Понятие предиката. Логические операции над предикатами

Рассматриваемые вопросы

1. Понятие предиката. Область определения предиката.
2. Одноместный предикат. Многоместный предикат.
3. Логические операции над предикатами.

Понятие предиката

Выразительные возможности языка логики высказываний очень **ограничены**. С ее помощью невозможно проанализировать внутреннюю структуру даже очень простых рассуждений.

Пример: есть два умозаключения.

Любой человек смертен, Сократ - человек, следовательно, Сократ смертен.

Крокодилы не летают, Луна - головка швейцарского сыра, следовательно, сборная России выиграет чемпионат мира по футболу.

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \ \square \ \mathbf{Z}.$$

Расширение логики высказываний называется логикой предикатов

Понятие предиката

Первое высказывание представляется строгим логическим выводом, второе же не соответствует никакому здравому смыслу.

Эти примеры подтверждают тезис о том, что в логике высказываний не рассматривается внутреннее содержание простейших высказываний (атомарных формул).

Не имеется возможности «влезть» внутрь элементарного высказывания.

Расширение логики высказываний называется логикой предикатов.

Понятие предиката

В высказывании все четко: это — **конкретное утверждение** о **конкретных объектах** — истинное или ложное.

Предикат — предложение, похожее на высказывание, но все же им не являющееся: о нем нельзя судить, истинно оно или ложно.

Понятие предиката

Логика предикатов, как и традиционная формальная логика, расчленяет элементарное высказывание на *субъект* (подлежащее, хотя оно может играть и роль дополнения) и *предикат* (сказуемое, хотя оно может играть и роль определения).

Субъект – это то, о чем что-то утверждается в высказывании

Предикат – это то, что утверждается о субъекте

Например, в высказывании “**7 - простое число**”, “7” – *субъект*, “простое число” – *предикат*.

*Это высказывание утверждает, что “7” обладает свойством “**быть простым числом**”.*

Понятие предиката

ПРИМЕР “7 - простое число”

Если в рассмотренном примере заменить конкретное число 7 переменной x из множества натуральных чисел, то получим высказывательную форму:

“x – простое число”

При одних значения x (например, $x=13$, $x=17$) эта форма дает истинные высказывания, а при других значениях x (например, $x=10$, $x=18$) эта форма дает ложные высказывания.

Эта высказывательная форма определяет функцию одной переменной x, определенной на множестве N, и принимающую значения из множества $\{1;0\}$.

<u>Здесь предикат становится **функцией субъекта** и **выражает свойство субъекта**.</u>

Понятие предиката

В естественной речи часто встречаются сложные высказывания, истинность которых может изменяться при изменении объектов, о которых идет речь, хотя форма самого высказывания остается прежней.

Например:

- «У кошки четыре ноги» - истинно,
- «У слона четыре ноги» - истинно,
- «У человека четыре ноги» - ложно.

Все эти высказывания имеют одну форму:

«У субъекта х четыре ноги».

Понятие предиката

Таким образом, раздел математической логики, изучающий логические законы, общие для любой области объектов исследования (содержащей хоть один объект) с заданными на этих объектах предикатами (т. е. свойствами и отношениями) называется **ЛОГИКОЙ ПРЕДИКАТОВ**

Объект – некоторая часть окружающего нас мира, которая может быть рассмотрена как единое целое

Субъект – (в логике) подлежащее суждения, то есть предмет, о котором что-либо говорится или мыслится

*Переменное высказывание, истинностное значение которого зависит от параметра, и называется **предикатом**.*

Предикат от лат. Praedicatum – *сказанное*. Таким образом, **предикат** *есть функция, определенная на некотором множестве параметров и со значениями в {0, 1}.*

Понятие предиката

Определение 1. **Одноместным предикатом P(x)** называется такая функция одной переменной, в которой аргумент x пробегает значения из некоторого множества M, а функция при этом принимает одно из двух значений: истина или ложь.

Само **множество M** называется **предметным множеством**, а аргументы x1,...,xn $\in$ M - **предметными переменными**.

Множество M, на котором задан предикат, называется **областью определения предиката**.

Множество, на котором предикат принимает только истинные значения, называется **областью истинности предиката P(x).**

Определение 2. **N-местным предикатом** называется такая функция n переменных Q(x1, x2, …,xn), определенная на множестве M=M1×M2×…×Mn и принимающая на этом множестве одно из двух значений: истина или ложь.

