Fizyka Ogólna

Dr Anna Przybył
Instytut Fizyki
Pokój A33

Tel: 343 250 111
przybyl@wip.pcz.pl

Plan wykładu

- Podręczniki
- Czym jest i czym zajmuje się fizyka
- Wielkości fizyczne, jednostki
- Elementy rachunku wektorowego

Podręczniki

- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Podstawy fizyki (5 tomów)
- J. Massalski, M. Massalska: Fizyka dla inżynierów, T.1 i 2
- M. Herman, A. Kalestyński, L. Widomski: Podstawy fizyki,
- Bobrowski: Kurs Fizyki,
- J. Orear: Fizyka T.1, T.2
- A. Januszajtis: Fizyka dla Politechnik, Tom I,

Czym jest fizyka ?

Fizyka jest nauką przyrodniczą badającą najbardziej podstawowe i ogólne własności otaczającego nas świata materialnego i zachodzące w tym świecie zjawiska.

Celem fizyki jest poznanie praw przyrody, od których zależą wszystkie zjawiska fizyczne.

Nasuwa się pytanie:

Jakie są cele badań fizycznych na początku 21 wieku.

Jedna z odpowiedzi mówi, że chodzi o zbadanie struktury materii oraz oddziaływań pomiędzy jej składnikami.

Do tego problemu można podejść na dwa sposoby.

Pierwszy to badania teoretyczne, a drugi badania doświadczalne.

Fizyk teoretyk

będzie starał się wyjaśnić znane zjawiska w oparciu o proste reguły, oraz przewidywać nowe prawa i zależności pomiędzy tymi zjawiskami.

Fizyk doświadczalny

ma za zadanie odkrywać i opisywać nowe zjawiska i prawidłowości nimi rządzące, lub sprawdzać doświadczalnie przewidywania teoretyczne

Szybki rozkwit nauk przyrodniczych w ostatnim czasie zawdzięczamy silnemu oddziaływaniu pomiędzy teorią a doświadczeniem.

Jako nauka przyrodnicza fizyka zajmuje się najbardziej ogólnymi cechami zjawisk zachodzących w otaczającym nas świecie. Inne nauki przyrodnicze posługują się prawami fizyki w bardziej szczegółowym badaniu tych zjawisk. Na granicy między fizyką a innymi naukami przyrodniczymi powstały i rozwijają się nowe dziedziny wiedzy, jak np.: biofizyka, astrofizyka, geofizyka, fizykoterapia, agrofizyka, bioelektronika, chemia fizyczna itp…

Istnieje ścisła więź pomiędzy fizyką a techniką. Z jednej strony technika korzysta z odkryć fizyki w zastosowaniach praktycznych, z drugiej zaś strony laboratoria fizyczne korzystają z coraz bardziej skomplikowanej aparatury naukowej, której projektowanie i wykonanie jest dziełem inżynierów i techników. Przykładem takiej współzależności jest zbudowanie lasera, który znalazł szybko zastosowanie w telekomunikacji, przy obróbce metali i w innych dziedzinach techniki. Wykorzystanie zjawiska emisji spontanicznej do budowy lasera było możliwe jednak dzięki osiągnięciom techniki w zakresie hodowli kryształów, precyzyjnej obróbki mechanicznej, budowy silnych źródeł światła itp.

Pomiędzy cząstkami elementarnymi istnieją cztery oddziaływania fundamentalne. Oddziaływania te są odpowiedzialne za siły działające pomiędzy cząstkami.

Podstawowe oddziaływania są następujące:

1. **Grawitacyjne**
2. **Elektrosłabe**
   - **Elektromagnetyczne**
     - **Elektryczne**
     - **magnetyczne**
   - **Słabe**
3. **Silne**
   - **Silne jądrowe**
   - **Silne kolorowe**

Dla opisu zjawisk fizycznych byłoby najlepiej, gdyby istniało tylko jedno oddziaływanie, zawierające w sobie wszystkie do tej pory wymienione. Jesteśmy blisko unifikacji oddziaływań słabych, elektromagnetycznych i silnych.

Cztery oddziaływania fundamentalne

z których wynikają wszystkie siły
i oddziaływania zaobserwowane we Wszechświecie:

• ***Oddziaływanie grawitacyjne*** – siła grawitacyjna działa na wszystkie masy (jest siłą powszechną) i pochodzi od mas; ma długi zasięg i najmniejsze względne natężenie;

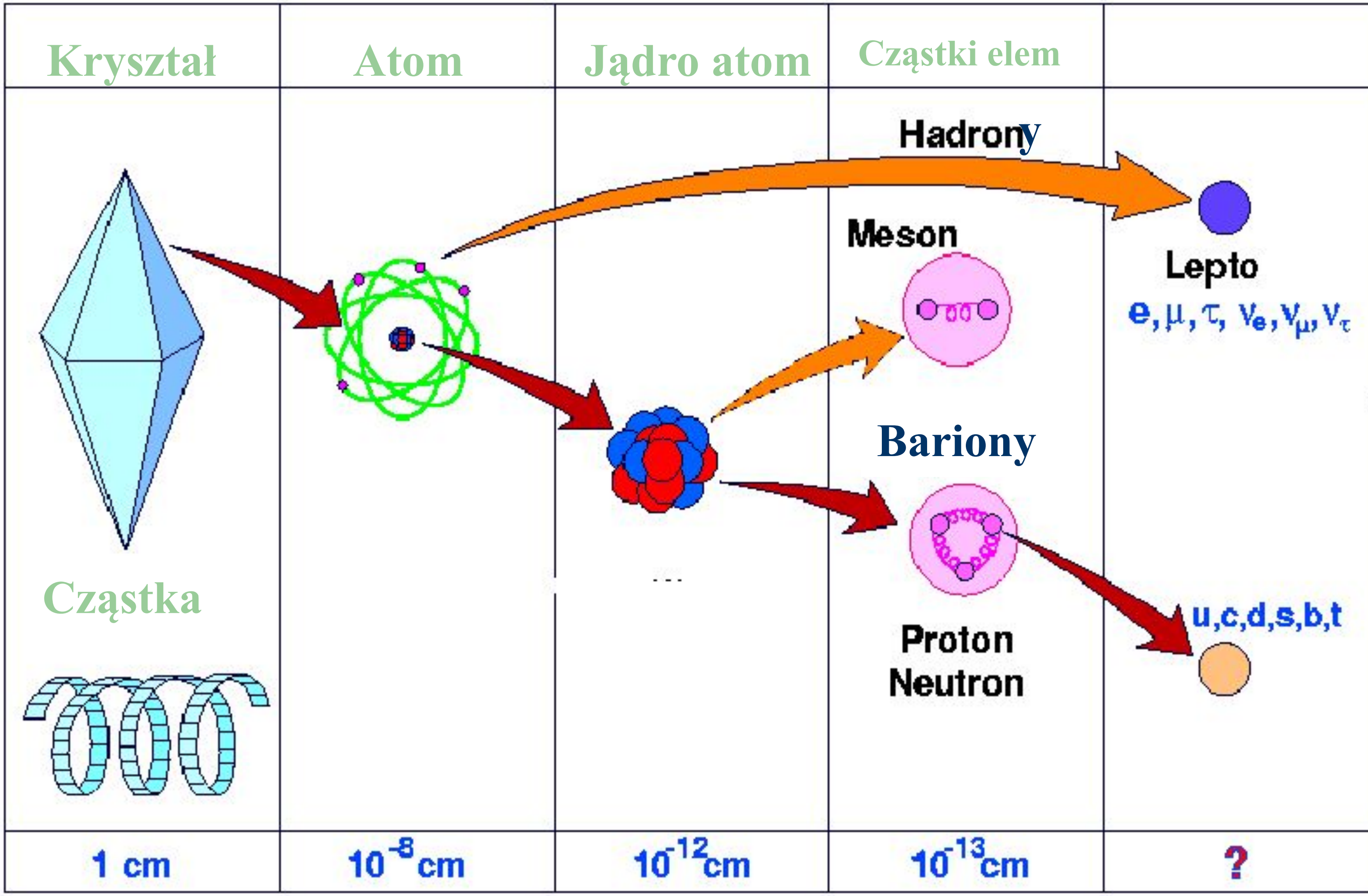
• ***Oddziaływanie elektromagnetyczne*** – siła elektromagnetyczna działa na ładunki i prądy i jej źródłem są ładunki i prądy; ma długi zasięg. Siły międzyatomowe mają charakter elektromagnetyczny ponieważ atomy zawierają naładowane elektrony i protony, a oddziaływanie elektromagnetyczne ma wielokrotnie większe natężenie od grawitacyjnego.

• ***Oddziaływanie jądrowe*** *(silne)* - siła utrzymująca w całości jądra atomowe pomimo odpychania między protonami (ładunki dodatnie), ma bardzo krótki zasięg i największe względne natężenie;

• ***Oddziaływanie słabe*** - temu oddziaływaniu podlegają wszystkie cząstki elementarne, w szczególności oddziaływanie to odpowiada za rozpady cząstek elementarnych.

Oddziaływanie	Źródło oddziaływania	Względne natężenie	Zasięg
Grawitacyjne	Masa	około 10^{-38}	Długi
Elektromagnetyczne	Ładunek elektryczny	około 10^{-2}	Długi
Jądrowe	Hadrony (protony, neutrony, mezony)	1	Krótki (około 10^{-15} m)
Słabe	cząstki elementarne	około 10^{-15}	Krótki (około 10^{-18} m)

Jakimi obiektami zajmuje się fizyka?



Jak będzie zachowywać się cząstka pod wpływem tych oddziaływań?

W większości przypadków stwierdzimy, że cząstka się porusza.

Nasuwają się więc kolejne pytania:

Jaki będzie ruch tej cząstki?
Jaki będzie jej tor ruchu?

Pierwszą próbę odpowiedzi na pytanie – jak porusza się ciało pod wpływem działania siły podjął w 1687 r. Newton.
Równania opisujące ruch, do których Newton doszedł stanowią podstawę mechaniki klasycznej. Wiążą one ze sobą pewne wielkości opisujące ruch, oraz powodującą ten ruch siłę.

Równania Newtona stanowiły rezultat obserwacji doświadczalnych. Później okazało się, że można je łatwo wyprowadzić ze znacznie ogólniejszych zasad zachowania.

Obszar zastosowań mechaniki klasycznej do zjawisk fizycznych jest bardzo szeroki.
Obejmuje on takie dziedziny jak ruch planet, ruch przedmiotów na Ziemi, działanie maszyn, rotacje, drgania, kinematykę zderzeń, szereg zjawisk termodynamicznych i wiele innych.

Okazało się jednak, że istnieje szereg zjawisk, których nie da się opisać przy pomocy mechaniki klasycznej.

Należą do nich m.in. ruchy z prędkościami zbliżonymi do prędkości światła, czy ruchy w mikroświecie.

Mechanikę klasyczną musieliśmy więc uzupełnić **teorią względności i mechaniką kwantową.**

Mechanika Newtonowska

posługiwała się pojęciem przestrzeni i czasu, przy czym czas był taki sam niezależnie od układu współrzędnych, niezależnie od tego czy układ współrzędnych się poruszał czy spoczywał.

Einstein w 1905 roku przepowiedział, że czas, który mierzy dany obserwator zależy od układu współrzędnych. Zostało to dowiedzione doświadczalnie.

Faktem jest również to, że żadne ciało nie może się poruszać z prędkością większą niż prędkość światła c.

Mechanika kwantowa

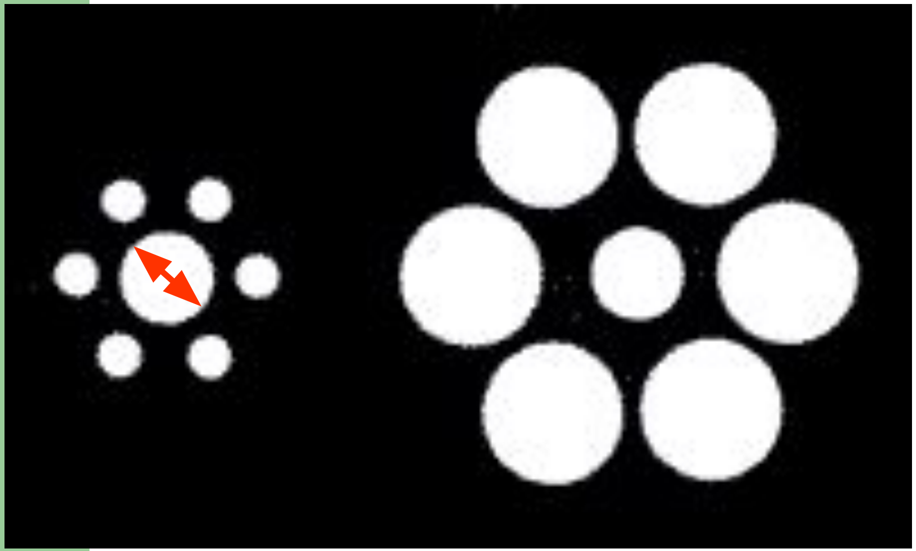
Z kolei opis ruchów w mikroświecie, jak np. nukleonów w jądrze atomowym, czy elektronów w atomie znalazł swoje rozwiązanie w latach 30 XX wieku.
Impulsem do tego była obserwacja, że **cząstki mogą zachowywać się jak fale, a fale jak cząstki.** Falowy charakter materii daje jednak znać o sobie dopiero przy ruchach w rozmiarach mikroskopowych.

W opisie zjawisk fizycznych jesteśmy zdani na własne obserwacje, które bardzo często są subiektywne. Dla jednych obserwowane ciało w ruchu będzie poruszało się wolno, dla innych szybko.

Czas również płynie różnie dla różnych osób.

