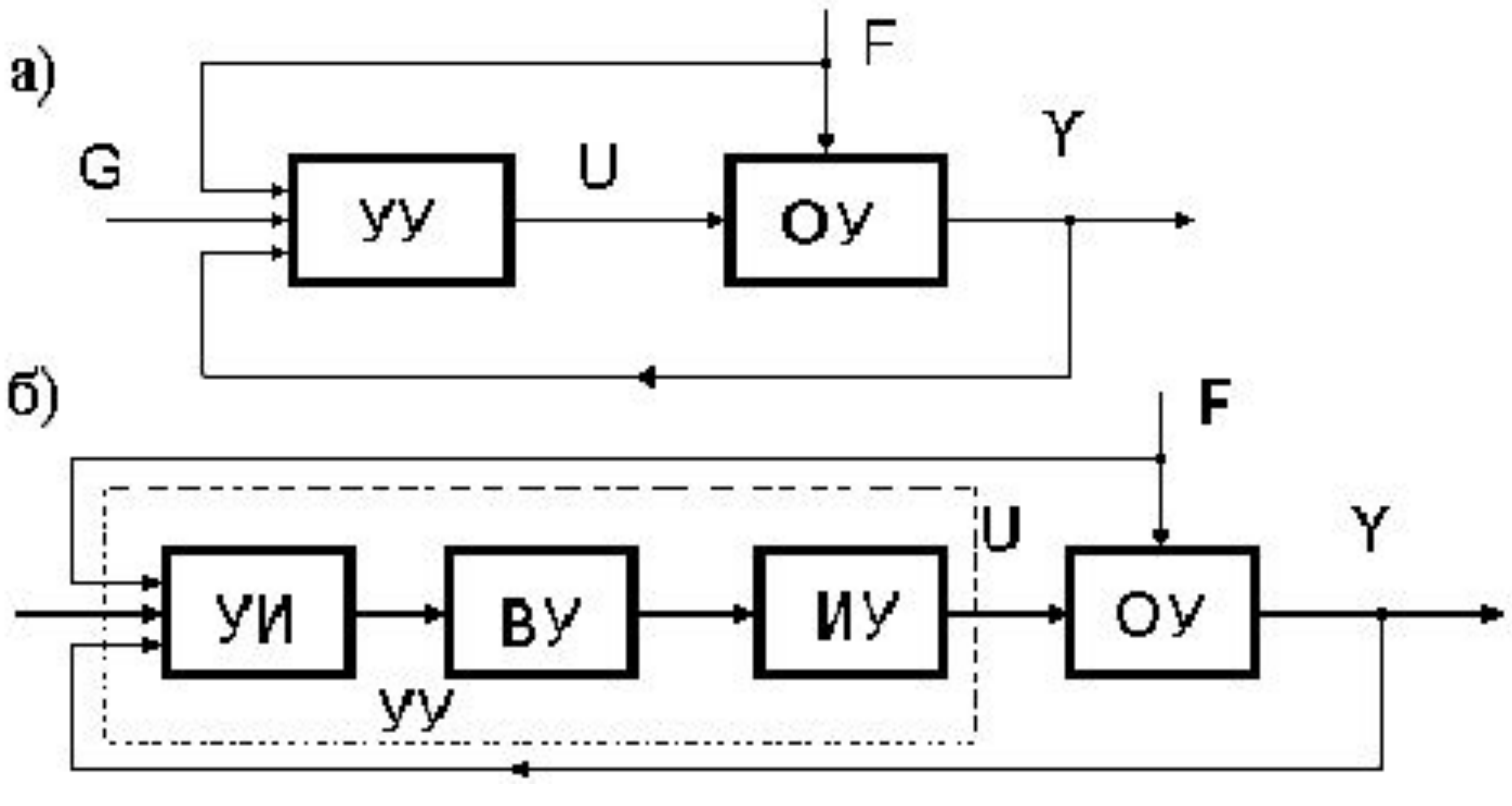
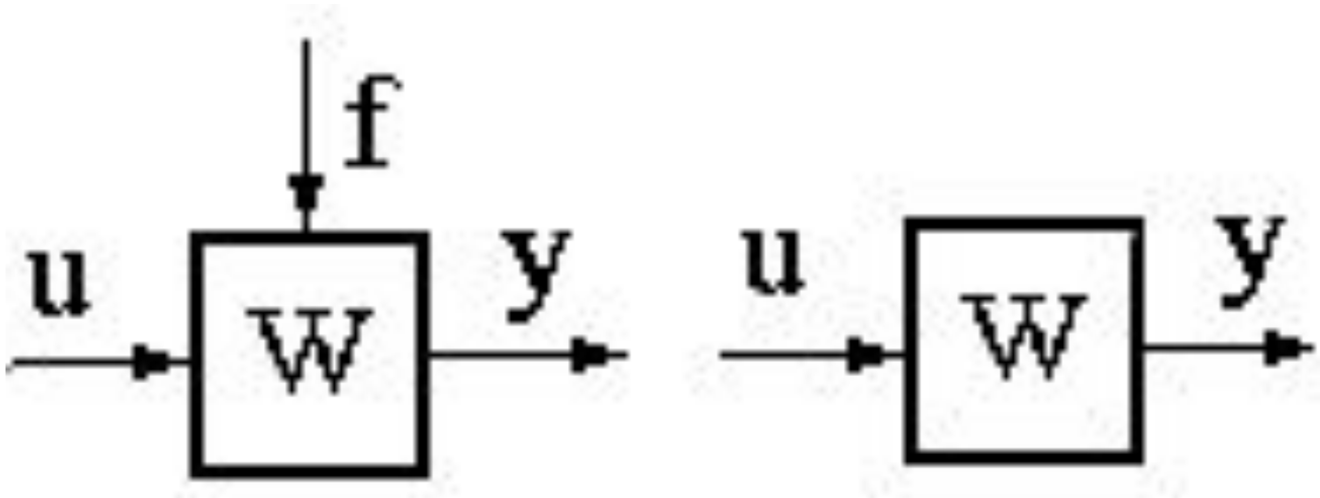
Системы автоматического управления

