# Теория вероятностей и математическая статистика

# Теоремы сложения и умножения вероятностей

Тема 4

# *Теорема сложения для двух несовместных событий*

- *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

# Теорема сложения для двух несовместных событий

- **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:**

Пусть событию А благоприятствуют $m_A$ исходов, событию В – $m_B$ исходов из общего числа n всех возможных исходов. В силу несовместимости событий А и В ни один из исходов благоприятствующих В, не может благоприятствовать А, и наоборот.

Следовательно событию А+В благоприятствует $m_A$+$m_B$ исходов:

$$P\,(A+B)=\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}=P(A)+P(B)$$

# Теорема сложения для n несовместных событий

- Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

# Теорема сложения для n несовместных событий

**Следствие 1.**

Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образующих полную группу попарно несовместных событий, равна 1:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** *так как события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, то их сумма есть событие достоверное:* $\sum A_i = \Omega$

*Так как вероятность достоверного события равна 1, то*

$$P\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\Omega) = 1$$

# Теорема сложения для n несовместных событий

**Следствие 2.**

Сумма вероятностей противоположных *равна 1:*

$$\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** противоположные события А и $\overline{A}$ несовместимы, а их сумма есть достоверное событие, то согласно следствию 1, имеем:

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

# Теорема сложения двух совместных событий

- Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB)$$

# Теорема сложения двух совместных событий

- **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**:

$$A + B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$$

Так как события $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ и $AB$ несовместные, то по теореме о сумме несовместных событий имеем:

$$P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB) \qquad (*)$$

При этом $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$$

Подставим эти равенства в уравнение (*):

$$P(A + B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

# Условная вероятность события

- **Условной вероятностью $P_B(A)$** события А называется его вероятность, вычисленная при условии, что событие В произошло.
- Событие А называется **независимым** от события В, если его вероятность не меняется от того, произошло событие В или нет, т.е.

$$P_B(A) = P(A)$$

**Несовместимые события зависимы**, так как появление любого из них обращает в 0 вероятности появления всех остальных

# Теорема умножения двух зависимых событий

- Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

# Теорема умножения двух зависимых событий

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

- Пусть событию А благоприятствует m исходов, событию В – k исходов, событию С – ℓ исходов из общего числа n равновозможных и несовместных исходов ($\ell \le m$, $\ell \le k$).
- Тогда: $P(A) = \frac{m}{n}$ , $P(AB) = \frac{l}{n}$
- После того, как событие А произошло, число всех исходов стало равным m, а число исходов благоприятствующих событию В – ℓ.

Поэтому $\mathrm{P_A(B)} = \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{m}} = \frac{l/n}{m/n} = \frac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(A)}}$

Аналогично $\mathrm{P_B(A)} = \frac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(B)}}$.

Умножая обе части полученных равенств соответственно на P(A) и P(B), окончательно имеем:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

# Теорема умножения двух <u>независимых</u> событий

- Вероятность умножения независимых событий равна произведению их вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

# Теорема умножения двух <u>независимых</u> событий ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

- Если события А и В независимы, то $P(A) = P_B(A)$, из чего следует:

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A) = P(B) \cdot P(A)$$

**Следствия:**

1. Если события А и В независимы, то независимы и события $\bar{A}$ и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и В, А и $\bar{B}$
2. Для множества независимых испытаний, в каждом из которых случайное событие А может появиться с вероятностью р, вероятность Р появления события А хотя бы один раз равна

$$P = 1 - (1-p)^n$$

# Формула полной вероятности

- Вероятность P(B) события B, которое может произойти только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ на соответствующие условные вероятности событий B

$$P(B) = \sum_{i}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(B)$$

# Формула полной вероятности

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

- Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - полная система попарно несовместных событий, связанная с некоторым опытом, и $B$ - произвольное событие, связанное с тем же опытом.
- Очевидно, что для произвольного события A справедливо равенство: $A = A \cdot \Omega$.
- С другой стороны, по определению полной системы событий $\Omega = H_1 + H_2 + \ldots + H_n$ и поэтому

$$\Omega \cdot \mathrm{B} = (H_1 + H_2, + \ldots + H_n) \cdot \mathrm{B}$$
$$\mathrm{B} = H_1 \cdot B + H_2 \cdot B + \ldots + H_n \cdot B$$

# Формула полной вероятности

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

События $H_iB$ и $H_jB$ несовместимы, поэтому $\mathbf{P(B) = P(H_1B) + P(H_2B) + \ldots + P(H_nB)}$, или, короче,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cdot H_i)$$

По теореме умножения для зависимых событий имеем: $P(B \cdot H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(B)$ и, следовательно,

$$P(B) = \sum_{i}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(B)$$

# Формула Байеса

- Вероятность $P_B(H_i)$ гипотезы $H_i$ при условии, что событие B произошло, равна:

$$P_B(H_i) = \frac{P(H_i) * P_{H_i}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) * P_{H_i}(B)}$$