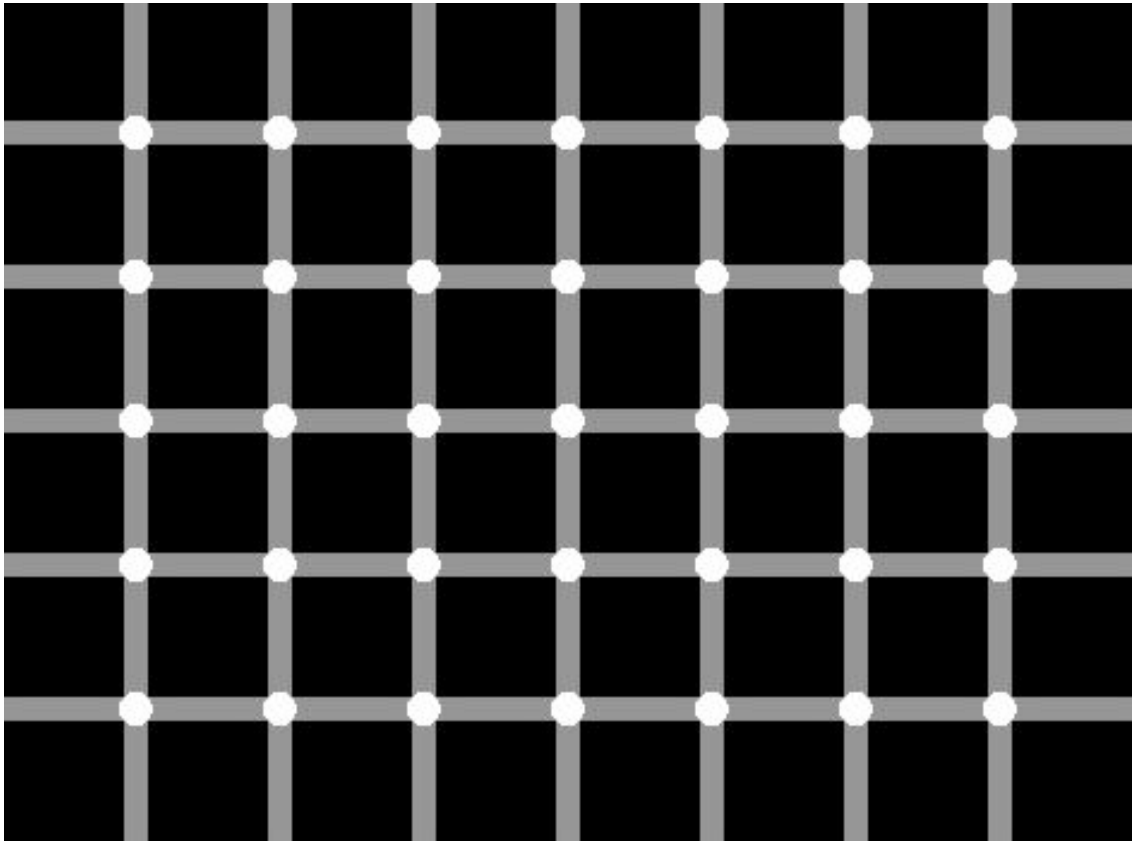
Nasze zmysły różnie reagują na odbierane bodźce.

Musimy o tych efektach pamiętać w czasie obserwacji zjawisk i wykonywania pomiarów.

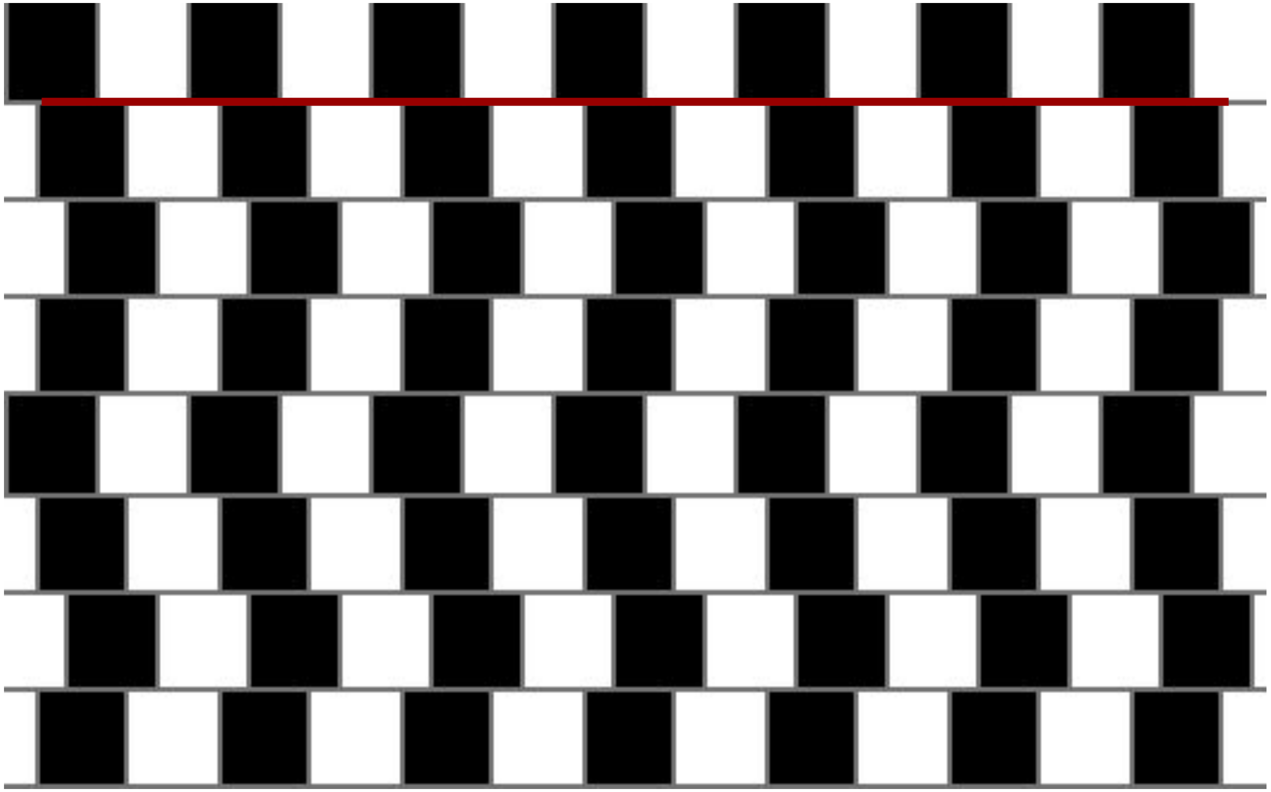


Nie wystarczy ocenić średnicy wewnętrznych okręgów, trzeba je dokładnie zmierzyć.

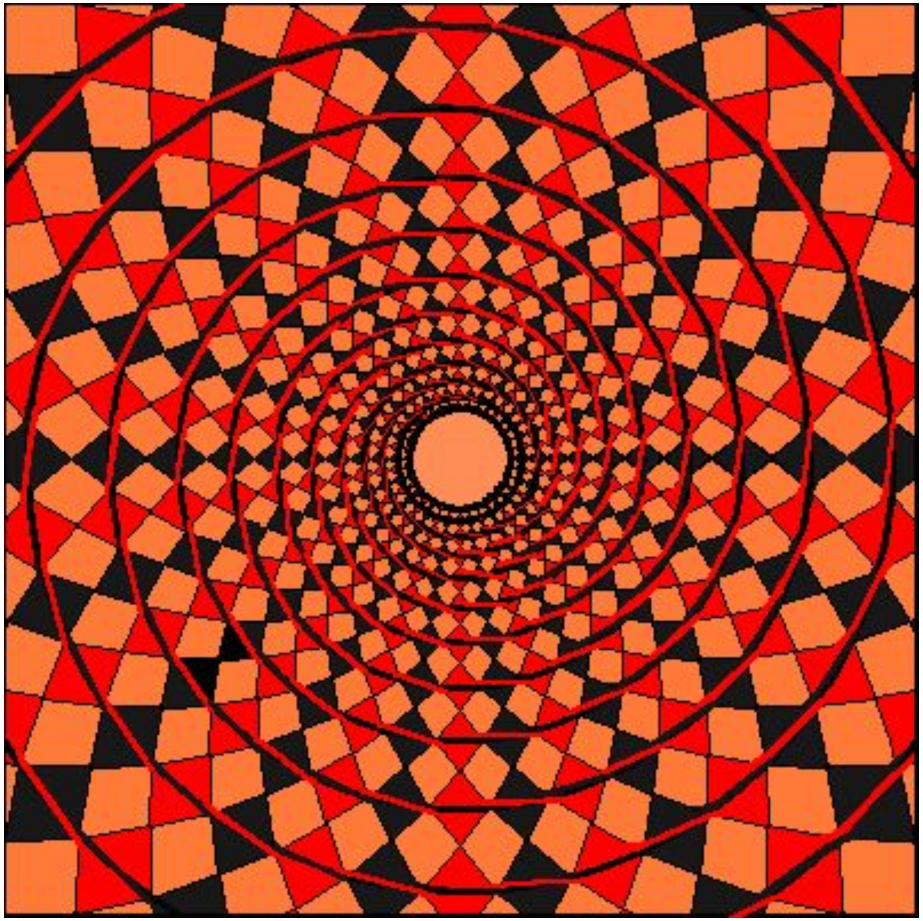
Proszę policzyć liczbę jasnych i ciemnych punktów w rogach kratek.



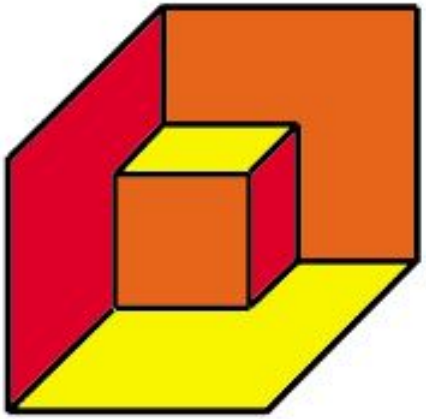
Czy któreś z poziomych wewnętrznych linii są do siebie równoległe?

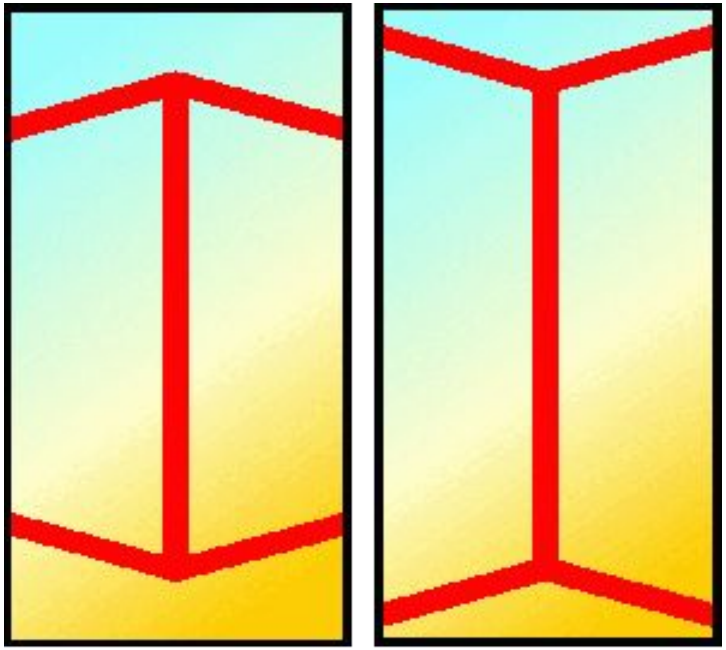


Jesteśmy prawie pewni, że widzimy spiralę.



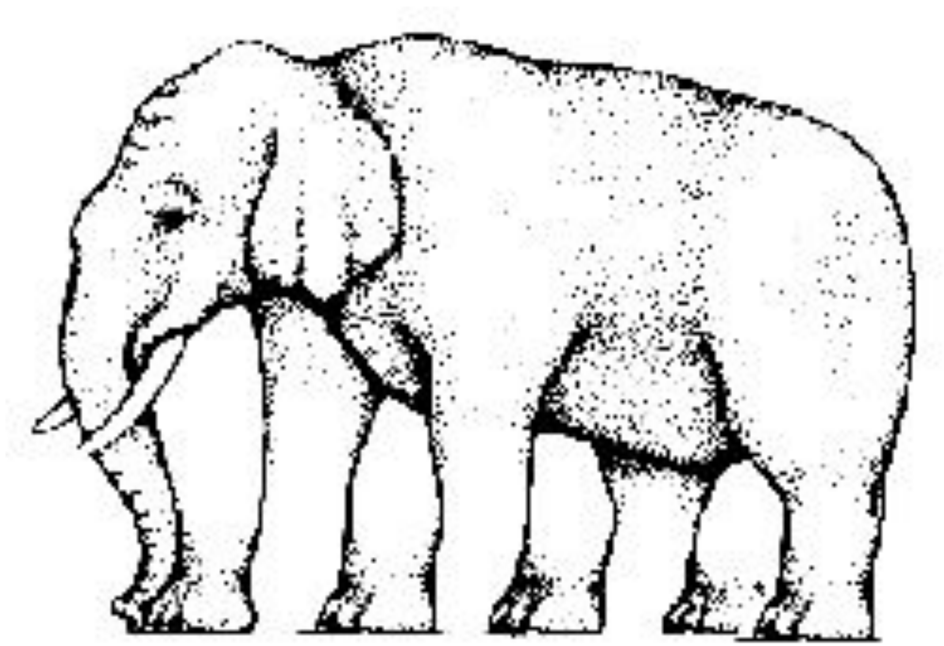
Inne przykłady





Ile nóg ma ten słoń?

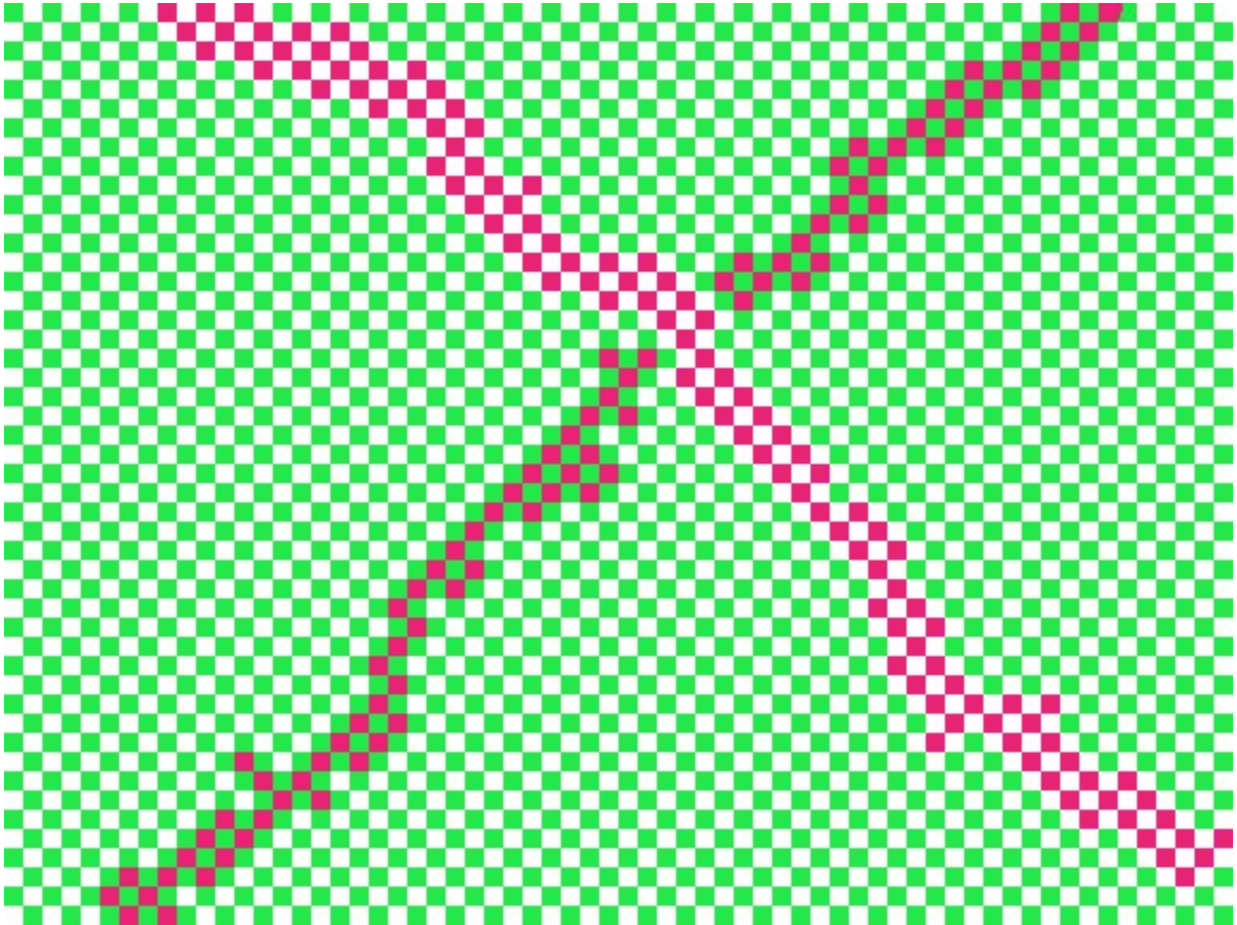
Co widzimy na tym slajdzie?