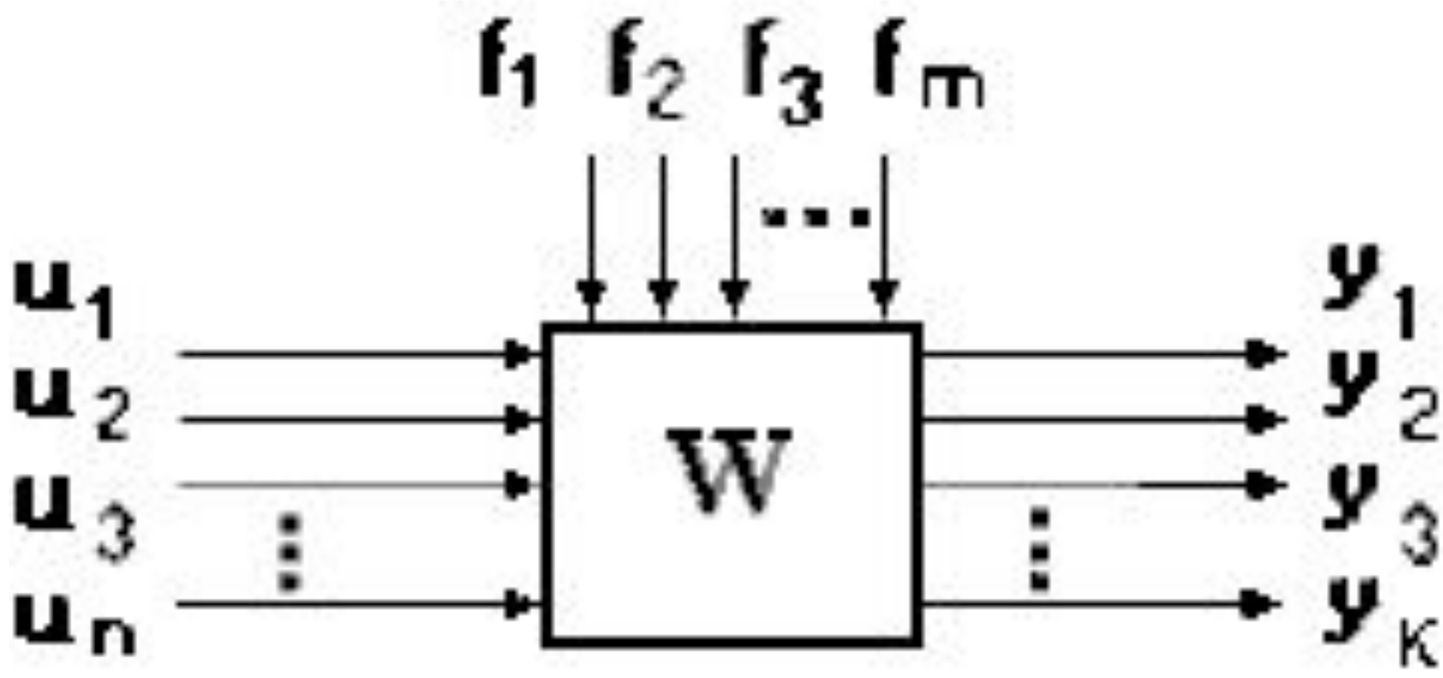
Основные понятия теории автоматического управления