Можно считать, что **высказывание** это **нульместный предикат**, то есть предикат, в котором нет переменных для замены.

Понятие предиката. Примеры

Пример 1

Пусть предметное множество M есть класс млекопитающих.
Рассмотрим одноместный предикат P(x):

«У x четыре ноги».

Тогда P(слон) = 1,
P(кошка) = 1,
P(человек) =0.

Пример 2

Пусть M - множество натуральных чисел.
Рассмотрим двухместный предикат G(x,y): $x<y$.

Тогда, <u>например</u>, G(1,3) = 1,
G(8,5) = 0.

Классификация предикатов

Предикат называется:

А) **Тождественно истинным**, если значение его для любых аргументов есть «истина»
Предикат “x+y=y+x” является тождественно истинным.

Б) **Тождественно ложным**, если значение его для любых аргументов есть «ложь»
Предикат “x+1=x” – тождественно ложным.

В) **Выполнимым**, если существует, по крайней мере, одна n-система его аргументов, для которой значение предиката есть «истина».
Предикат “x+y=5” – выполнимым.

Равносильность предикатов

Два n-местных предиката P(x1, x2, ..., xn) и Q(x1, x2, ..., xn), заданных над одними и теми же множествами M1, M2, …, Mn, называются **равносильными**, если набор предметов (элементов) a1 $\in$ M1, a2 $\in$ M2, .., an $\in$ Mn превращает первый предикат в истинное высказывание P(a1, a2, …, an) в том и только в том случае, когда этот набор предметов превращает второй предикат в истинное высказывание Q(a1, a2, …, an).

Предикаты P(x1, x2, ..., xn) и Q(x1, x2, ..., xn) равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают

$$\mathbf{P}^{+} = \mathbf{Q}^{+}.$$

Переход от одного равносильного предиката к другому называется **равносильным преобразованием** первого

Пример

Пусть требуется решить уравнение (найти множество истинности предиката):

$$4x\text{-}2=\text{-}3x\text{-}9$$

Преобразуем его равносильным образом:

$$4x-2=-3x-9 \Leftrightarrow 4x+3x=-9+2 \Leftrightarrow x=-1.$$

Ответ: $\{-1\}$ — множество всех решений данного уравнения (множество истинности данного предиката).

Следование предикатов

Предикат Q(x1, x2, ..., xn), заданный над множествами M1, M2, …, Mn, называется **следствием предиката** P(x1, x2, ..., xn), заданного над теми же множествами, если он превращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений предметных переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание превращается предикат P(x1, x2, ..., xn).

Предикат Q является следствием предиката P тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}^{+} \subseteq \mathbf{Q}^{+}$.

Обозначается $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$

Пример

Одноместный предикат, определенный на множестве натуральных чисел, *«n делится на 3»* является следствием одноместного предиката, определенного на том же множестве, *«n делится на 6»*.

Из двух предикатов первый будет следствием второго, если считать, что оба предиката заданы на множестве Z целых чисел.

Упражнение 1.

Среди следующих предложений выделите предикаты:

1) Луна есть спутник Венеры
2) Планеты x и y принадлежат Солнечной системе
3) $5+\sqrt[5]{70}-\sqrt[6]{10}>150$
4) $x^2+3x+2=0$
5) x^4-3x+8
6) Любое простое число не имеет делителей, отличных от себя и 1
7) Натуральное число n не меньше 1
8) Треугольник ABC равен треугольнику A1B1C1
9) $x^2+2x+1>0$
10) $1+tg^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
11) $\ln x<\sin x$

Ответ: 2); 4); 7)-11)

Упражнение 2.

Среди следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности.

1)$x+5=1$
2)При $x=2$ выполняется равенство $x^2-1=0$
3)$x^2-2x+1=0$
4)Существует такое число x, что $x^2-2x+1=0$
5)$x+2<3x-4$
6)Однозначное число x кратно 3
7)$(x+2)-(3x-4)$

1) Одноместный предикат $P(x)$, $I_p=-4$
2) Ложное высказывание. Не предикат
3) Одноместный предикат $P(x)$, $I_p=1$
4) Истинное высказывание. Не предикат
5) Одноместный предикат $P(x)$, $I_p=(3;+\infty)$
6) Одноместный предикат $P(x)$, $I_p=(0;3;6;9)$
7) Не предикат

Логические операции над предикатами

Отрицанием предиката P(x) называется новый предикат, множество истинности которого является дополнением множества истинности предиката P(x), то есть:

$$I_{\overline{p}} = CI_p$$

Пример. Предикат P(x) - «x≤3»

Отрицание предиката – «x>3»

Логические операции над предикатами

Конъюнкцией предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат, который принимает значение 1 при тех и только тех значениях, при которых каждый из предикатов P(x) и Q(x) принимает значение 1 и принимает 0 во всех остальных случаях.