Saksofonista?

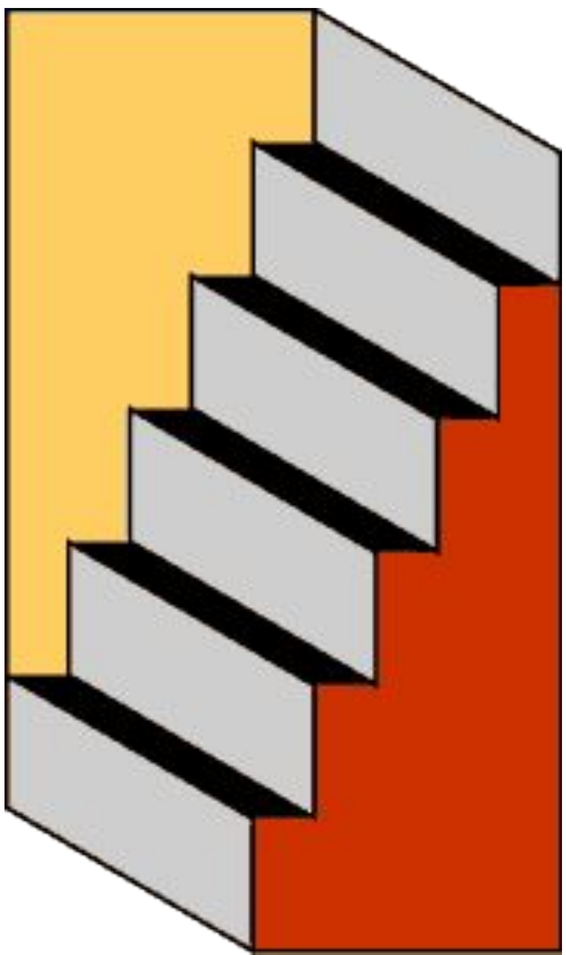
A może portret kobiety ?

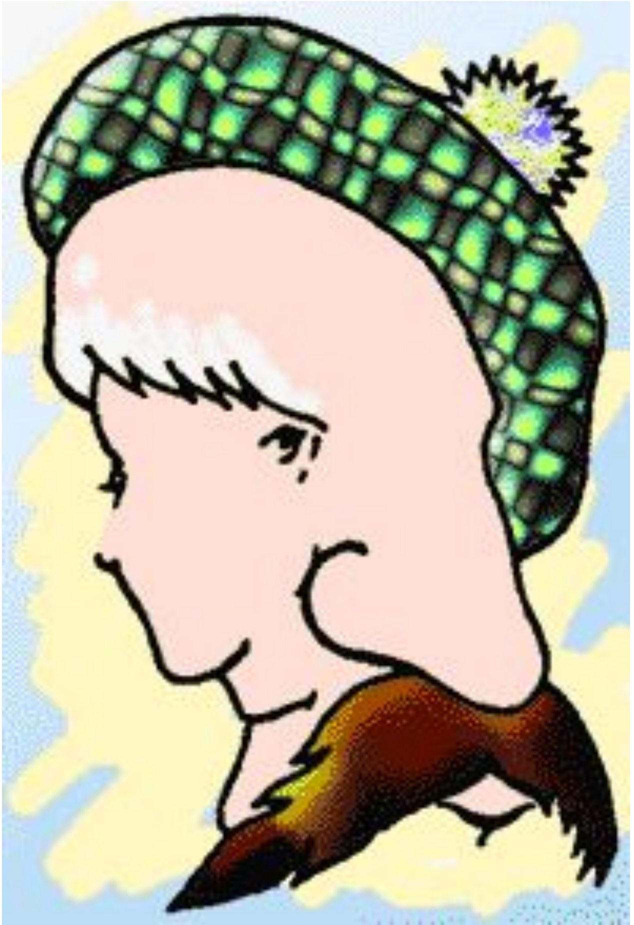
Ile różowych kolorów jest na tym slajdzie?



Dokąd te schody?

Ilu nas tu jest?





Wielkości fizyczne i jednostki

Pomiar wielkości fizycznej polega na jej porównaniu z wielkością tego samego rodzaju przyjętą za jednostkę. Wszystkie wielkości fizyczne wyrażone liczbami muszą posiadać jednostkę (chyba, że są bezwymiarowe).

Prawa fizyki wyrażają związki między różnymi wielkościami fizycznymi. Prawa te formułowane są w postaci równań matematycznych wyrażających ścisłe ***ilościowe*** relacje między tymi wielkościami, a to wiąże się zawsze z pomiarami określającymi liczbowo stosunek danej wielkości do przyjętej ***jednostki***

$$V = \frac{S}{t}$$

Wiele z wielkości fizycznych jest współzależnych. Na przykład prędkość jest długością podzieloną przez czas, gęstość masą podzieloną przez objętość itp. Dlatego z pośród wszystkich wielkości fizycznych wybieramy pewną ilość tak zwanych ***wielkości podstawowych***, za pomocą których wyrażamy wszystkie pozostałe wielkości nazywane ***wielkościami pochodnymi***

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Z tym podziałem związany jest również wybór jednostek. ***Jednostki podstawowe*** wielkości podstawowych są wybierane (ustalane), a ***jednostki pochodne*** definiuje się za pomocą jednostek podstawowych.

Aktualnie obowiązującym w Polsce układem jednostek jest **układ SI** (Systeme International d'Unites). Układ SI ma siedem jednostek podstawowych i dwie uzupełniające niezbędne w sformułowaniach praw fizyki.

Jednostki podstawowe w SI

Nazwa	Jednostka	Wielkość fizyczna
metr	m	długość
kilogram	kg	masa
sekunda	s	czas
amper	A	natężenie prądu elektrycznego
kelwin	K	temperatura
kandela	cd	natężenie światła
mol	mol	ilość materii

Jednostki podstawowe

Definicje jednostek podstawowych są związane albo z wzorcami jednostek albo z pomiarem.

Przykładem jednostki związanej z wzorcem jest masa. Obecnie światowym wzorcem kilograma (kg) jest walec platynowo-irydowy przechowywany w Międzynarodowym Biurze Miar
i Wag w Sevres (Francja).

Natomiast przykładem jednostki związanej z pomiarem jest długość. Metr (m) definiujemy jako długość drogi przebytej w próżni przez światło w czasie 1/299792458 s.

Długość

- Długość jednego metra jest równa odległości jaką pokonuje światło podczas 1/299792458 sekundy

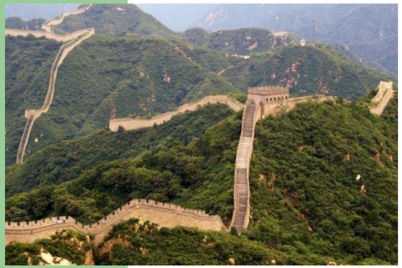
Przykład	Długość w metrach [m]
Odległość od najdalszej galaktyki	10^{26}
Rok świetlny	10^{16}
Odległość Ziemia-Księżyc	10^{8}
Boisko piłkarskie	10^{2}
Długość muchy	10^{-2}
Średnica atomu	10^{-10}
Średnica protonu	10^{-15}

$$1m = \frac{Biegun - Paryż - Równik}{10{,}000{,}000}$$

Przegląd podstawowych długości

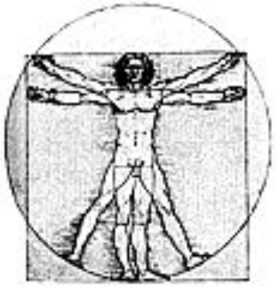
Odległość Ziemia-Słońce: 150 000 000 000m

Odległość Ziemia-Księżyc: 380 000 000m



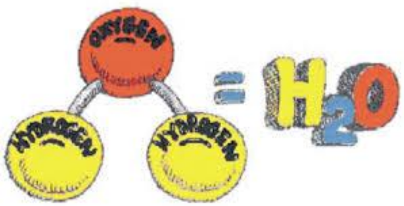
Długość muru chińskiego: 2 400 000m

Wysokość Mt. Everestu: 8 848m

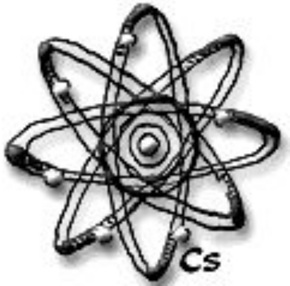


Wzrost człowieka: ~1.8m

Grubość włosa ludzkiego: 0.000 08m

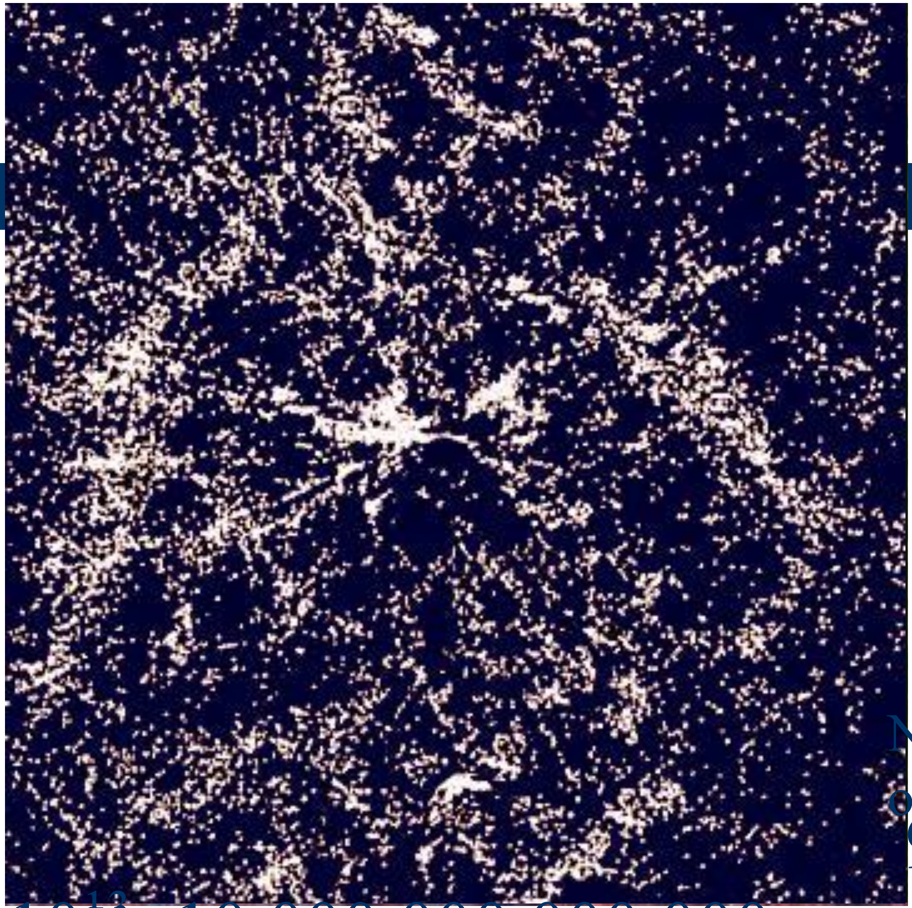


Rozmiar cząsteczki H_2O : 0.000 000 001m

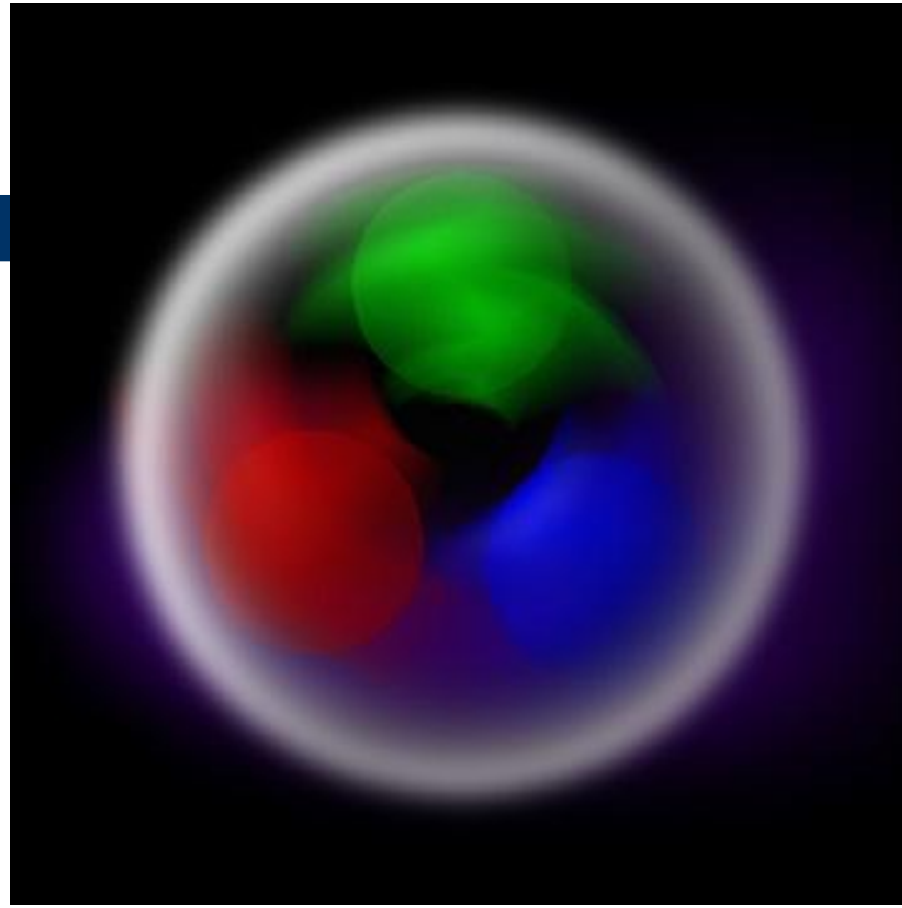


Rozmiar atomu: 0.000 000 000 3m

Przegląd podstawowych rozmiarów

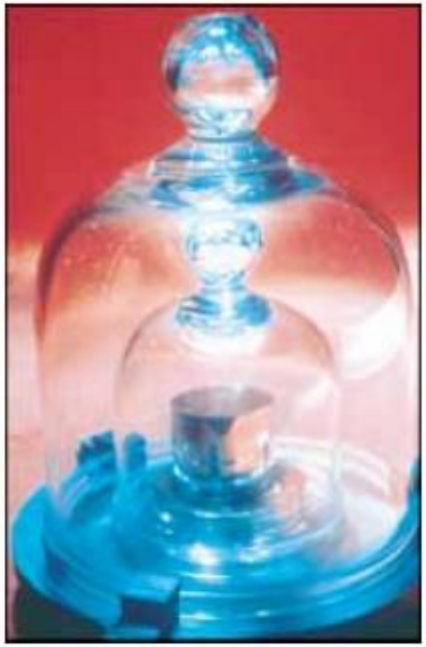


Przegląd podstawowych rozmiarów



Masa

- Wzorcem kilograma jest walec wykonany ze stopu Pt-Ir znajdujący się w Sevres (Francja)