Структурная схема САУ



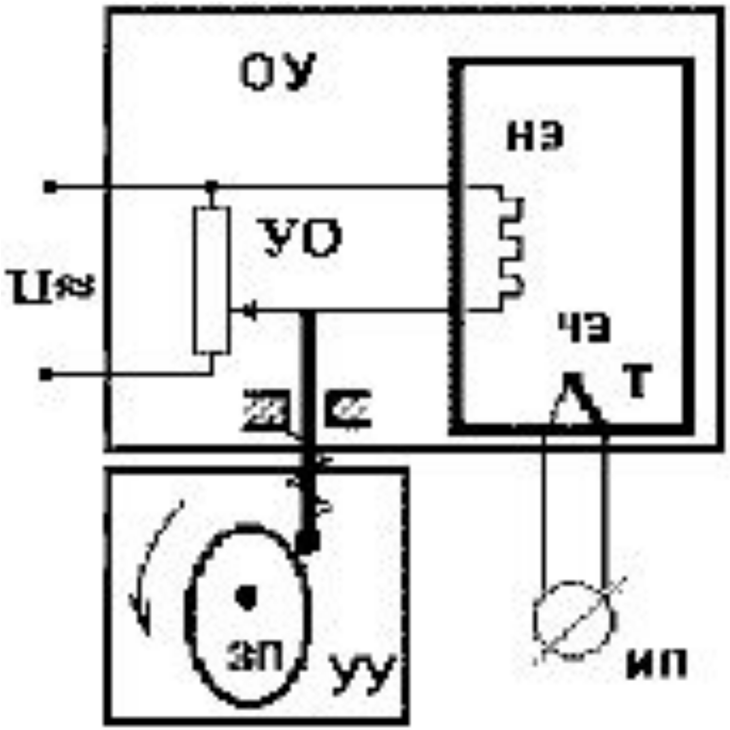
Функциональная схема САУ





f1 f2 f3 fm
u1
u2
u3
un
W
y1
y2
y3
yK

САУ температурой печи



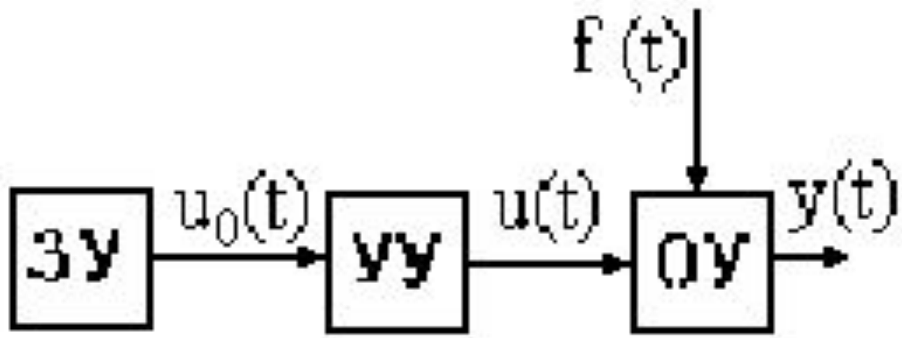


Рис.1.6

Принцип компенсации

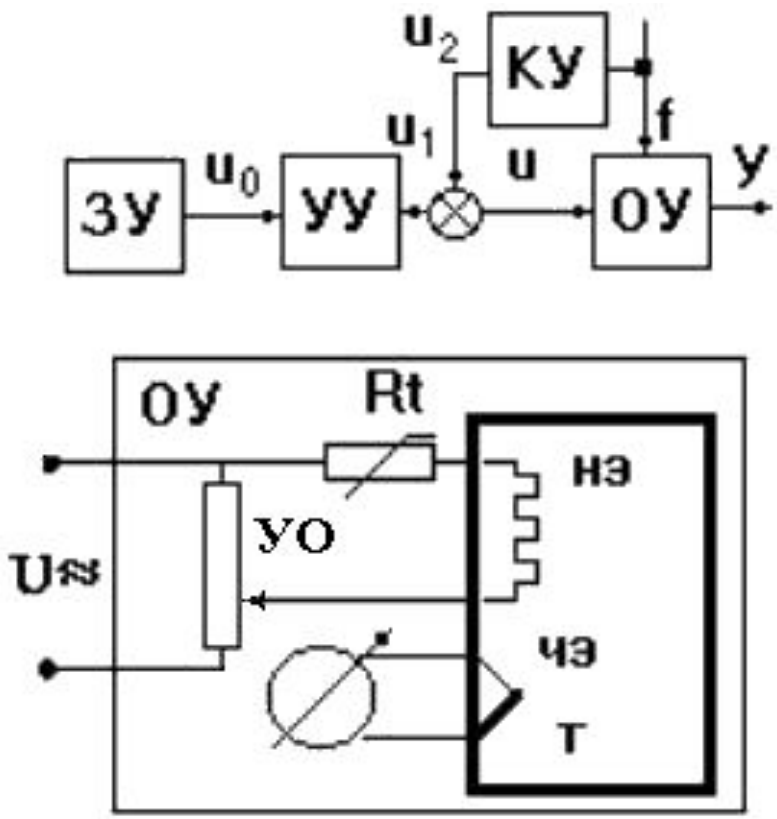
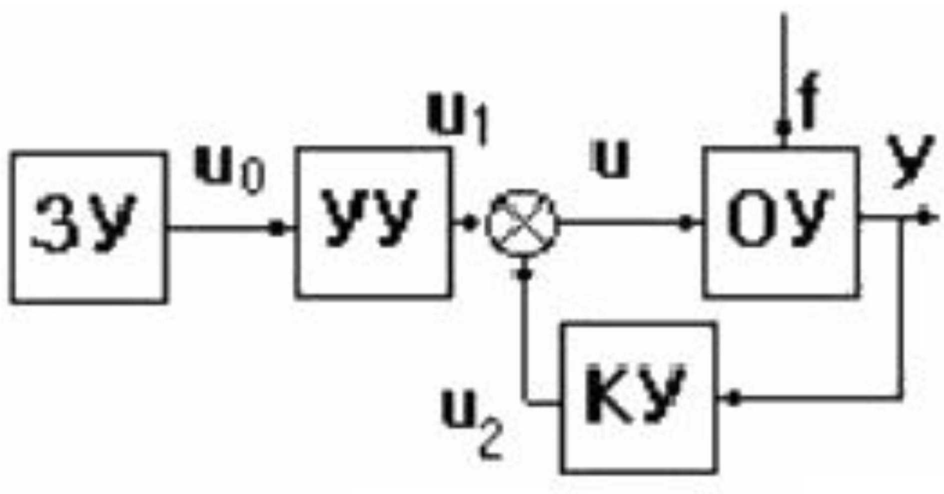
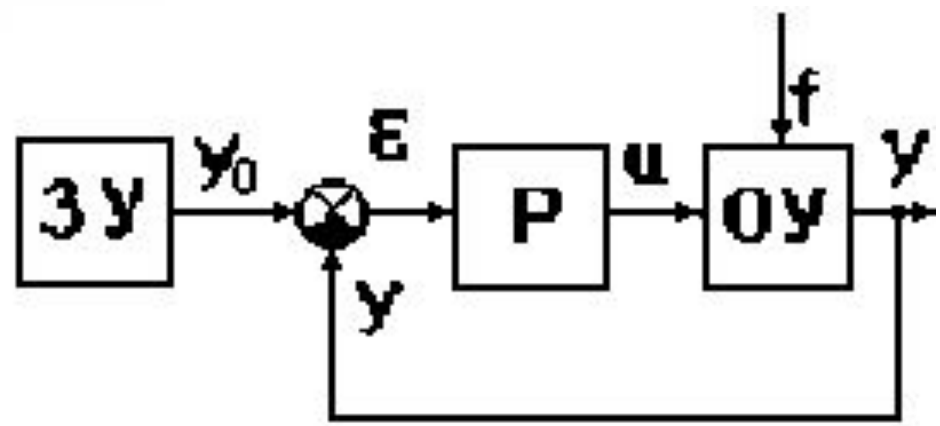