Множество истинности есть пересечение множеств истинности

$$I_{P \wedge Q} = I_p \cap I_q$$

Пример. Предикаты P(x) - «x>-3» и Q(x) – «x<3»

Конъюнкция предикатов – «(x>-3) Λ (x<3)»

Логические операции над предикатами

Дизъюнкцией предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат, который принимает значение 1 при тех и только тех значениях, при которых хотя бы один из предикатов P(x) и Q(x) принимает значение 1 и принимает 0 во всех остальных случаях.

Множество истинности есть объединение множеств истинности

$$I_{P\vee Q} = I_p \cup I_q$$

Пример. Предикаты P(x) - «x≠0» и Q(x) – «y ≠0»
Дизъюнкция предикатов – «(x ≠0) v (y ≠0)»

Логические операции над предикатами

Импликацией предикатов P(x) и Q(x) называется предикат, который имеет значение ложь на тех и только на тех наборах аргументов x, на которых P(x) имеет значение 1, а Q(x) – значение 0.

Множество истинности есть объединение множеств истинности

$$I_{P\to Q} = CI_p \cup I_q$$

Пример. Предикаты P(x) - «Натуральное число x делится на 3».

Q(x) – «Натуральное число x делится на 4»

Импликация предикатов – «Если натуральное число x делится на 3, то оно делится и на 4»

Логические операции над предикатами

Эквиваленцией P(x) и Q(x) называется предикат, который имеет значение истина на тех и только на тех наборах аргументов x, на которых значения истинности P(x) и Q(x) совпадают.

Множество истинности есть объединение множеств истинности

$$I_{P\leftrightarrow Q} = (CI_p \cap CI_q) \cup (I_p \cap I_q)$$

Упражнение 3.

Пусть даны предикаты P(x): «x – четное число» и Q(x): «x кратно 3», определенные на множестве N. Найти области истинности предикатов:

1) $P(x) \wedge Q(x)$
2) $P(x) \vee Q(x)$
3) $\neg P(x)$
4) $P(x) \to Q(x)$

$I_p = \{2,4,6,8,10,12,\ldots 2n,\ldots\}$, $I_q = \{3,6,9,12,\ldots 3n,\ldots\}$

1) $\{6,12,\ldots 6n,\ldots\}$
2) $\{2,3,4,6,\ldots 2n,3n,\ldots\}$
3) $\{1,3,5,\ldots 2n-1,\ldots\}$
4) $\{1,3,5,\ldots 2n-1,\ldots\} \vee \{3,6,9,\ldots 3n,\ldots\}$

Упражнение 4.

Если значения x,y принадлежат отрезку [2;5], то в списке выражений следующего вида:

1) x=2 или y=7

2) x-y=7

3) x+y<2

4) $x^2 + 5 = 0$

5) 3<x<y<5

6) x>12

Число истинных и ложных предикатов соответственно равно:

А) 2,4

Б) 1,4

В) 3,3

Г) 1,5

Д) 2,3

ОТВЕТ Г) 1,5

Упражнение 5.

Запишите предикат (условие, которое может быть и сложным), полностью описывающий область, нестрого заключенную между окружностью с центром в начале координат и радиусом 2 и квадратом, в который вписана эта окружность.

Уравнение окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = 4$

Уравнения квадрата: $|x| = 2$ $\quad |y| = 2$

Искомая область образуется пересечением внешней области окружности, и внутренней области квадрата

Таким образом, ответ: $(x^2 + y^2 \geq 4)\ \&\ (|x| \leq 2)\ \&\ (|y| \leq 2)$

Самостоятельно

Для более подробного изучения материала самостоятельно читаем:
УЧЕБНИК: «Математическая логика и теория алгоритмов»,
автор Игошин В.И.

Страницы 146-156