Przykład	Masa w kilogramach [kg]
Słońce	10^{30}
Ziemia	10^{25}
Człowiek	10^{2}
Komar	10^{-2}
Bakteria	10^{-15}
Atom	10^{-27}
Elektron	10^{-30}

Czas

- Sekunda to 9192631770 okresów promieniowania izotopu ^{133}Cs

Przykład	Czas w sekundach
Wiek (100 lat)	10^9
Dzień	10^5
Okres bicia serca	1
Okres fal radiowych	10^{-6}
Okres fali świetlnej	10^{-15}

Amper

- *1 amper to niezmieniający się prąd elektryczny, który płynąc w dwóch równoległych, prostoliniowych, nieskończenie długich przewodach o znikomo małym przekroju kołowym, umieszczonych w próżni w odległości 1 m od siebie, spowodowałby wzajemne oddziaływanie przewodów na siebie z siłą równą $2 \cdot 10^{-7}$ N na każdy metr długości przewodu*

$$1A = \frac{1C}{1s}$$

Jeśli przepływający przez dany przekrój prąd ma natężenie 1 A, oznacza to, że w ciągu 1 s przepływa 1 C ładunku

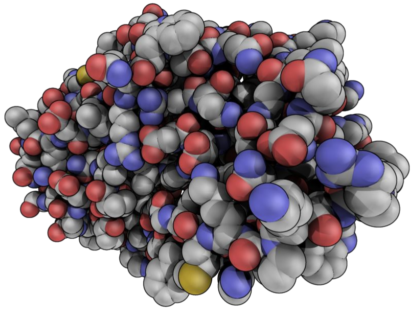
Kelwin

- **Kelwin** – jednostka temperatury w układzie SI równa 1/273,15 temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody, oznaczana **K**. Definicja ta odnosi się do wody o następującym składzie izotopowym: 0,00015576 mola ^{2}H na jeden mol ^{1}H, 0,0003799 mola ^{17}O na jeden mol ^{16}O i 0,0020052 mola ^{18}O na jeden mol ^{16}O

Kandela

- **Kandela** (z łac. *candela* – świeca) – jednostka światłości źródła światła; jednostka podstawowa w układzie SI, oznaczana **cd**.
- Jest to światłość, z jaką świeci w określonym kierunku źródło emitujące promieniowanie monochromatyczne o częstotliwości 5,4 $\cdot 10^{14}$ Hz i wydajności energetycznej w tym kierunku równej 1/683 W/sr.
- Starsza definicja określała kandelę jako światłość 1/600 000 m² powierzchni ciała doskonale czarnego w temperaturze krzepnięcia platyny pod ciśnieniem 1 atmosfery fizycznej. Jednak z powodu trudności w wykonywaniu układu pomiarowego i małej dokładności pomiaru (rzędu 0,1–0,2%), definicja ta została zarzucona w 1979 r. i została zastąpiona nową definicją

Mol



- **Mol** (skrót od *molekuła*) – podstawowa w układzie SI jednostka liczności materii, o symbolu (oznaczeniu) **mol**.
- Jeden mol jest to liczność materii układu, zawierającego liczbę cząstek (np. atomów, cząsteczek, jonów, elektronów i innych indywiduów chemicznych, a także fotonów, w tym ostatnim przypadku nosi nazwę ajnsztajn) równą liczbie atomów zawartych w dokładnie 0,012 kilograma izotopu węgla ^{12}C (przy założeniu, że węgiel jest w stanie niezwiązanym chemicznie, w spoczynku, a jego atomy nie znajdują się w stanie wzbudzenia). W jednym molu znajduje się $(6{,}02214129 \pm 0{,}00000027) \times 10^{23}$ cząstek. Liczba ta jest nazywana liczbą Avogadra

Jednostki pochodne układu SI

Wielkość	Nazwa jedn.	Symbol	Odpowiednik	Odpowiednik w jed. Podst.
Kąt płaski	radian	rad	1	m/m
Kąt bryłowy	steradian	sr	1	m^2/m^2
Częstotliwość	herc	Hz	-	1/s
Siła	newton	N	-	$m \cdot kg/s^2$
Ciśnienie	pascal	Pa	N/m^2	$kg/(m\ s^2)$
Energia, praca, ciepło	dżul	J	N m	$kg\ m^2/s^2$
Moc	wat	W	J/s	$kg\ m^2/s^3$
Ładunek elektr.	kulomb	C	-	A s
Napięcie elektr.	wolt	V	W/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Pojemność el.	farad	F	C/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Opór elektr.	om	Ω	V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$

Jednostki pochodne układu SI

Wielkość	Nazwa jedn.	Symbol	Odpowiednik	Odpowiednik w jed. Podst.
Przewodność el.	simens	S	1/Ω	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^{3} \cdot A^{2}$
Strumień magn.	weber	Wb	V s	$m^{2} \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Indukcja magn.	tesla	T	Wb/m^{2}	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Indukcyjność	henr	H	Wb/A	$m^{2} \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Strumień świetlny	lumen	lm	cd·sr	cd
Natężenie oswietlenia	luks	lx	lm/m^{2}	$m^{-2} \cdot cd$
Aktywność promieniotwórcza	bekerel	Bq	-	1/s
Dawka pochłonięta	grej	Gy	J/kg	$m^{2} \cdot s^{-2}$
Równoważnik dawki pochłoniętej	siwert	Sv	J/kg	$m^{2} \cdot s^{-2}$
Aktywność katalityczna	katal	kat	-	mol/s

Przedrostki SI

Nazwa	Symbol	Mnożnik	Nazwa	Symbol	Mnoznik
jotta	Y	10^{24}	decy	d	10^{-1}
zeta	Z	10^{21}	centy	c	10^{-2}
eksa	E	10^{18}	mili	m	10^{-3}
peta	P	10^{15}	mikro	μ	10^{-6}
tera	T	10^{12}	nano	n	10^{-9}
giga	G	10^{9}	piko	p	10^{-12}
mega	M	10^{6}	femto	f	10^{-15}
kilo	k	10^{3}	atto	a	10^{-18}
hekto	h	10^{2}	zepto	z	10^{-21}
deka	da	10	jokto	y	10^{-24}
-	-	1	-	-	-

Dokładność i niepewność pomiarowa

Wynik każdego pomiaru dowolnej wielkości fizycznej obarczony jest niepewnością pomiarową (błędem pomiarowym).

Niepewność 1mm (10^{-3}m)

Niepewność 0,01mm (10^{-5}m)

Cyfry znaczące

- Informacji o dokładności pomiaru dostarcza ilość cyfr znaczących w wyniku. Cyfry znaczące to cyfry, które możemy wyznaczyć w wiarygodny sposób.
- Na przykład: 0.03 ma jedną cyfrę znaczącą ($0.03=3\times10^{-2}$), a 15300 trzy cyfry znaczące ($15300=1.53\times10^{4}$).

Wielkości fizyczne, jednostki

	Wielkość	Jednostka	Symbol jednostki
1.	Długość	metr	m
2.	Masa	kilogram	kg
3.	Czas	sekunda	s
4.	Ilość materii (substancji)	mol	mol
5.	Natężenie prądu elektrycznego	amper	A
6.	Temperatura termodynamiczna	kelwin	K
7.	Światłość	kandela	cd
8.	Kąt płaski	radian	rad
9.	Kąt bryłowy	steradian	sr

Jednostki podstawowe

Definicje jednostek podstawowych są związane albo z wzorcami jednostek albo z pomiarem.
Przykładem jednostki związanej z wzorcem jest masa. Obecnie światowym wzorcem kilograma (kg) jest walec platynowo-irydowy przechowywany w Międzynarodowym Biurze Miar
i Wag w Sevres (Francja).
Natomiast przykładem jednostki związanej z pomiarem jest długość. Metr (m) definiujemy jako długość drogi przebytej w próżni przez światło w czasie 1/299792458 s.

Oprócz jednostek w fizyce posługujemy się pojęciem *wymiaru jednostki* danej wielkości fizycznej. Wymiarem jednostki podstawowej jest po prostu ona sama. Natomiast dla jednostek pochodnych wymiar jest kombinacją jednostek podstawowych (w odpowiednich potęgach).

Na przykład jednostka przyspieszenia ma wymiar m/s^2 wynikający ze wzoru $a=v/t$. Niektóre jednostki pochodne mają swoje nazwy tak jak jednostka siły - niuton.

Przykład jednostki pochodnej

$$[N] - niuton - \ jednostka\ sily$$

$$F = ma$$

$$m\,[kg] - masa, \qquad a\,[\frac{m}{s^2}] - przyspieszenie$$

$$[N] = [kg \cdot m \cdot s^{-2}]$$

Oprócz jednostek podstawowych i pochodnych posługujemy się także ***jednostkami wtórnymi***, które są ich wielokrotnościami. Wyraża się je bardzo prosto poprzez dodanie odpowiedniego przedrostka określającego odpowiednią potęgę dziesięciu, która jest mnożnikiem dla jednostki

Przedrostek	oznaczenie	Potęga
tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
giga	G	10^{9} = 1 000 000 000
mega	M	10^{6} = 1 000 000
kilo	k	10^{3} = 1 000
hekto	h	10^{2} = 100
deka	da	10^{1} = 10
--------	--------	10^{0} = 1
decy	d	10^{-1} = 0,1
centy	c	10^{-2} = 0,01
mili	m	10^{-3} = 0,001
mikro	μ	10^{-6} = 0,000 001
nano	n	10^{-9} = 0,000 000 001
piko	p	10^{-12} = 0,000 000 000 001
femto	f	10^{-15} = 0,000 000 000 000 001

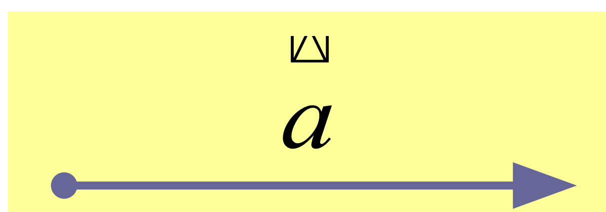
WIELKOŚCI FIZYCZNE

Skalar ⇒ wartość

np. masa, czas, ładunek elektryczny, temperatura

Wektor ⇒ wartość, punkt przyłożenia, kierunek, zwrot.

np. prędkość, przyspieszenie, siła, pęd.



Tensor ⇒ wymagają rachunku macierzowego

np. moment bezwładności, naprężenia, odkształcenia

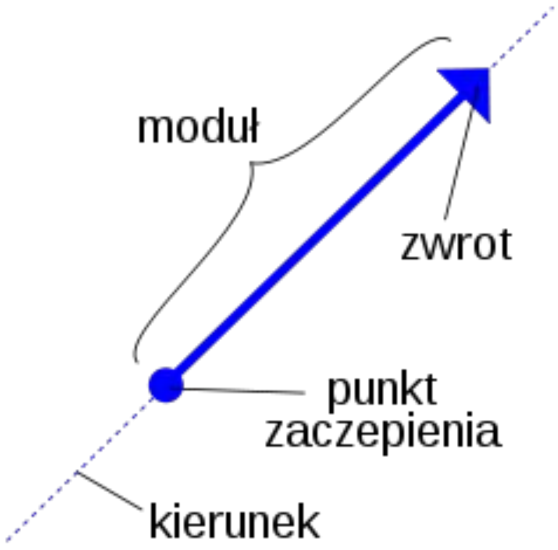
Skalar

Masa – wielkość skalarna

- Do opisania niektórych wielkości fizycznych (np. masa, energia, praca, czas, moc) wystarczy podanie jedynie jej wartości i jednostki (mogą być bezwymiarowe np. względna przenikalność elektryczna). Są to wielkości skalarne. Skalar jest tensorem rzędu zerowego.

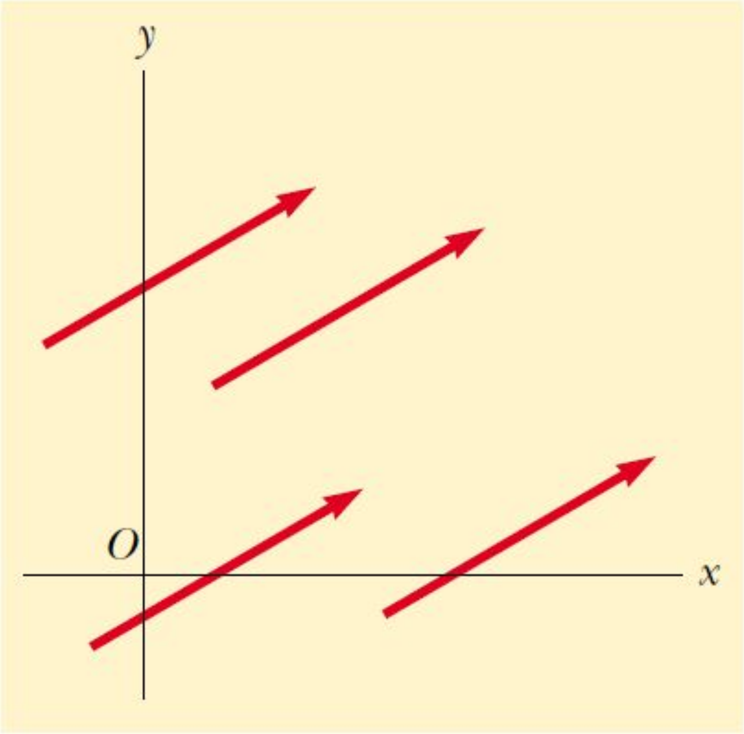
Wektory

Wektor jest obiektem posiadającym moduł (długość lub wartość), kierunek oraz zwrot. Dla wielkości wektorowych niezbędna jest orientacja przestrzenna. Opis wektora wymaga wprowadzenia układu współrzędnych (najczęściej Kartezjański). Przykład wielkości wektorowych: prędkość, siła.