Рис.1.7

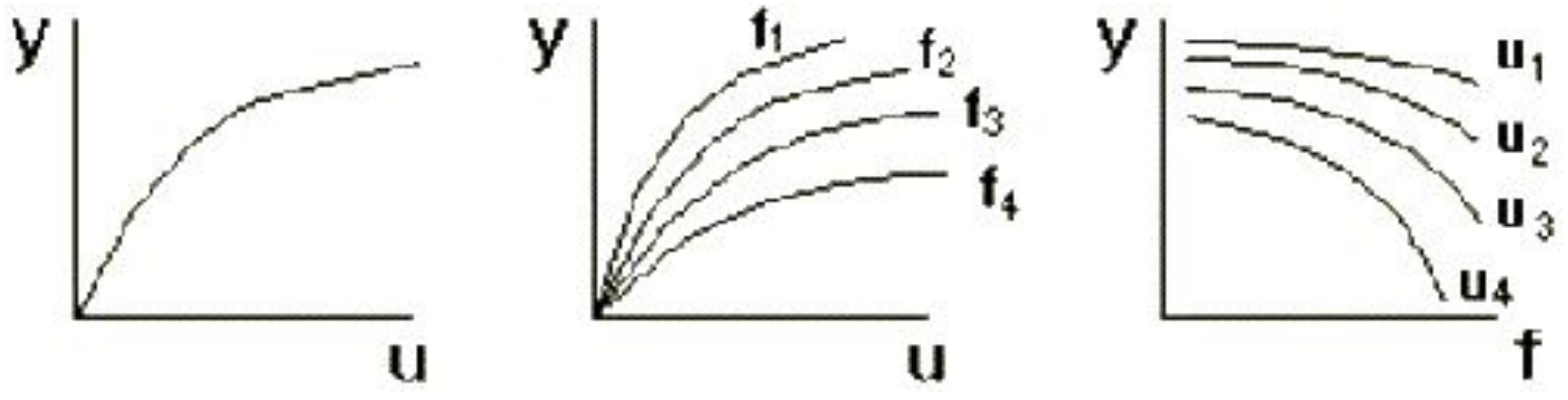
Принцип обратной связи

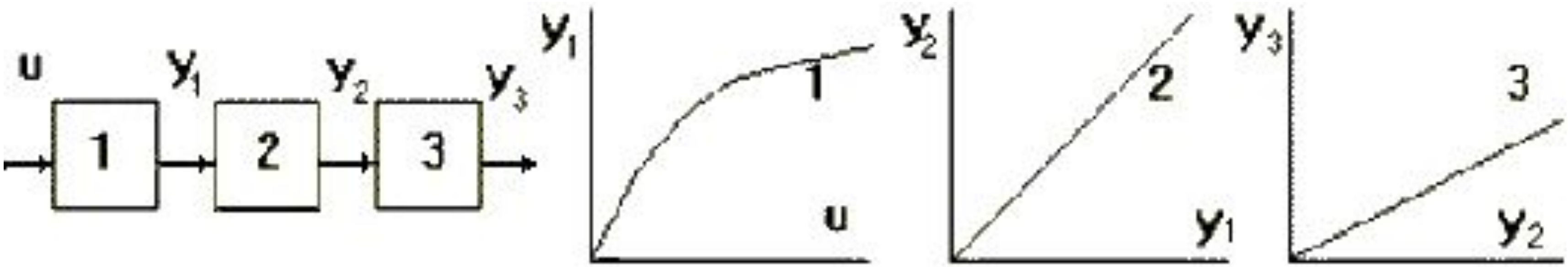




Статические характеристики САУ

- $y = F(u,f)$
- $K = y/u$
- $K = \Delta y/\Delta u \neq const.$




u
y1
y2
y3
1
2
3
y1
1
u
y2
2
y1
y3
3
y2

Динамические характеристики

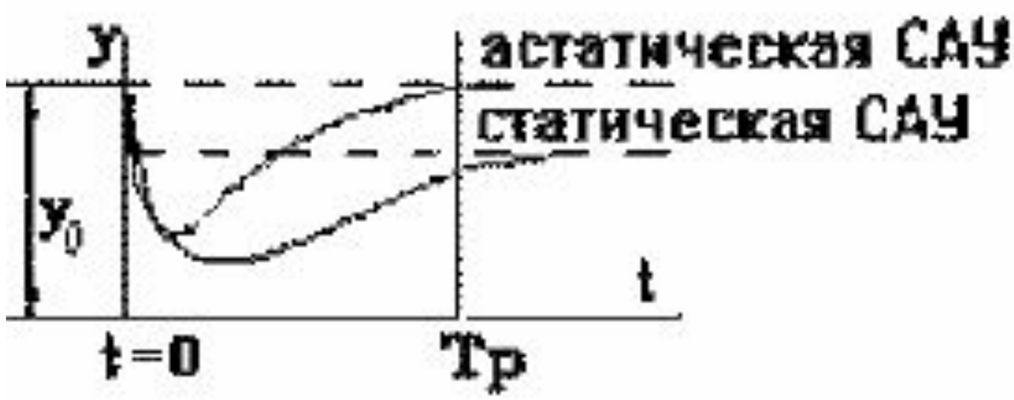
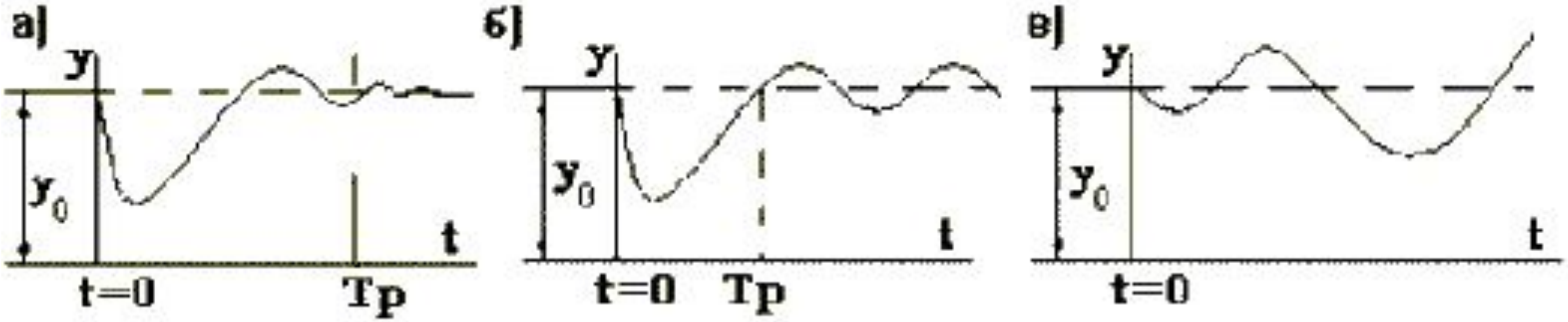


Рис.2.12

Колебательный процесс



Уравнение динамики

- $y(t) = F(u, f, t)$
- *Поэтому основным методом исследования САУ в динамических режимах является метод решения дифференциальных уравнений*.
- Уравнение динамики в общем виде можно записать так:

$$F(y, y', y'', \ldots, y(n), u, u', u'', \ldots, u(m), f, f', f'', \ldots, f(k)) = 0$$

Передаточная функция

- Дифференциальный оператор $p = d/dt$ так, что, $dy/dt = py$, а $pn = dn/dt$.
- Операция интегрирования записывается как $1/p$.
- $a_0p^ny + a_1p^{n-1}y + ... + a_ny = (a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_n)y$
- Не надо путать эту форму записи с операционным исчислением - здесь используются непосредственно функции времени y(t), u(t) (оригиналы), а не их изображения *Y(p), U(p),* получаемые из оригиналов по формуле преобразования Лапласа.

Уравнение динамики

$$y = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} u = \frac{K(p)}{D(p)} u = W(p) \cdot u$$

$K = b_m / a_n$

Частотные характеристики

$$u(t) = U_m e^{j\omega t} = U_m(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

$$y(t) = Y_m e^{j(\omega t + \varphi)} = Y_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

$$pu = pU_m e^{j\omega t} = U_m j\omega e^{j\omega t} = j\omega u$$

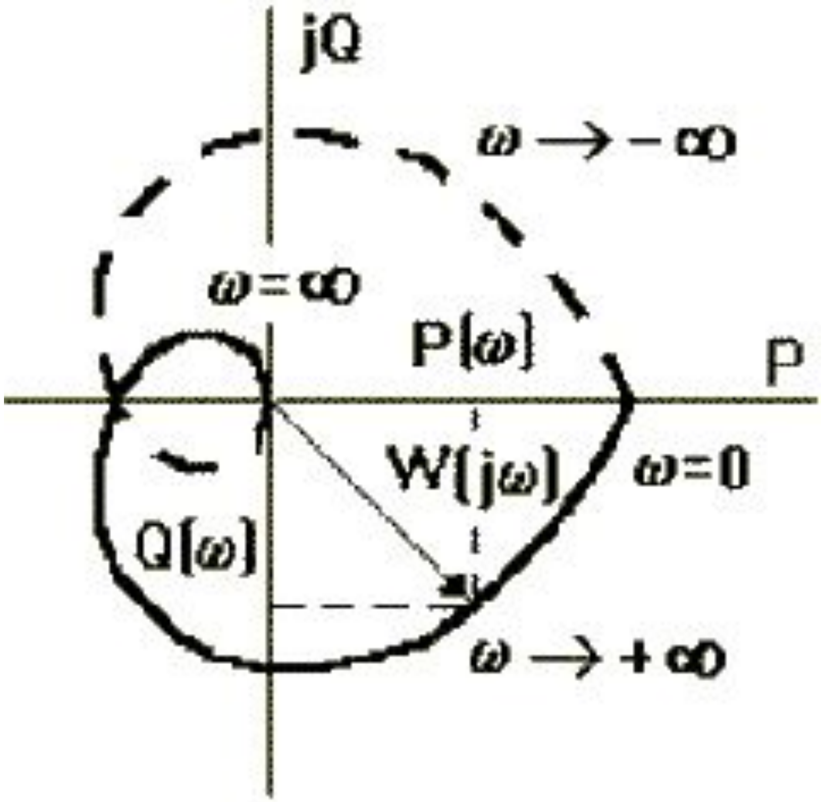
$$p^n u = p^n U_m e^{j\omega t} = U_m (j\omega)^n e^{j\omega t} = (j\omega)^n u$$

$$y = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n} u = W(j\omega)u$$

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = \frac{U_m}{Y_m} = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

