^y$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$. Найти четыре члена ряда.

Ищем решение в виде ряда Тейлора в окрестности начальной точки $x_0 = 1$

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots$$

Первое слагаемое находим из начального условия:

$y(1) = 1$. Далее, из ДУ $y'(1)=1\cdot\ln(1)-1^1=-1$.

Дифференцируем ДУ, учитывая, что $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ и y зависит от x:

$$y''=(y(\ln x+\ln y)-x^y)'=y'(\ln x+\ln y)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{y'}{y}\right)-$$
$$-\left(yx^{y-1}+x^y y'\ln x\right).$$

Для последнего слагаемого использовали формулу дифференцирования степенно-показательной функции:

$$\left(f^g\right)'=g\cdot f^{g-1}\cdot f'+f^g\cdot g'\cdot\ln f.$$

Находим $y''(1) = -1\cdot 0 + (1-1) - (1+0) = -1.$

Теперь вычисляем 3 производную для y:

$$y''' = (y'')' = \left(y'(\ln x + \ln y) + \frac{y}{x} + y' - x^{y}\left(yx^{-1} + y'\ln x \right) \right)' =$$

$$= y''(\ln x + \ln y) + y'\left(\frac{1}{x} + \frac{y'}{y} \right) + \frac{y'x - y}{x^{2}} + y'' -$$

$$-\left(yx^{y-1} + x^{y}y'\ln x \right)\left(yx^{-1} + y'\ln x \right) - x^{y}\left(y'x^{-1} - yx^{-2} + y''\ln x + y'x^{-1} \right).$$

Тогда

$$y'''(1) = -1\cdot 0 - 1\cdot(1-1) + \frac{-1-1}{1} - 1 - (1+0)(1+0) - 1\cdot(-1-1+0-1) =$$

$$= -2 - 1 - 1 + 3 = -1.$$

Искомое решение ДУ в окрестности $x_0 = 1$ имеет вид:

$$y(x) \approx 1 + \frac{-1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{-1}{3!}(x-1)^3 =$$

$$= 1 - (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6}.$$

Ответ. $y(x) \approx 1 - (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(x-1)^3}{6}.$

Замечение. При $x_0 \neq 0$ получаем разложение по степеням $(x - x_0)$ и ответ записываем в таком же виде, не раскрывая скобок.

Пример 3.2. Найти первые четыре члена (отличных от нуля) разложения в степенной ряд решения уравнения

$$y'' = 2xy + y^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

В ответе записать соответствующее решение ДУ.

Здесь начальное условие задано в нуле, поэтому ищем решение в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Первые два ненулевых члена найдем из начальных условий $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$. Нужно найти еще два ненулевых члена ряда.

Из ДУ находим $y''(0) = 0 + 1 = 1.$

Дифференцируем ДУ: $y''' = (2xy + y^2)' = 2(y + xy') + 2yy'$

и находим $y'''(0) = 2 + 0 - 2 = 0.$

Получили нулевой коэффициент при x^3, поэтому вычисляем следующую производную

$$y^{IV} = 2(y + y'(x + y))' = 2(y' + y''(x + y) + y'(1 + y')).$$

Тогда $y^{IV}(0) = 2(-1 + 1(0 + 1) - 1(1 - 1)) = 2(-1 + 1) = 0.$

Вновь получили нулевой коэффициент.

Вычисляем далее:

$$y^{V} = 2(2y' + y''(x + y) + (y')^2)' = 2(2y'' + y'''(x + y) + y''(1 + y') + 2y'y'');$$

$$y^{V}(0) = 2(2 + 0 + 1 \cdot (1 - 1) - 2) = 0;$$

$$y^{VI} = 2(3y'' + y'''(x + y) + 3y'y'')' =$$

$$= 2(3y''' + y^{IV}(x + y) + y'''(1 + y') + 3((y'')^2 + y'y'''));$$

$$y^{VI}(0) = 2(0+0+0+3(1+0)) = 6.$$

Искомое решение ДУ в окрестности нуля имеет вид:

$$y(x) = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^4 + 0\cdot x^5 + \frac{6}{6!}x^6 + \ldots \approx$$

$$\approx 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{120}.$$

Ответ. $y(x) \approx 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^6}{120}.$

§ 8. Периодические функции. Ряды Фурье

Функция называется периодической с периодом $T>0$ (или T − периодической), если для всех значений $x \in X$ выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

Простейшими периодическими функциями являются ***простые гармоники:*** $y = A\sin\left(\omega x + \varphi_0\right)$,

где $|A|$−амплитуда, ω− частота, φ_0− начальная фаза.

В механике такая функция описывает гармонические колебания точки, у которой период колебаний равен 2π/ω.

Преобразуем эту функцию к виду

$$y = A\sin(\omega x + \varphi_0) = A\sin\omega x \cdot \cos\varphi_0 + A\cos\omega x \cdot \sin\varphi_0 =$$
$$= a\cos\omega x + b\sin\omega x, \qquad \text{где } a = A\sin\varphi_0,\ b = A\cos\varphi_0.$$

Таким образом, простая гармоника имеет вид:

$$y = A\sin(\omega x + \varphi_0) = a\cos\omega x + b\sin\omega x.$$

При наложении простых гармоник получается сложное гармоническое колебание, которое описывается функцией вида

$$\varphi(x) = a_0 + (a_1\cos\omega x + b_1\sin\omega x) + (a_2\cos 2\omega x + b_2\sin 2\omega x) +$$
$$+ \ldots + (a_k\cos k\omega x + b_k\sin k\omega x)$$

или $$\varphi(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n\cos n\omega x + b_n\sin n\omega x.$$

При неограниченном возрастании *n* получим ряд, который обычно записывают в виде

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)$$

и называют тригонометрическим рядом; числа a_0, a_n, b_n называют коэффициентами ряда.

Если ряд сходится, то его сумма $S(x)$ является $2\pi/\omega-$периодической функцией.

Пусть $f(x)$ произвольная периодическая функция с периодом $2l$. Предположим, что $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, т.е. является его суммой:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x). \qquad (1)$$

Так как сумма является $2\pi/\omega$ − периодической функцей, то $2l=2\pi/\omega$ и $\omega=\pi/l$.

Если равенство (1) выполняется во всех точках непрерывности функции $f(x)$, то ряд, стоящий в правой части этого равенства, называется ***рядом Фурье*** функции $f(x)$, а сама функция называется разложимой в ряд Фурье.

Теорема 1 (Дирихле).

Если $2l$–периодическая функция $f(x)$ является кусочно-монотонной и ограниченной на отрезке $[-l; l]$, то:

1) функция $f(x)$ разложима в ряд Фурье;

2) в каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда Фурье $S(x)$ равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ слева и справа, т.е.:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2};$$

3) ряд Фурье можно почленно интегрировать.

Домашнее задание.

Записать формулу для вычисления $S(x_0)$ в случае, когда x_0 не является точкой разрыва.

Теорема 2 (о коэффициентах ряда Фурье).

Если функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то коэффициенты её ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\omega x\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\omega x\,dx.$$

Коэффициенты a_0, a_n, b_n, определяемые по этим формулам, называются коэффициентами Фурье.

Замечание. Иногда удобно вычислять интегралы в указанных формулах не по отрезку $[-l;\, l]$, а по другому промежутку длиной $2l$ (в силу свойства периодических функций), например по отрезку $[0;\, 2l]$