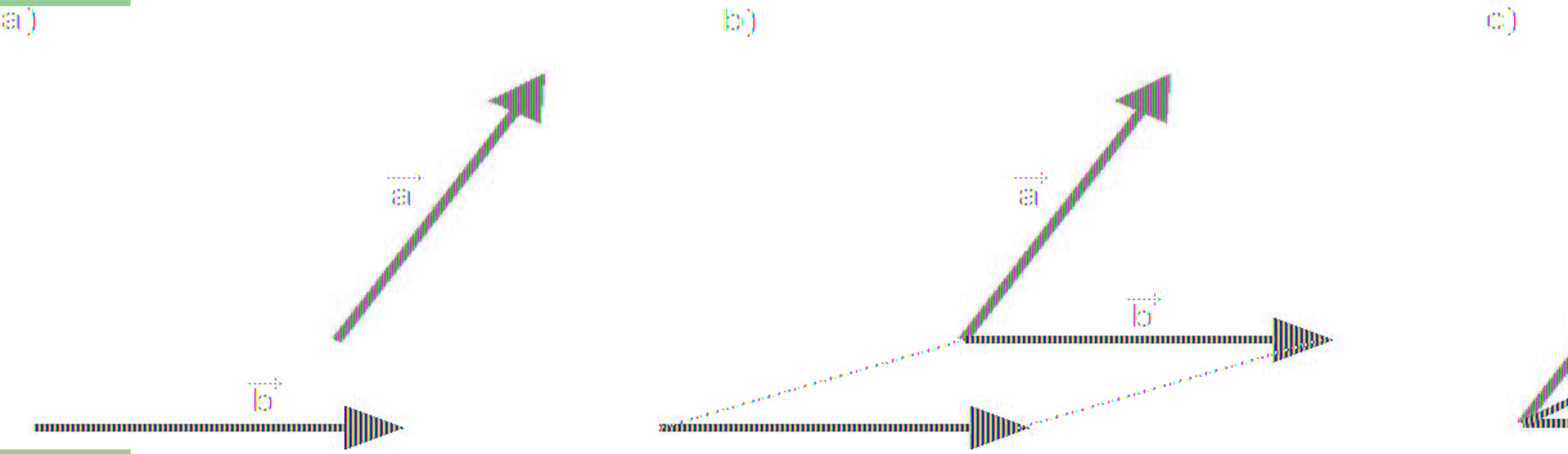
Równość wektorów

Dwa wektory A i B są sobie równe jeśli ich wartości (długości) są równe oraz ich kierunki i zwroty są jednakowe.



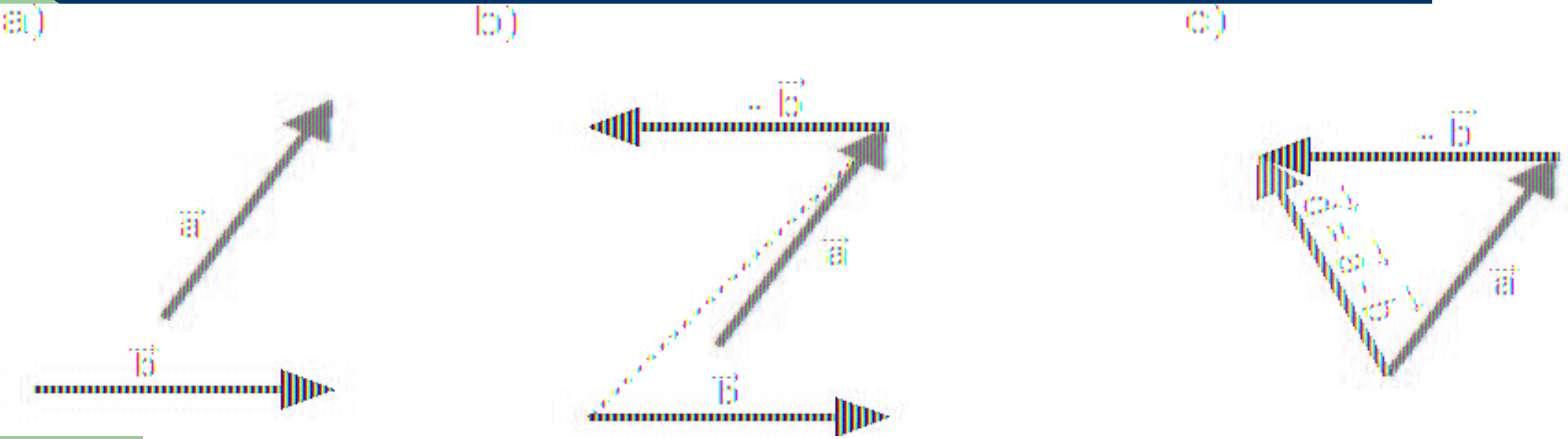
Wektory na rysunku spełniają warunek równości

Graficzne dodawanie wektorów (reguła równoległoboku)



$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

Graficzne odejmowanie wektorów (reguła równoległoboku)



$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$$

Właściwości dodawania wektorów:

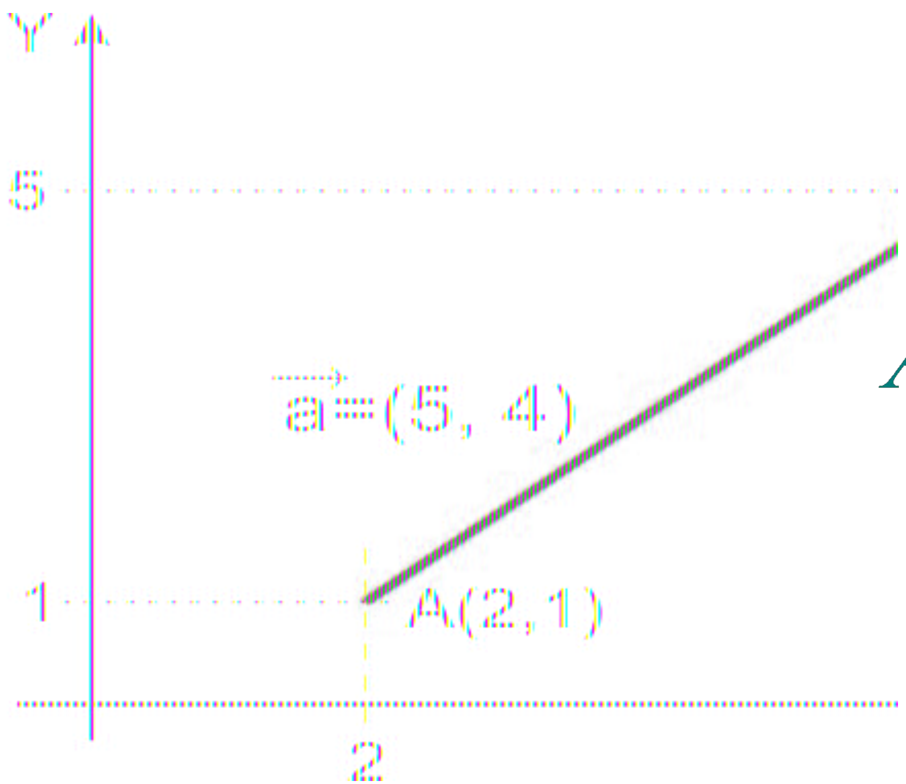
Dodawanie wektorów jest przemienne:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Dodawanie wektorów jest łączne:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

Współrzędne wektora

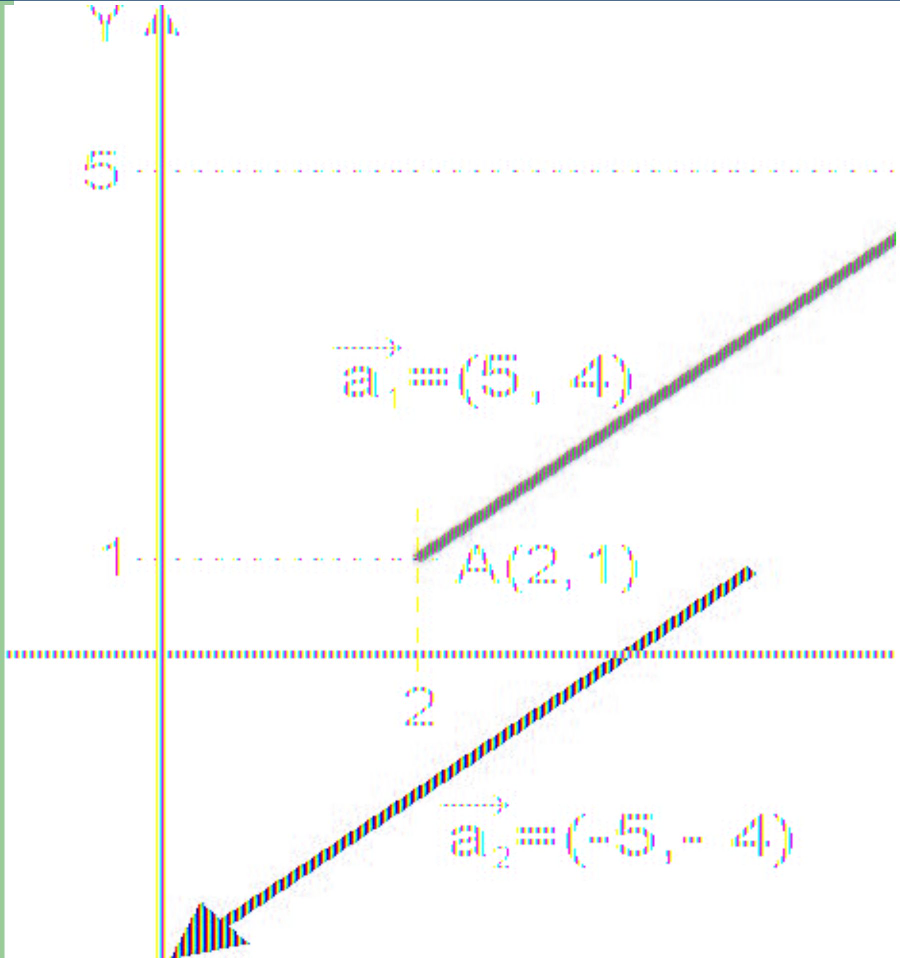


$$A(2,1) \qquad B(7,5)$$

$$a=(7-2,5-1)$$

$$a=(5,4)$$

Wektory przeciwne

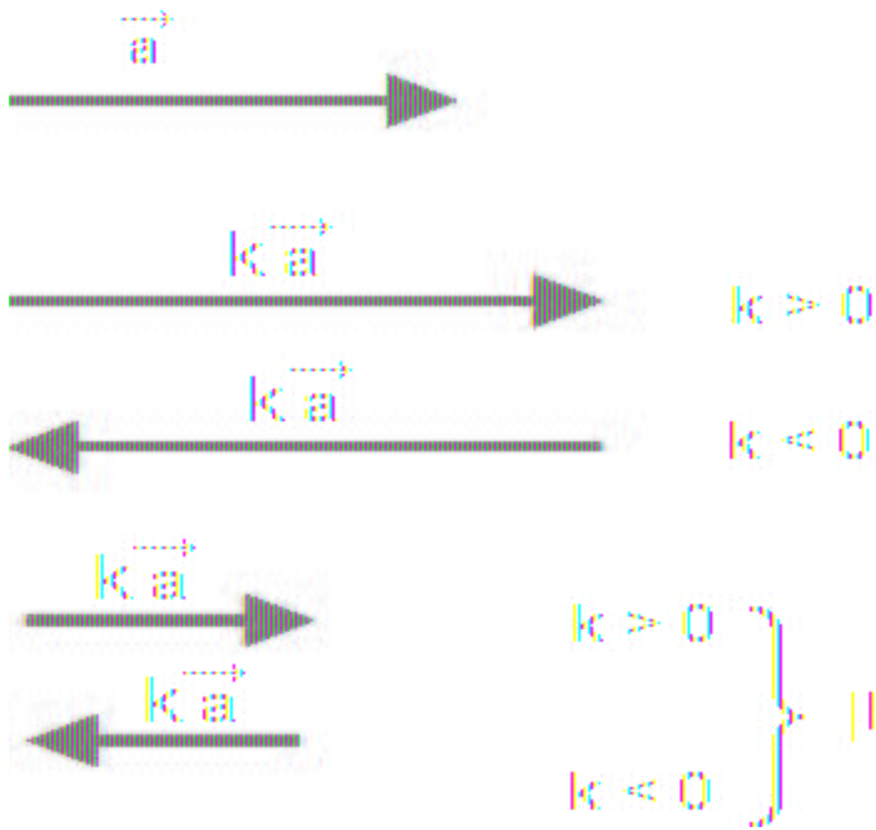


$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$$

$$\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$$

Mnożenie wektora przez skalar

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} \; - \; wektor\\ k \; - \; skalar\end{array}\right\} \Rightarrow k\cdot\vec{a}$$