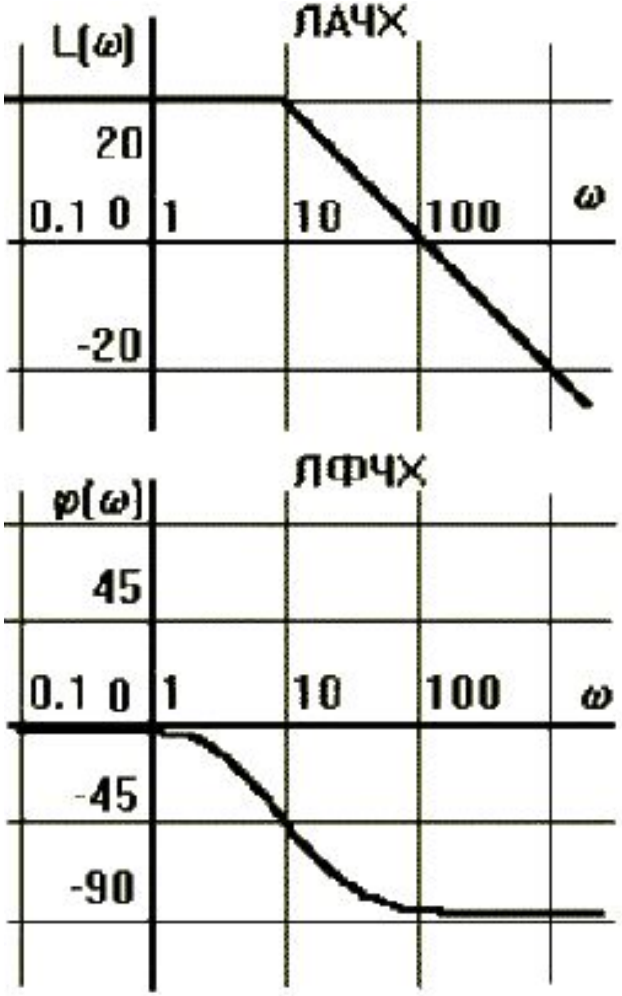
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$



Логарифмические частотные характеристики

$$\ln[W(j\omega)] = \ln[A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}] =$$
$$= \ln[A(\omega)] + \ln[[e^{j\varphi(\omega)}] =$$
$$= \ln[A(\omega)] + \varphi(\omega)$$

$L(\omega) = 20lgA(\omega)$



Временные характеристики

$$1(t) = \begin{cases} 1, \text{ при } t \geq 0; \\ 0 \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{K(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{K(p_k) \cdot e^{p_k t}}{p_k D'(p_k)}$$

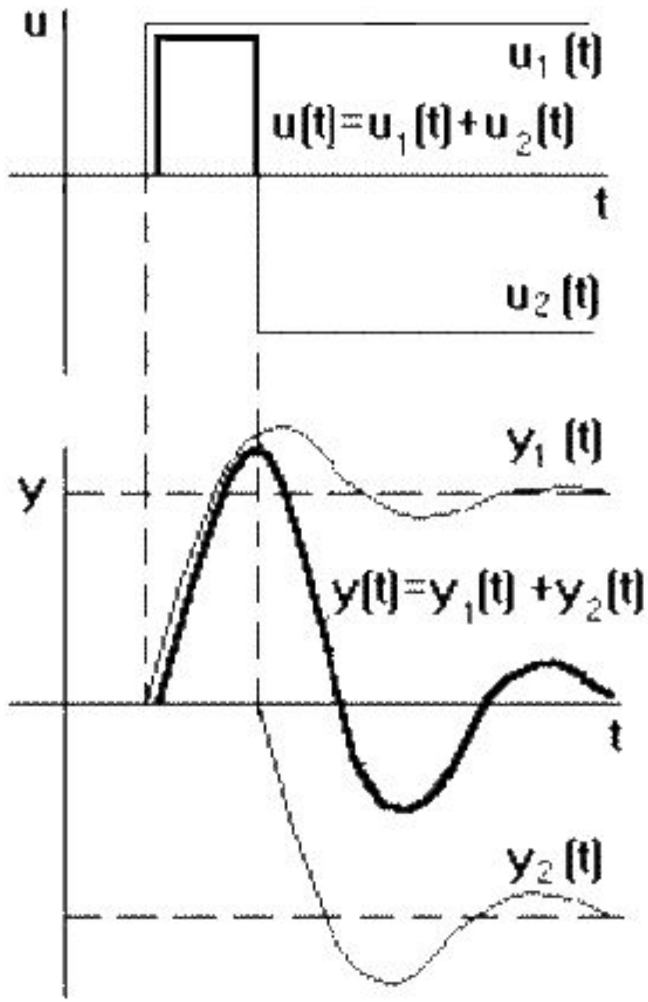


Рис.2.16

Элементарные звенья САУ

$$W_э(p) = \frac{b_0p^2 + b_1p + b_2}{a_0p^2 + a_1p + a_2}$$

$$W(p) = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{b_0(p - p_{\tilde{1}})(p - p_{\tilde{2}})\ldots(p - p_{\tilde{m}})}{a_0(p - p_1)(p - p_2)\ldots(p - p_n)}$$

$$W = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n} =$$

$$= \frac{b_0(p - \alpha_{\tilde{1}})(p^2 - 2p\alpha_{\tilde{2}} + (\alpha_{\tilde{2}}^2 + \omega_{\tilde{2}}^2))\ldots}{a_0(p - \alpha_1)(p^2 - 2p\alpha_2 + (\alpha_2^2 + \omega_2^2))\ldots} = W_0 W_1 W_2 \ldots$$

Пропорциональное звено

- Его уравнение: $y(t) = ku(t)$.
- Передаточная функция: $W(p) = k$.
- Переходная характеристика: $h(t) = k1(t)$.
- АФЧХ: $W(j\omega) = k$.
- ВЧХ: $P(\omega) = k$.
- МЧХ: $Q(\omega) = 0$.
- АЧХ: $A(\omega) = k$.
- ФЧХ: $\varphi(\omega) = 0$.
- ЛАЧХ: $L(\omega) = 20\lg k$.