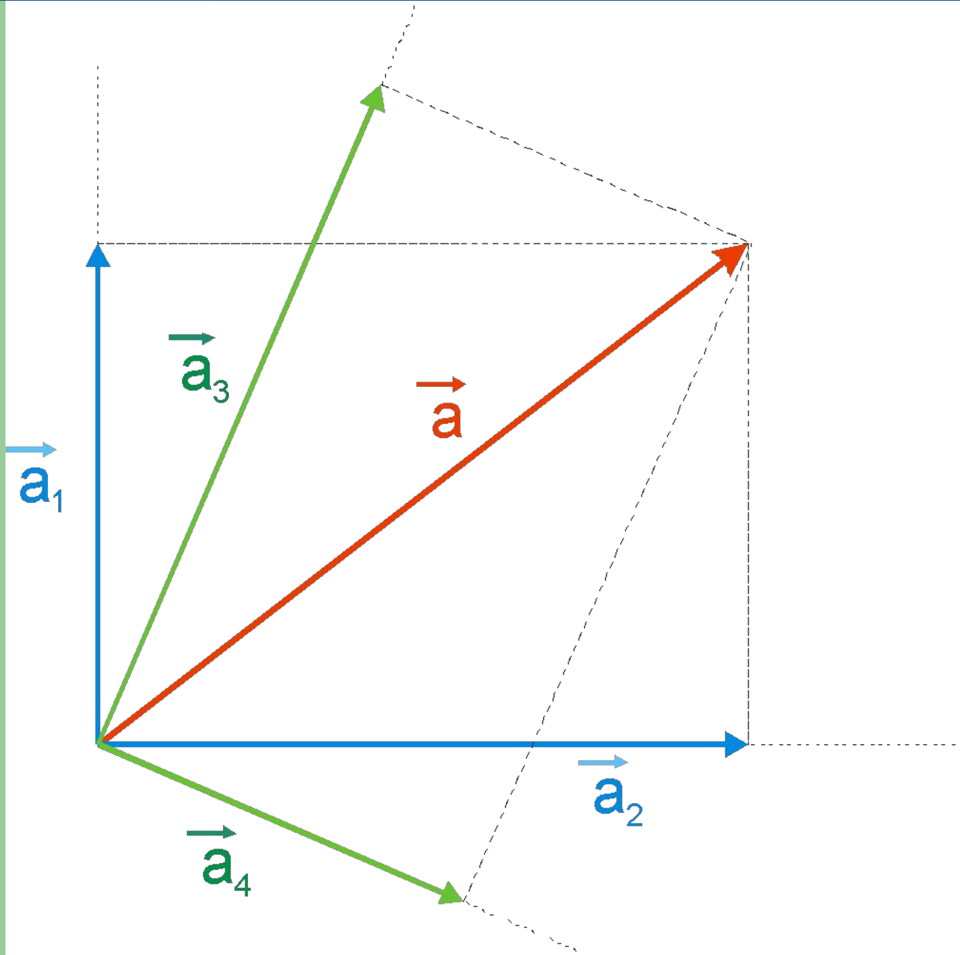


Długość wektora

$\Downarrow$

ka

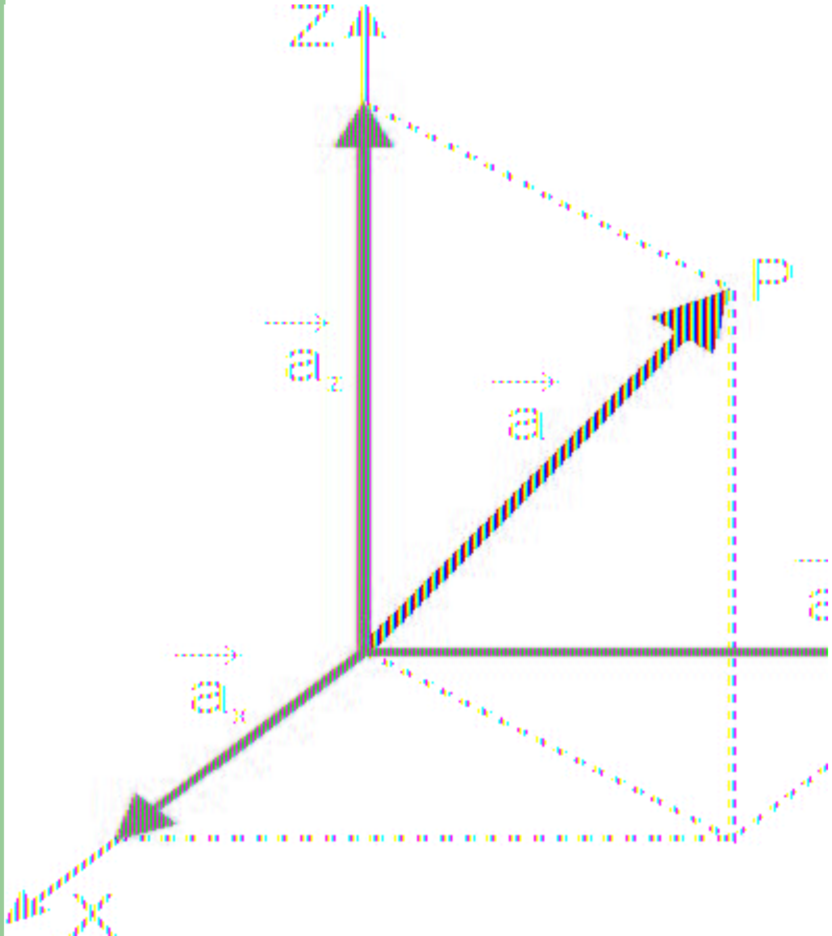
Składowe wektora



$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

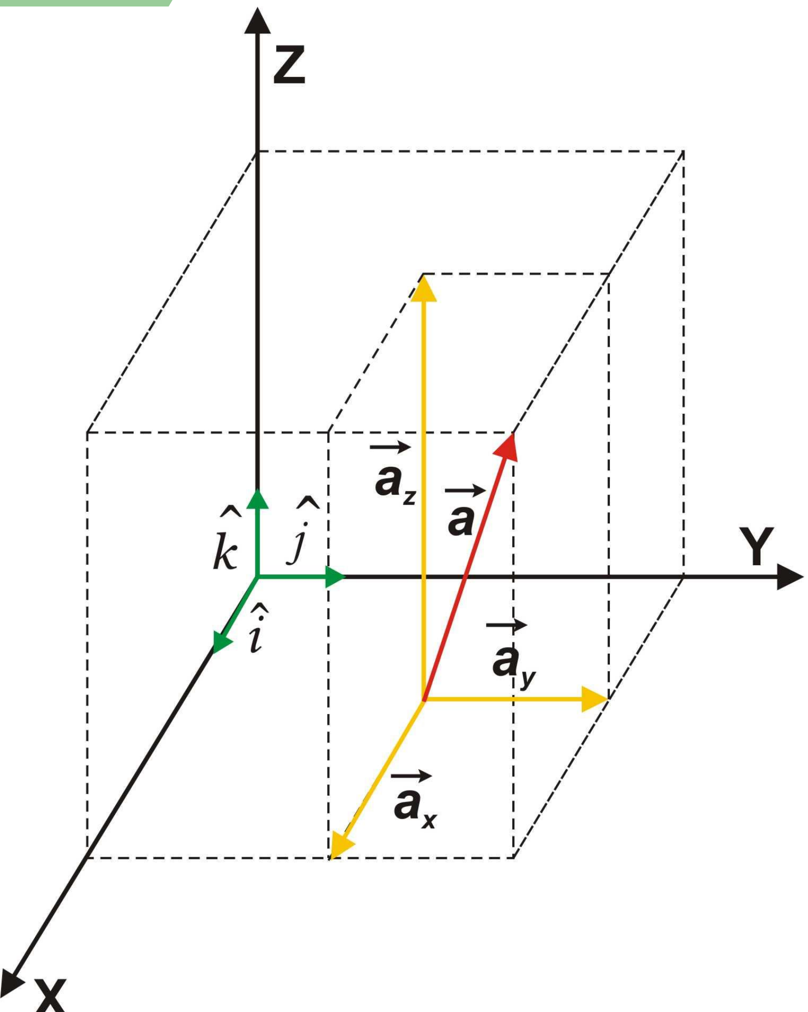
$$\vec{a} = \vec{a}_3 + \vec{a}_4$$

Składowe wektora



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

Składowe wektora



Składowe wektora $\vec{a}$: $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$

Możemy przedstawić w postaci iloczynu liczb:

a_x, a_y, a_z współrzędne wektorów składowych

i wersorów:

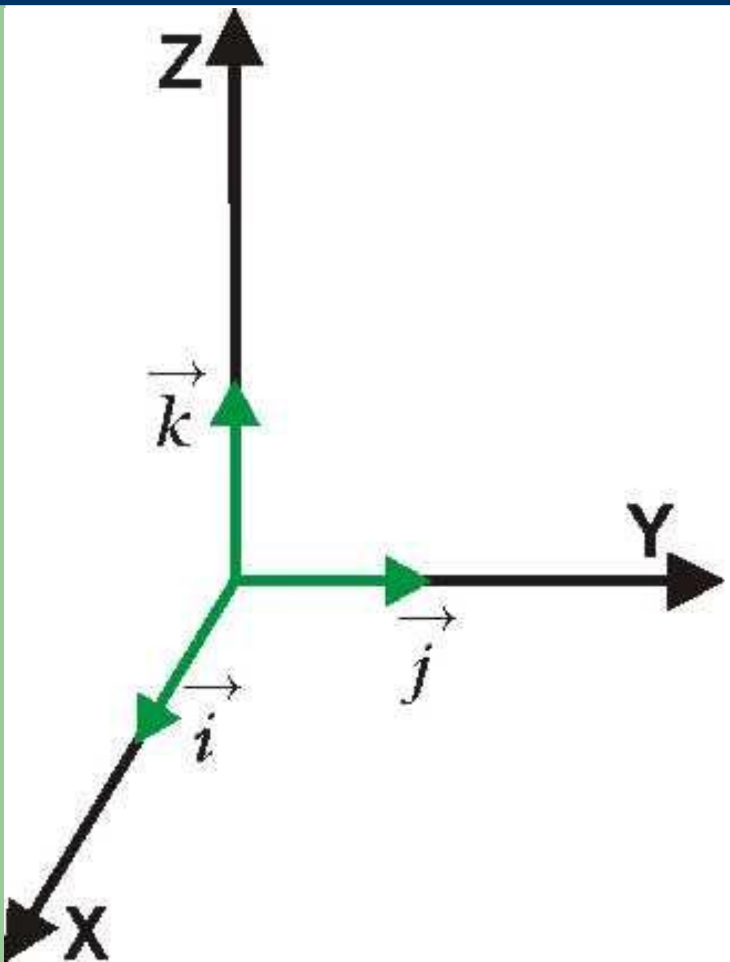
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

$$\vec{a}_x = a_x \cdot \hat{i}, \quad \vec{a}_y = a_y \cdot \hat{j}, \quad \vec{a}_z = a_z \cdot \hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} + a_z \cdot \hat{k}$$

$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ - długość (wartość bezwzględna) wektora

Wersory – wektory jednostkowe



Wersory są wektorami kierunkowymi odpowiadającymi odpowiednio kierunkom osi X, Y, Z

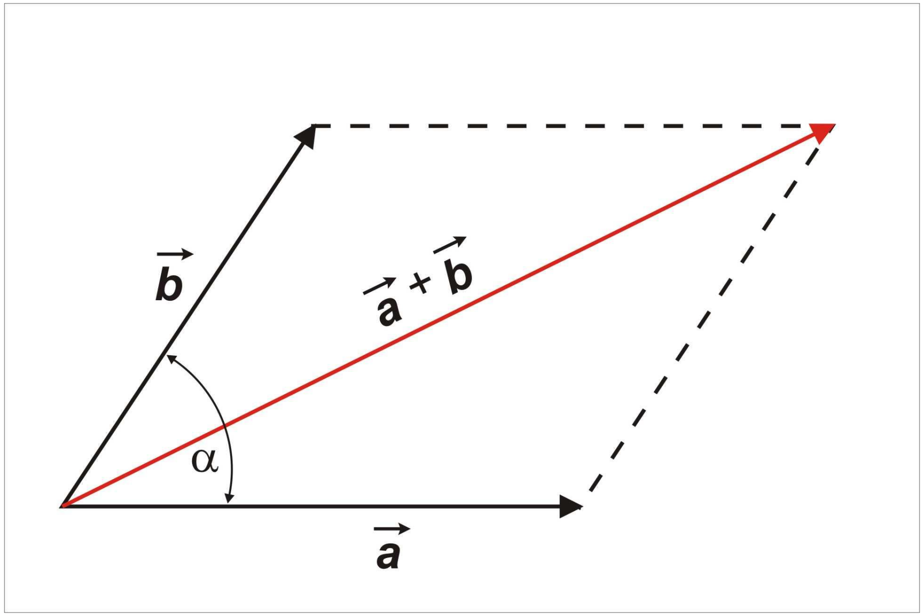
o długości

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$$

Dodawanie wektorów

$$\vec{a} = a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} + a_z \cdot \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \cdot \hat{i} + b_y \cdot \hat{j} + b_z \cdot \hat{k}$$

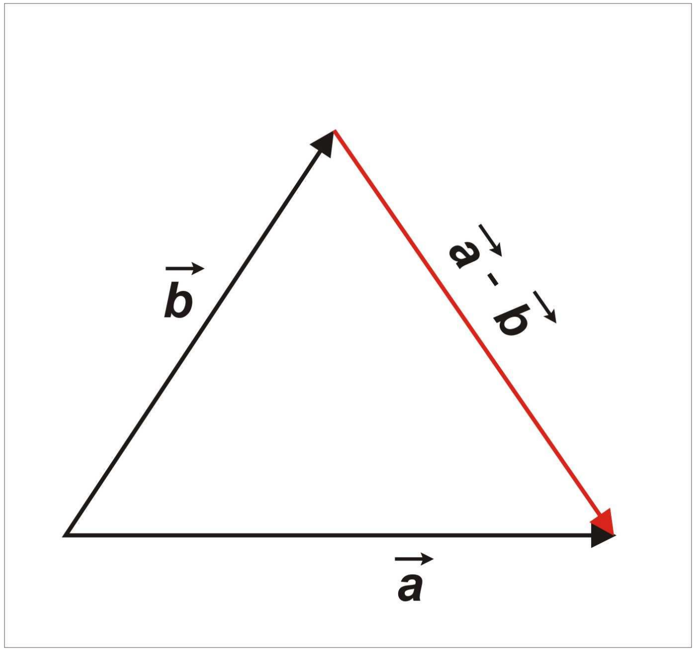


$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \cdot \hat{i} + (a_y + b_y) \cdot \hat{j} + (a_z + b_z) \cdot \hat{k}$$

Odejmowanie wektorów

$$\vec{a} = a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} + a_z \cdot \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \cdot \hat{i} + b_y \cdot \hat{j} + b_z \cdot \hat{k}$$



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \left(a_x - b_x\right)\cdot \hat{i} + \left(a_y - b_y\right)\cdot \hat{j} + \left(a_z - b_z\right)\cdot \hat{k}$$

Mnożenie wektora przez wektor

a) Iloczyn skalarny

b) Iloczyn wektorowy

a) Iloczyn skalarny

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\alpha$$

Własności iloczynu skalarnego:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad gdy \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \quad gdy \quad \vec{a} \,||\, \vec{b} \qquad \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

a) Iloczyn skalarny

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\alpha$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0 \qquad \hat{i} \cdot \hat{k} = 0 \qquad \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \qquad \hat{j} \cdot \hat{j} = 1 \qquad \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

a) Iloczyn skalarny

Ćwiczenie: Dane są dwa wektory:

$$\vec{a} = a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} + a_z \cdot \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \cdot \hat{i} + b_y \cdot \hat{j} + b_z \cdot \hat{k}$$

Korzystając z poniższych zależności oblicz iloczyn skalarny tych wektorów

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0 \qquad \hat{i} \cdot \hat{k} = 0 \qquad \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \qquad \hat{j} \cdot \hat{j} = 1 \qquad \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = 0 \qquad \hat{i}\cdot\hat{k}=0 \qquad \hat{j}\cdot\hat{k}=0$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1 \qquad \hat{j}\cdot\hat{j}=1 \qquad \hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\cdot\hat{i} + a_y\cdot\hat{j} + a_z\cdot\hat{k})\cdot(b_x\cdot\hat{i} + b_y\cdot\hat{j} + b_z\cdot\hat{k}) =$$

$$= a_x b_x\cdot\hat{i}\cdot\hat{i} + \cancel{a_x b_y\cdot\hat{i}\cdot\hat{j}} + \cancel{a_x b_z\cdot\hat{i}\cdot\hat{k}} +$$

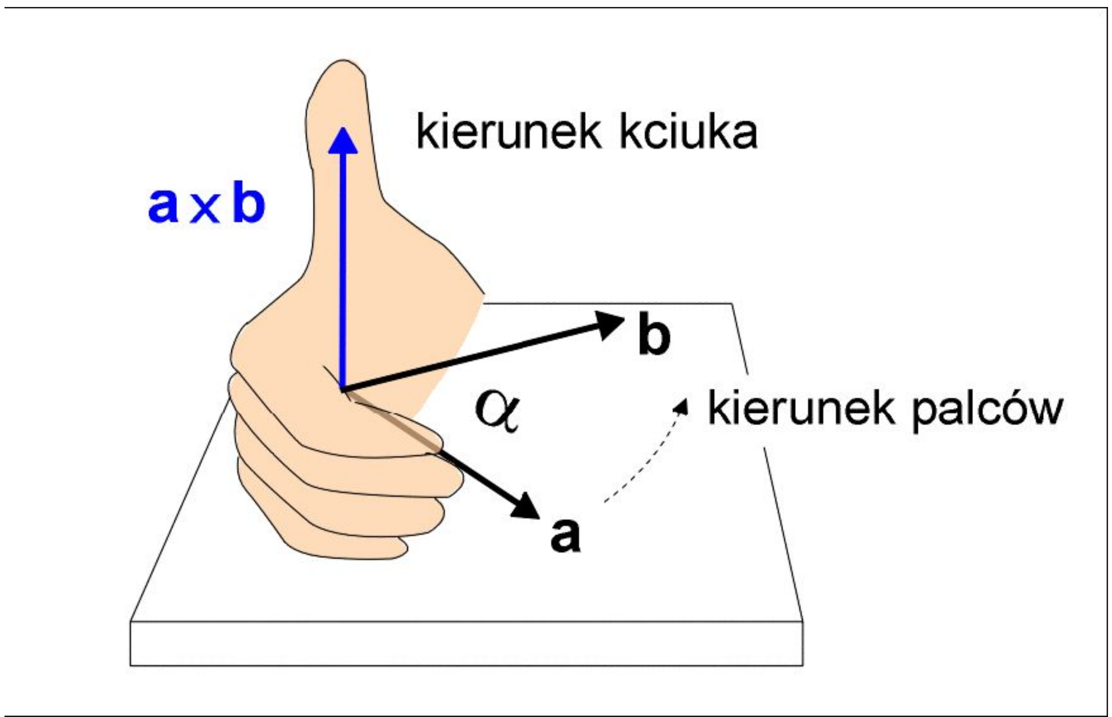
$$+ \cancel{a_y b_x\cdot\hat{j}\cdot\hat{i}} + a_y b_y\cdot\hat{j}\cdot\hat{j} + \cancel{a_y b_z\cdot\hat{j}\cdot\hat{k}} +$$

$$+ \cancel{a_z b_x\cdot\hat{k}\cdot\hat{i}} + \cancel{a_z b_y\cdot\hat{k}\cdot\hat{j}} + a_z b_z\cdot\hat{k}\cdot\hat{k} +$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

b) Iloczyn wektorowy

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}\, a b \sin \alpha$$



b) Iloczyn wektorowy

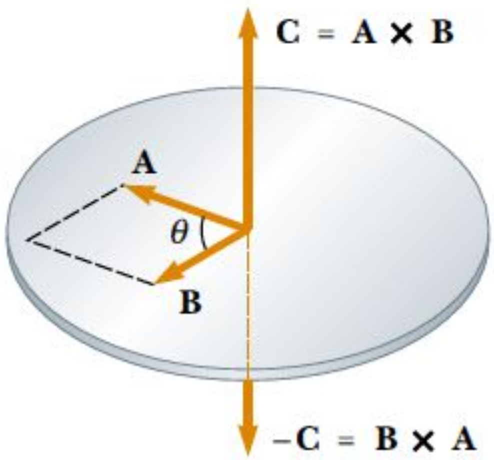
Własności iloczynu wektorowego:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad gdy \quad \vec{a} \,||\, \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$



b) Iloczyn wektorowy

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = a\, b\, \vec{e} \sin\alpha$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \qquad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \qquad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \qquad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0 \qquad \hat{j} \times \hat{j} = 0 \qquad \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

b) Iloczyn wektorowy

Ćwiczenie: Dane są dwa wektory:

$$\vec{a} = a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} + a_z \cdot \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \cdot \hat{i} + b_y \cdot \hat{j} + b_z \cdot \hat{k}$$

Korzystając z poniższych zależności oblicz iloczyn wektorowy tych wektorów.

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \qquad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \qquad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \qquad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0 \qquad \hat{j} \times \hat{j} = 0 \qquad \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \qquad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j} \qquad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$$

$$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k} \qquad \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j} \qquad \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$$

$$\hat{i}\times\hat{i}=0 \qquad \hat{j}\times\hat{j}=0 \qquad \hat{k}\times\hat{k}=0$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\cdot\hat{i}+a_y\cdot\hat{j}+a_z\cdot\hat{k}\right)\times\left(b_x\cdot\hat{i}+b_y\cdot\hat{j}+b_z\cdot\hat{k}\right)=$$

$$=\cancel{a_x b_x\cdot\hat{i}\times\hat{i}}+a_x b_y\cdot\hat{i}\times\hat{j}+a_x b_z\cdot\hat{i}\times\hat{k}+$$

$$+a_y b_x\cdot\hat{j}\times\hat{i}+\cancel{a_y b_y\cdot\hat{j}\times\hat{j}}+a_y b_z\cdot\hat{j}\times\hat{k}+$$

$$+a_z b_x\cdot\hat{k}\times\hat{i}+a_z b_y\cdot\hat{k}\times\hat{j}+\cancel{a_z b_z\cdot\hat{k}\times\hat{k}}+$$

$$=\left(a_y b_z-a_z b_y\right)\hat{i}+\left(a_z b_x-a_x b_z\right)\hat{j}+\left(a_x b_y-a_y b_x\right)\hat{k}$$

b) Iloczyn wektorowy

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}a_y b_z + \hat{j}a_z b_x + \hat{k}a_x b_y - \hat{i}a_z b_y - \hat{j}a_x b_z - \hat{k}a_y b_x =$$

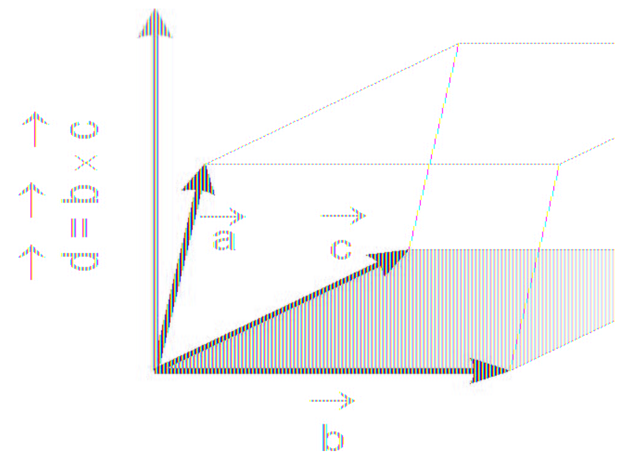
$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\hat{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{k}$$

Iloczyn trzech wektorów

1. Iloczyn podwójny skalarny: $\vec{d} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

2. Iloczyn mieszany: $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

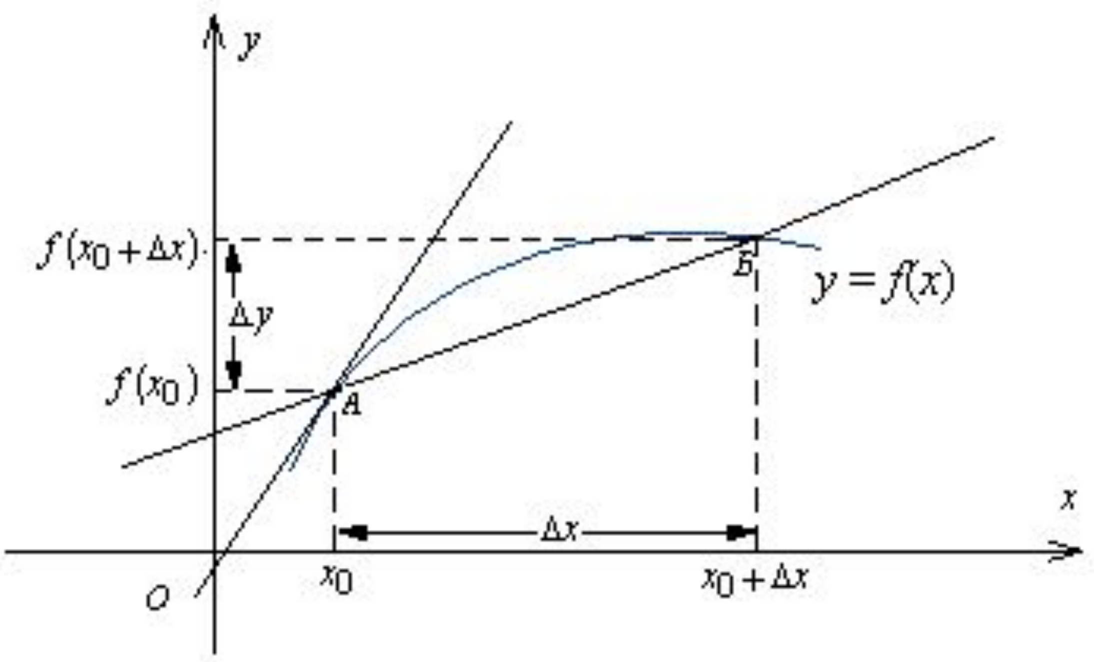
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$



3. Iloczyn podwójny wektorowy: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Pochodna funkcji - definicja

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu U punktu x_0. Oznaczmy symbolem Δx przyrost zmiennej niezależnej x, gdzie $x \in U(x_0, \delta)$ i $x \neq x_0$, symbolem Δy - przyrost wartości funkcji, jaki odpowiada przyrostowi Δx. Mamy więc $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.



Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu Δx zmiennej x nazywamy stosunek

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Granicę właściwą ilorazu różnicowego przy $\Delta x \to 0$ nazywamy **pochodną funkcji *f* w punkcie x_0** i oznaczamy symbolicznie $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Przykład

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$f'(x^2) = 2x$$

Własności funkcji pochodnej

- iloczyn pochodnej przez stałą,

$$(af)'(x) = af'(x)$$

- pochodną sumy funkcji (*addytywność*),

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x);$$

- pochodną iloczynu funkcji (*reguła Leibniza*),

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- pochodną złożenia funkcji (*reguła łańcuchowa*),

$$f'(x) = h'\big(g(x)\big)g'(x) \quad \text{dla} \quad f(x) = h(g(x)).$$

- pochodną funkcji odwrotnej,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \big(f'(x)\big)^{-1}, \quad \text{o ile} \quad f'(x) \neq 0.$$

- pochodną odwrotności funkcji (*reguła odwrotności*),

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{o ile} \quad g(x) \neq 0$$

- pochodną ilorazu funkcji (*reguła ilorazu*),

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{o ile} \quad g(x) \neq 0.$$

Podstawowe wzory pochodnych

- funkcje stałe

$$(a)' = 0$$

$$f'(2) = 0$$

- funkcje potęgowe

$$(a\,x^n)' = n\,a\,x^{n-1}$$

$$f'(7x^5) = 5 \cdot 7 \cdot x^4 = 35x^4$$

- funkcje wykładnicze

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$f'\left(3^x\right) = 3^x \ln 3$$

- funkcje logarytmiczne

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$f'\left(\ln 3\right) = \frac{1}{3}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$f'\left(\log_2 x\right) = \frac{1}{x \ln 2}$$

Podstawowe wzory pochodnych

- funkcje trygonometryczne

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Przykład

Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x)=\frac{\sin 3x^2}{2x^4+5x^2}$$

- iloczyn pochodnej przez stałą,

$$(af)'(x)=af'(x)$$

- pochodną ilorazu funkcji (*reguła ilorazu*),

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

- pochodną sumy funkcji (*addytywność*),

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x);$$

- pochodną złożenia funkcji (*reguła łańcuchowa*),

$$f'(x)=h'(g(x))g'(x) \qquad \text{dla} \qquad f(x)=h(g(x)).$$

- funkcje potęgowe

$$(a\,x^n)'=n\,a\,x^{n-1}$$

- funkcje trygonometryczne

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$f\left(x\right)=\frac{\sin 3x^{2}}{2x^{4}+5x^{2}}$$

$$f'(x)=\frac{\cos 3x^{2}\cdot 6x\cdot\left(2x^{4}+5x^{2}\right)-\sin 3x^{2}\cdot\left(8x^{3}+10x\right)}{\left(2x^{4}+5x^{2}\right)^{2}}$$

Zastosowania w fizyce - przykłady

Prędkość chwilowa

Jeśli funkcja $s = f(t)$ wyraża ruch punktu na prostej,
którą rozpatruje się jako oś współrzędnych *s*, to *s* jest współrzędną poruszającego się punktu w chwili *t*. Droga, którą przebędzie punkt w przedziale czasu [*t*, *t* + Δ*t*] jest równa

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

Prędkością średnią na tym odcinku jest wielkość:

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Prędkość chwilowa w momencie *t* jest równa

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = f'(t)$$

$$v_{ch} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Zastosowania w fizyce - przykłady cd..

Natężenie prądu

Prąd elektryczny polega na przepływie ładunków elektrycznych przez przewodnik.

Przez $Q(t)$ oznacza się ładunek przepływający przez ustalony przekrój przewodnika w chwili t.

Wtedy w czasie Δt przez ten przekrój przepływa ładunek elektryczny $\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$ jest ładunkiem elektrycznym przepływającym przez ten przekrój, a wielkość

$$I_{sr} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

nazywa się **średnim natężeniem prądu**.

Chwilowym natężeniem prądu jest wielkość

$$I = \frac{dQ}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Rachunek błędu metodą różniczki zupełnej

Opór: $$R = \frac{U}{I}$$

Wielkości mierzone: U (napięcie prądu) ΔU

I (natężenie prądu) ΔI

$$\Delta R = \left|\frac{\partial R}{\partial U}\right| \cdot |\Delta U| + \left|\frac{\partial R}{\partial I}\right| \cdot |\Delta I|$$

$$R = \frac{1}{I}U \qquad (y = ax) \qquad \left(y' = ax^{n-1} = ax^0 = a\right) \qquad \frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I}$$

$$R = U \cdot I^{-1} \qquad (y = ax^n) \qquad \left(y' = ax^{n-1} = ax^{-1-1} = ax^{-2} = \frac{a}{x^2}\right) \qquad \frac{\partial R}{\partial I} = \frac{U}{I^2}$$

$$\Delta R = \left|\frac{\partial R}{\partial U}\right| \cdot |\Delta U| + \left|\frac{\partial R}{\partial I}\right| \cdot |\Delta I|$$

$$\Delta R = \left|\frac{1}{I}\right| \cdot |\Delta U| + \left|\frac{U}{I^2}\right| \cdot |\Delta I|$$

$$\Delta R = \left|\frac{U}{IU}\right| \cdot |\Delta U| + \left|\frac{U}{I^2}\right| \cdot |\Delta I|$$

$$\Delta R = R\left[\left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{\Delta I}{I}\right|\right]$$

Rachunek całkowy

Całką nieoznaczoną funkcji *f(x)* nazywamy funkcję **F(x)** (tzw. *funkcję pierwotną*), która spełnia równanie:

$$F'(x) = f(x)$$

W myśl powyższej definicji całkowanie funkcji f(x) polega na znalezieniu jej funkcji pierwotnej. Korzystając z alternatywnego zapisu pochodnej funkcji, powyższe równanie przyjmie postać:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Po obustronnym pomnożeniu przez *dx*:

$$dF(x) = f(x)\,dx$$

Po obustronnym całkowaniu powyższą relację możemy zapisać jako:

$$\int dF(x) = \int f(x)\,dx$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Można zatem powiedzieć z pewnym przybliżeniem, że operacja całkowania jest operacją odwrotną do różniczkowania. Powyższe przybliżenie wynika z faktu, że o ile różniczkowanie jest operacją jednoznaczną, o tyle całkowanie już nie. Funkcja *f(x)* ma jedną i tylko jedną pochodną *f'(x)*. Natomiast *f(x)* ma nieskończenie wiele funkcji pierwotnych *F(x)*. Mówimy zatem, że wyznaczamy całkę nieoznaczoną funkcji *f(x)* z dokładnością do stałej addytywnej *C*, co zapisujemy jako:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Reguły całkowania

1. Całka sumy równa jest sumie całek

$$\int \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx$$

2. Całkowanie przez części:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

3. Całkowanie przez podstawienie:

$$\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt \quad \text{gdzie} \quad x = \varphi(t)$$

4. Całkowanie gdy w liczniku znajduje się pochodna mianownika:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right| + c$$

Podstawowe wzory

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int dx = x + c, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (0);$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (0);$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad x > 0;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c, \quad x > 0;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\int e^x dx = e^x + c, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad 0 < a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \operatorname{tg} x + c, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\};$$

Całki oznaczone nie powstały sobie ot tak, „z niczego”. Całki oznaczone rozwiązują pewien – zupełnie prosty do zrozumienia – problem. Czyli najpierw był PROBLEM, a później pojawiły się całki oznaczone.