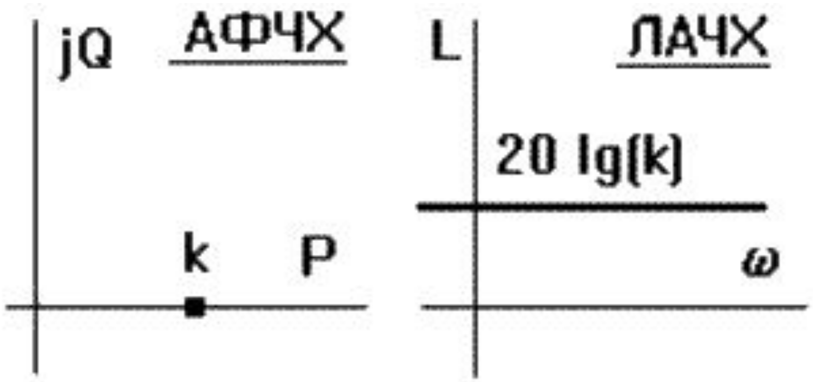


Рис.2.18

Интегрирующее звено

- Передаточная функция: W(p) = k/p.
- При *k* = *1* звено представляет собой “чистый” интегратор с передаточной функцией *W(p)* = *1/p*.
- АФЧХ: ВЧХ: P(ω) = 0.
- МЧХ: Q(ω) = – 1/ω.
- АЧХ: A(ω) = 1/ω.
- ФЧХ: φ(ω) = – π/2.
- ЛАЧХ: L(ω) = 20lg(1/ω) = – 20lg(ω).

$$y(t) = k\int_0^t u(t)dt$$

$$h(t) = k\int_0^t 1(t)dt = k \cdot t$$

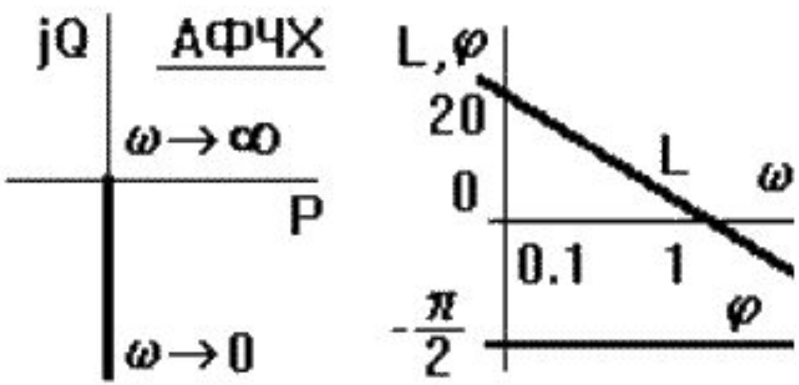


Рис.2.20

Апериодическое звено

$$y + T\frac{dy}{dt} = k \cdot u \qquad W(p) = \frac{k}{Tp+1}$$

$$\mathbf{h(t)} = \frac{\mathbf{K(0)}}{\mathbf{D(0)}} + \frac{\mathbf{K(p_1)\cdot e^{p_1 t}}}{\mathbf{p_1 \cdot D'(p_1)}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{T\cdot 0+1}} + \frac{\mathbf{k\cdot e^{-t/T}}}{\mathbf{-(1/T)\cdot T}} = \mathbf{k(1-e^{-t/T})}$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega T+1} = \frac{1-j\omega T}{1+(\omega T)^2}$$

$$P(\omega) = \frac{1}{1+(\omega T)^2} \qquad Q(\omega) = -\frac{\omega T}{1+(\omega T)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega T)$$

$$L(\omega) = 20\lg(A(\omega)) = -20\lg(\sqrt{1+(\omega T)^2})$$

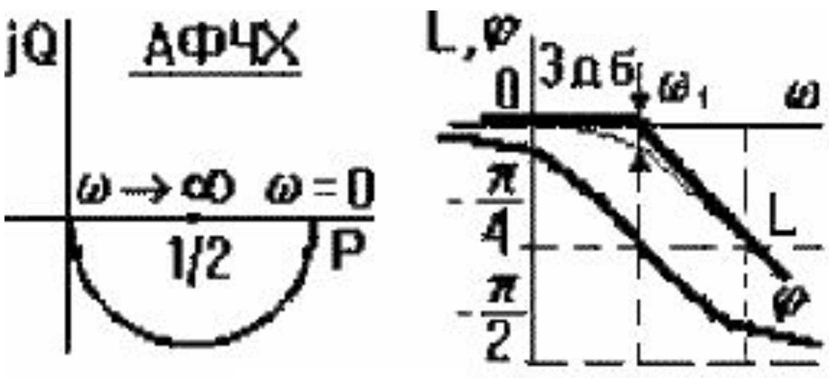
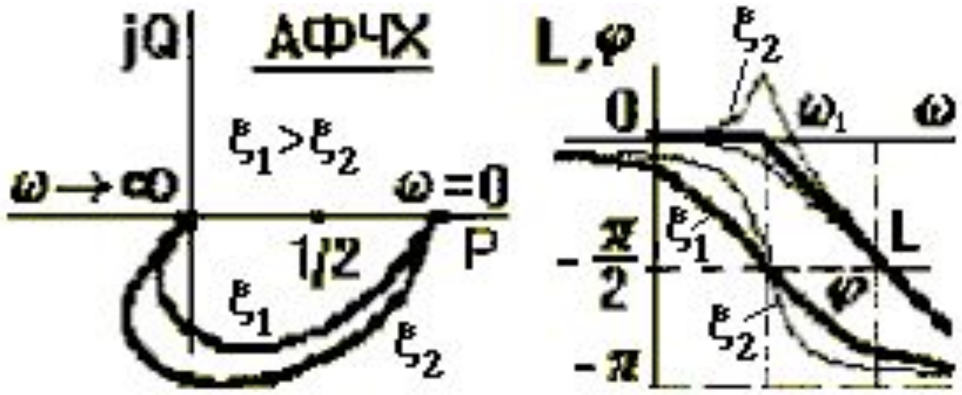


Рис.2.22

Колебательное звено

$$W(p) = \frac{k}{T_1{}^2 p^2 + T_2 p + 1} \qquad \xi = \frac{T_2}{2T_1}$$

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$$



Дифференцирующее звено

$$y(t) = k\frac{du}{dt}$$ W(p) = kp

$$W(p) = \frac{kTp}{Tp+1}$$

$$\mathbf{h(t) = \frac{K(0)}{D(0)} + \frac{K(p_1)\cdot e^{p_1 t}}{p_1 \cdot D'(p_1)} = 0 + \frac{-(k/T)\cdot e^{-t/T}}{-(1/T)\cdot T} = ke^{-t/T}}$$

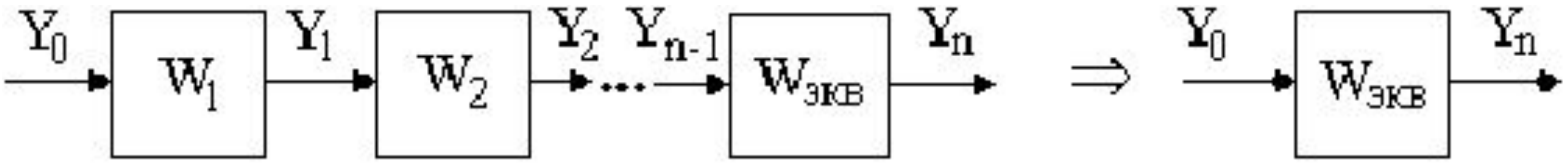
АФЧХ: W(j ω)=jk ω;
ВЧХ: P(ω) = 0;
МЧХ: Q(ω) = jkω;
АЧХ: A(ω) = kω;
ФЧХ: φ(ω) = π/2;
ЛАЧХ: L(ω) = 20lgk+20lgω.

Структурные схемы. Правила преобразования

- *Структурной схемой САУ* называют графическое изображение ее математической модели.
- Структурная схема САУ в простейшем случае строится из комбинации элементарных динамических звеньев, соединенных между собой определенным образом.
- Но несколько элементарных звеньев могут быть заменены одним звеном со сложной передаточной функцией.

Последовательное соединение

$$W_{экв} = \prod_{i=1}^{n} W_i$$



Параллельное соединение

$$W_{экв} = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

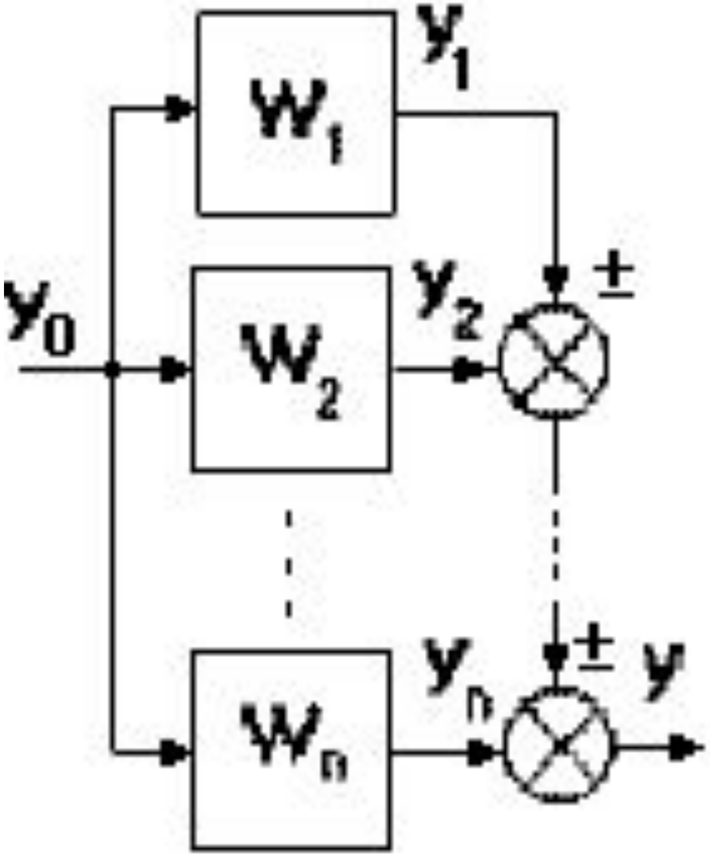
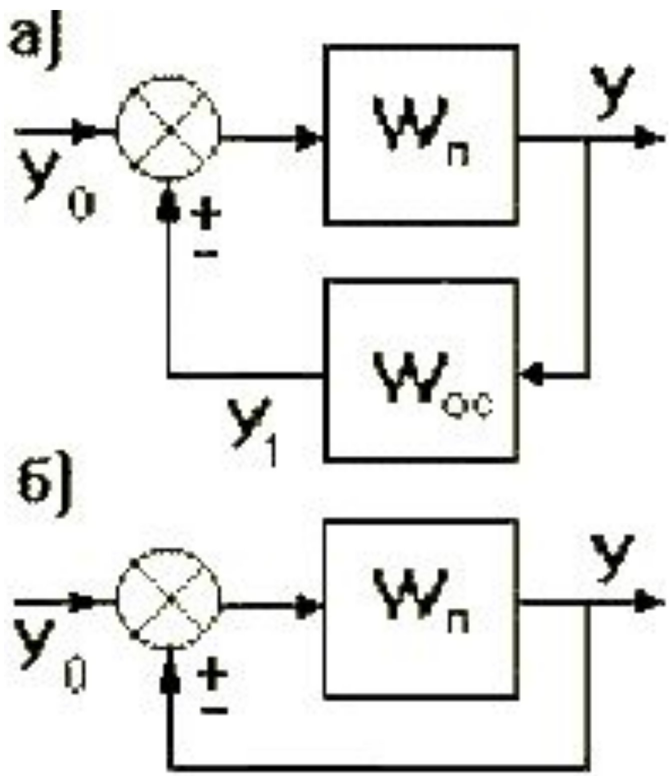


Рис.2.30

Соединение с обратной связью



$$W_{\text{экв}} \frac{W_{\text{п}}}{1 + W_{\text{п}} W_{\text{ос}}}$$

$$W_{\textit{экв}} = \frac{W_{n}}{1 - W_{oc}}$$

Устойчивость

Условие устойчивости

Рис.3.5

Необходимое условие устойчивости

- $D(p) = a_o p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n = a_o(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n) = 0$,
- где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - корни этого уравнения.
- $a_i = -|a_i| < 0$.
- $a_0\,(p + |a_1|)\,(p + |a_2| - j\omega_2)\,(p + |a_2| + j\omega_2) \ldots = 0$.
- $a_0\,(p + |a_1|)\,((p + |a_2|)2 + (\omega_2)2) \ldots = 0$
- $a_0\, p^n + a_1\, p^{n-1} + a_2\, p^{n-2} + \ldots + a_n = 0$.