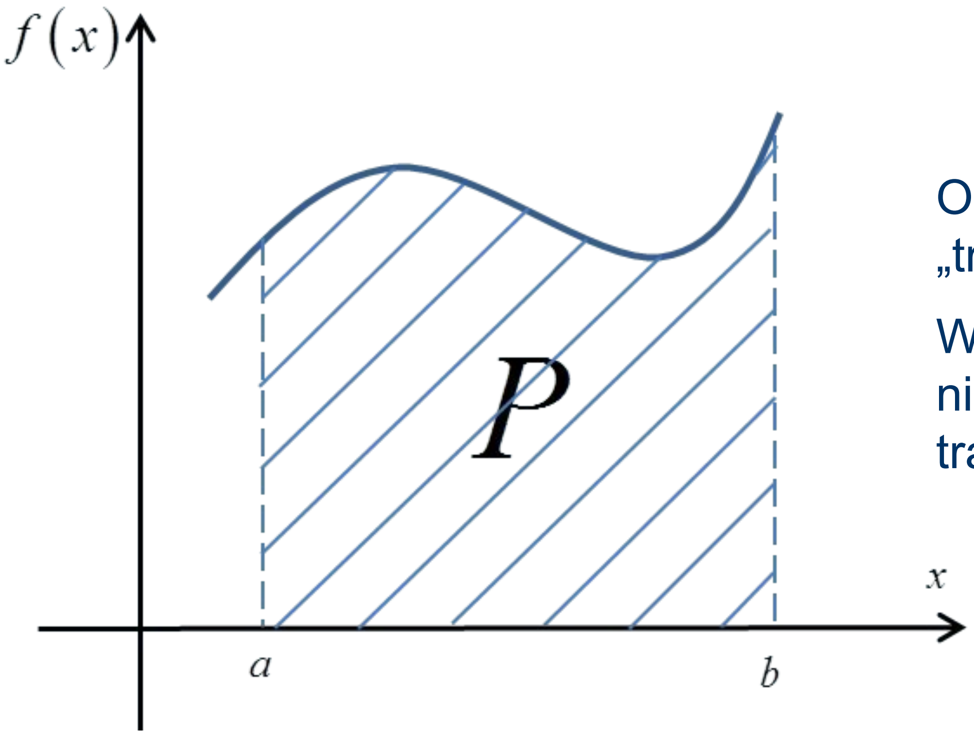
Na czym polegał problem?

Problem dokładnego obliczenia pola

Zastanówmy się nad kwestią obliczania pola jakiegoś obszaru.
Znamy wzory na pola: koła, kwadratu, prostokąta, równoległoboku, trapezu, rombu itd. Jest fajnie.
Co jednak jeśli obszar (np. kawałek lasu), którego pole chcemy policzyć nie jest takim równym: kołem, kwadratem, prostokątem, równoległobokiem, trapezem, rombem itd.? Mamy problem.

Sposób na obliczenie pola „nietypowego” obszaru

Rozważmy pewien „nietypowy” obszar umieszczony w układzie współrzędnych:

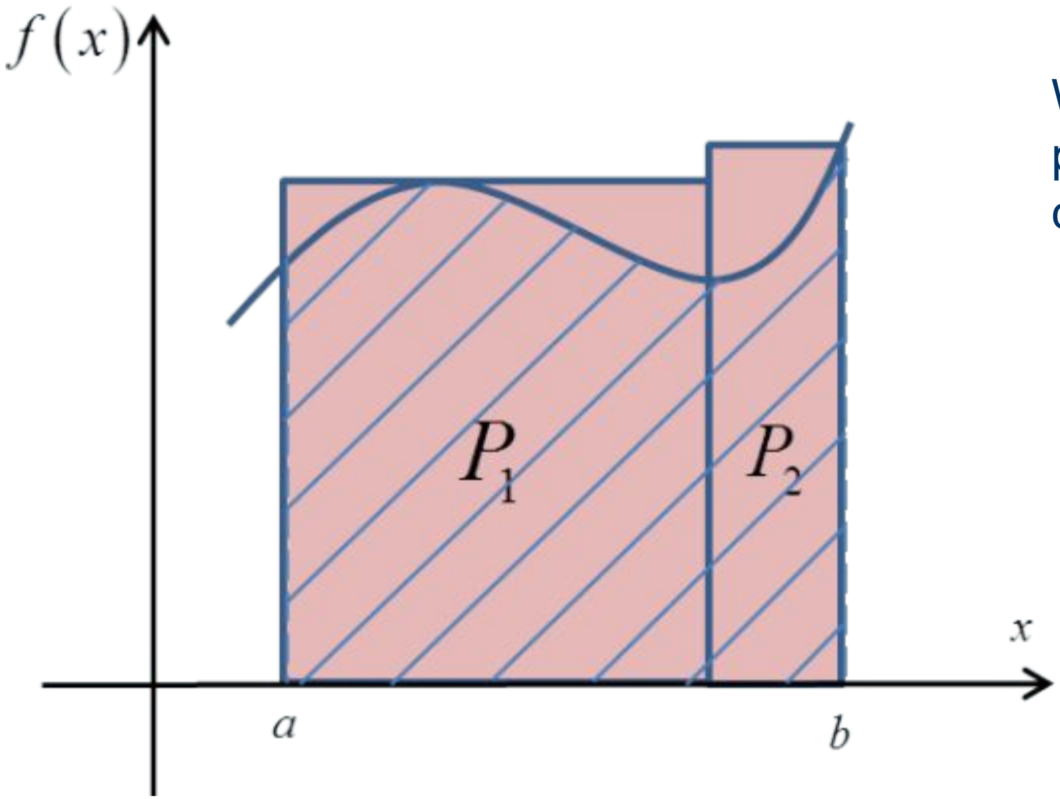


Obszar taki nazywany jest „trapezem krzywoliniowym”.

Właściwie każdy obszar nieregularny da się podzielić na trapezy krzywoliniowe.

Załóżmy, że funkcję f(x) **już znamy**, czyli że jest ona DANA.

Aby obliczyć pole tego trapezu krzywoliniowego, obszar pod wykresem funkcji możemy podzielić na pola dwóch prostokątów, których pola możemy obliczyć w prosty sposób.

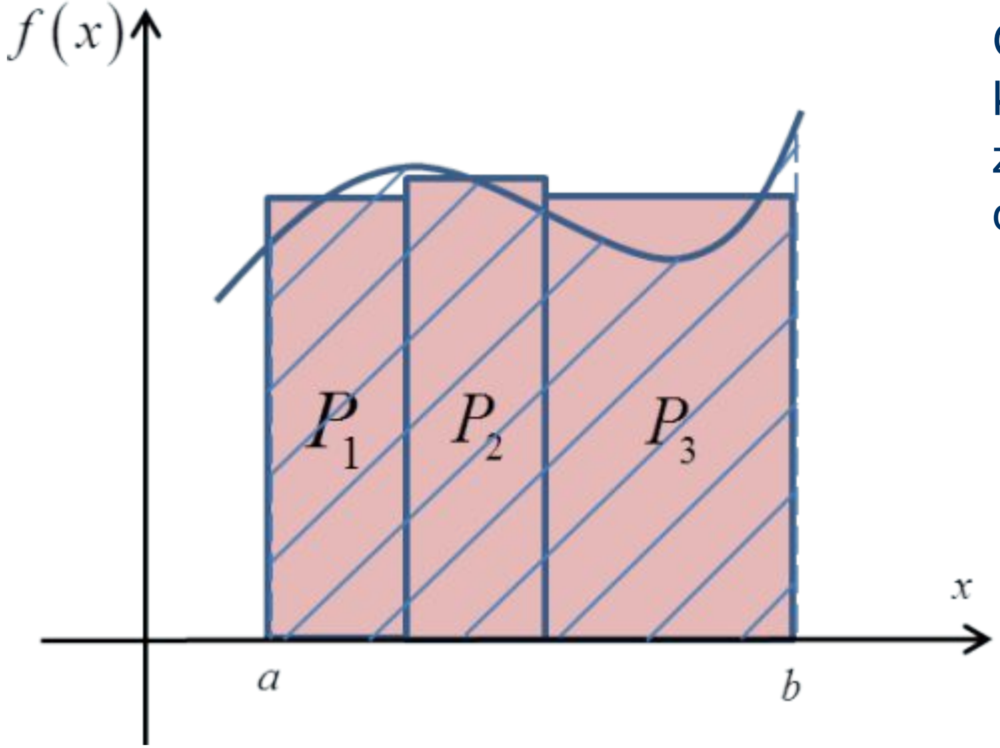


W ten sposób otrzymujemy pewne **przybliżenie** pola P, czyli:

$$P \approx P_1 + P_2$$

jednakże wartość tego pola jest mało dokładna.

Aby zwiększyć dokładność wartości obliczonego pola pójdźmy krok dalej i obszar pod wykresem przybliżmy polami trzech prostokątów:

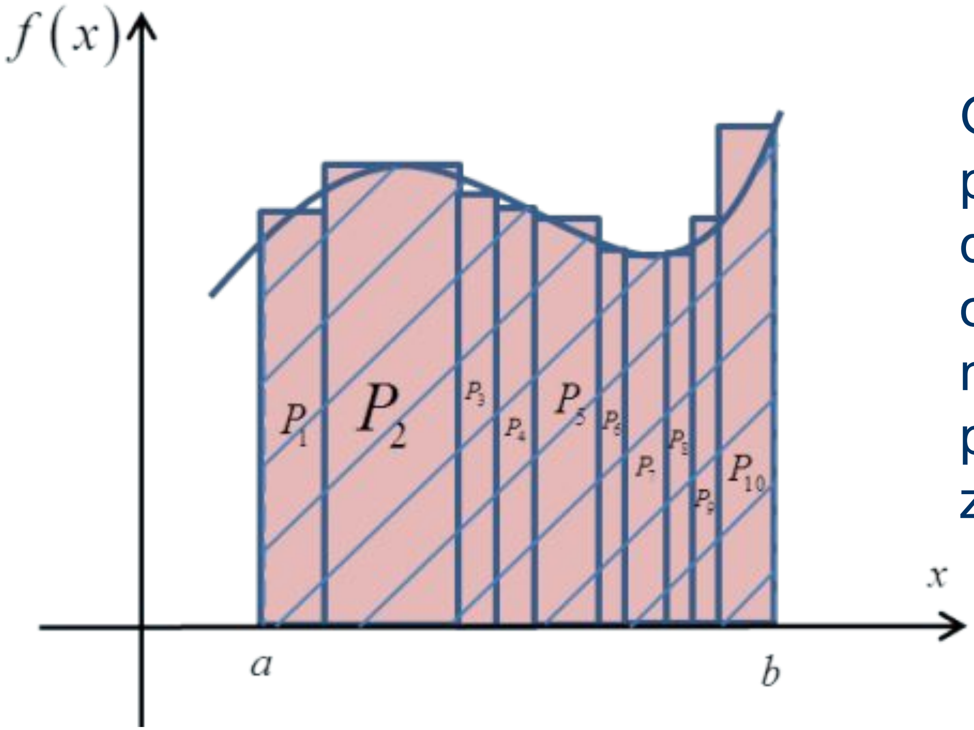


Otrzymamy w ten sposób kolejne przybliżenie pola P, zapewne już bardziej dokładne:

$$P \approx P_1 + P_2 + P_3$$

Zwiększając liczbę prostokątów do 10, które będą bardziej dopasowane do kształtu krzywej, otrzymamy, kolejne, lepsze przybliżenie pola P:

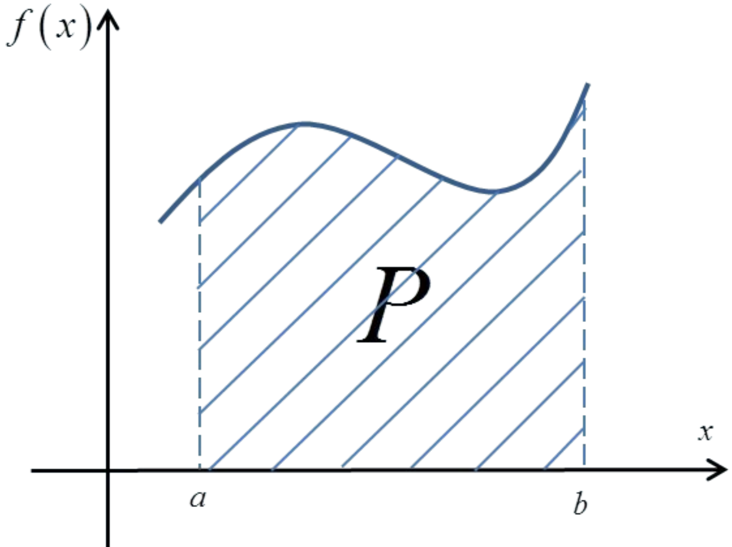
$$P \approx P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_9 + P_{10}$$



Gdyby naszym celem było policzenie pola P z pewną dokładnością, moglibyśmy osiągnąć to łatwo dzieląc go na odpowiednią ilość prostokątów i uzyskalibyśmy zadowalający wynik.

Zauważmy jednak, że naszym celem jest obliczenie **dokładnej**, a nie przybliżonej, wartości pola P.

Przedstawiona metoda jest już dobra, tylko prostokątów musi być **nieskończenie wiele**.
Jeżeli prostokątów tych będzie nieskończenie wiele i będą nieskończenie małe ich suma da nam dokładną wartość pola P.
Tak otrzymaną sumę nieskończoną nazywa się **całką oznaczoną** w sensie Riemanna.



$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dziękuję za uwagę