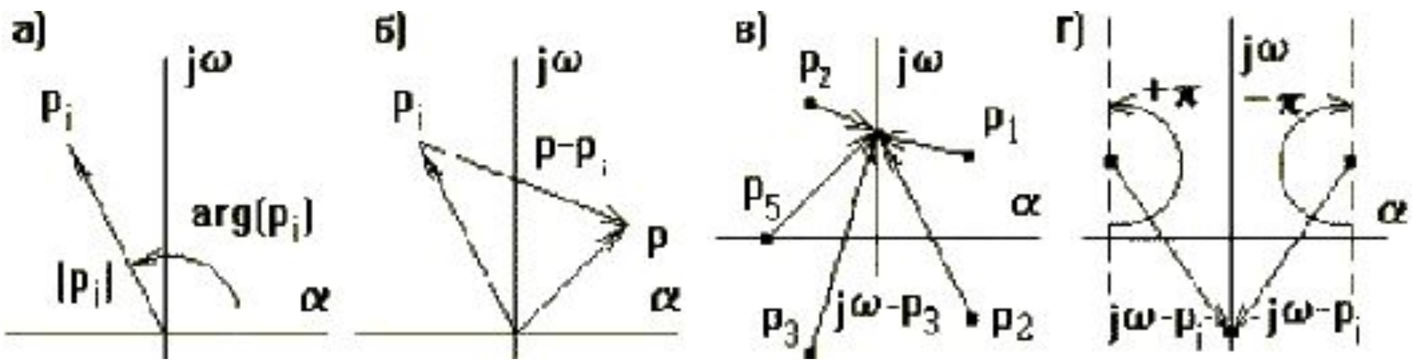
Критерий Гурвица

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

- $D(p) = a_0\,(p - p_1)\,(p - p_2)\,\ldots\,(p - p_n) = 0$
- $p_i = \alpha_i + j\alpha_i = |p_i|e^j arg(p_i)$
- где $arg(p_i) = arctg(\omega_i/a_i) + k\pi$

$$|p_i| = \sqrt{\alpha_i^{\,2} + \omega_i^{\,2}}$$



Принцип аргумента

- $D(j\omega) = |D(j\omega)|e^{j}arg(D(j\omega))$,
- где $|D(j\omega)| = a_0\,|j\omega - p_1|\,|j\omega - p_2|...|j\omega - p_n|$,
- $arg(D(j\omega)) = arg(j\omega - p_1) + arg(j\omega - p_2) + .. + arg(j\omega - p_n)$.
- *D(jω)* при изменении *ω* от -∞ до +∞

$$\Delta \arg(D(j\omega)) = \sum_{i=1}^{n} \arg(j\omega - p_i) = (n - m)\cdot\pi - m\cdot\pi$$

- при изменении *ω* от 0 до +∞ получаем

$$\Delta \arg(D(j\omega)) = (n - 2m)\cdot\frac{\pi}{2}$$

Критерий устойчивости Михайлова

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n$$

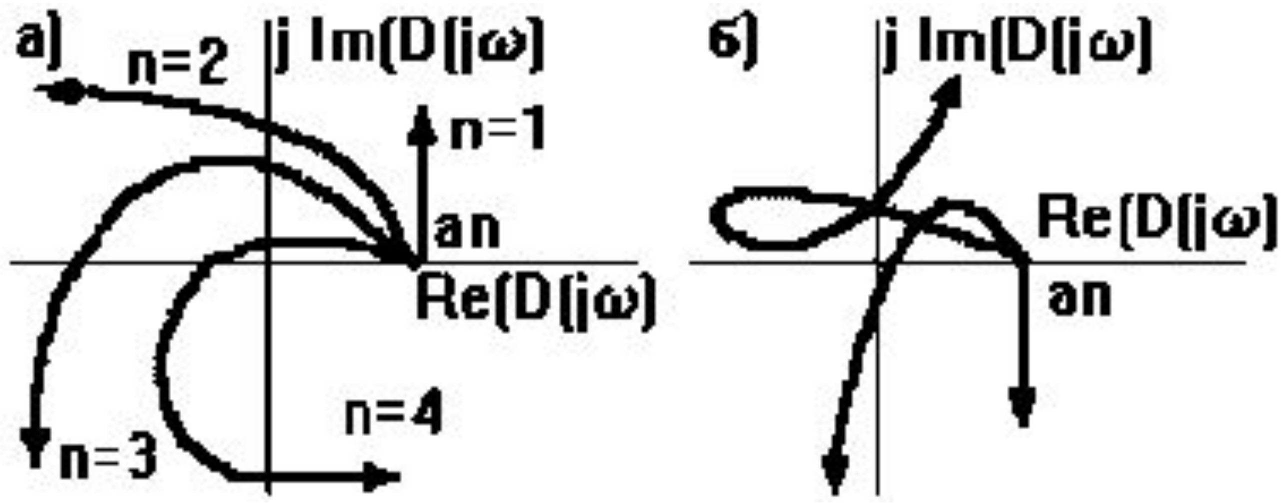
$$D(j\omega) = X + jY$$

$$X = a_n - \omega^2 a_{n-2} + \omega^4 a_{n-4} - \ldots$$

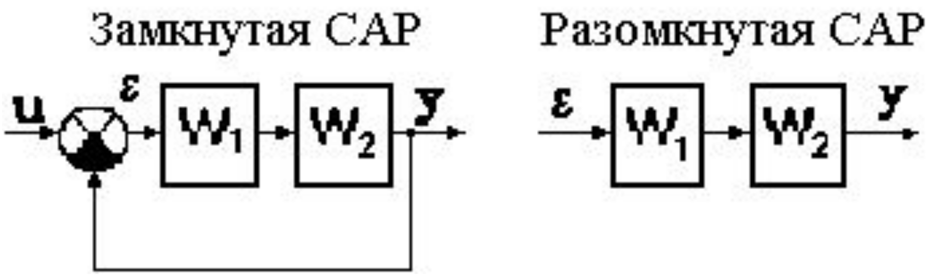
$$Y = \omega(a_{n-1} - \omega^2 a_{n-3} + \omega^4 a_{n-5} - \ldots$$

Критерий Михайлова

$$\Delta \arg(D(j\omega)) = n \cdot \frac{\pi}{2}$$



Критерий Найквиста



$$W_з(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} \qquad W(p) = W_1 \cdot W_2 = \frac{R(p)}{Q(p)}$$

$$W_з(p) = \frac{R(p)}{Q(p) + R(p)} \qquad S(p) = 1 + W(p) = \frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)}$$

Критерий Найквиста

$$S(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \left|1 + W(j\omega)\right| \cdot e^{jArgS(j\omega)} = \frac{\left|Q(j\omega) + R(j\omega)\right| \cdot e^{j\varphi_1(j\omega)}}{\left|Q(j\omega)\right| \cdot e^{j\varphi_2(j\omega)}} =$$

$$= \frac{\left|Q(j\omega) + R(j\omega)\right|}{Q(j\omega)} \cdot e^{jArgS(j\omega)}$$

$$ArgS(j\omega) = \varphi_1(j\omega) - \varphi_2(j\omega) \qquad \Delta\varphi_1(j\omega) = \frac{n \cdot \pi}{2}$$

Критерий Найквиста

$$\Delta\varphi_2(j\omega) = (n - 2m)\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\Delta \mathrm{Arg} S(j\omega) = \frac{n\cdot\pi}{2} - (n - 2m)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{m}{2}\cdot 2\pi$$