ИНФОРМАТИКА

Разбор задач ЕГЭ

Логические уравнения.

B15

Задача 1.

Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание $(10 < X \cdot (X+1)) \rightarrow (10 > (X+1) \cdot (X+2))$?

Переведём следствие и раскроем скобки.

$(X \cdot (X+1\ ) \le 10) \vee ((X+1) \cdot (X+2) < 10) = 1$

X должно быть целым и наибольшим, поэтому отрицательные числа даже не будем рассматривать. Данное выражение истинно если хотя бы одна его часть истинна, очевидно X будет иметь большее значение в левой части выражения. Максимальный целый X, удовлетворяющий левому неравенству, находим методом научного тыка, предполагая что X=2.

Ответ 2

Задача 2.

Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$(K \to M) \lor (L \land K) \lor \neg N$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

Это выражение ложно только если ложны 3 составляющие:

1. $(K \to M)=0$, здесь возможен только один случай: K=1, M=0
2. $(L \land K)=0$, так как K=1 из предыдущего случая, то L=0
3. $\neg N=0$, N=1

Запишем в нужном порядке K, L, M и N => 1001

Задача 3.

Сколько различных решений имеет уравнение

$(X \wedge Y \vee Z) \rightarrow (Z \vee P) = 0$

где X, Y, Z, P – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

Чтобы данное уравнение принимало значение «Ложь», требуется выполнение 2-х равенств:

1. $(X \wedge Y \vee Z)=1$, если Z=1, то X и Y могут принимать любое значение и мы получим 4 решения. Если Z=0, то мы имеем только одно решение X=1, Y=1, Z=0.
2. $(Z \vee P) = 0$, Здесь возможно только одно решение – Z=0, P=0.

Из 2-х уравнений следует, что Z=0, а в этом случае существует только одно решение.

Ответ 1

ИНФОРМАТИКА

Задача 4.

Сколько различных решений имеет уравнение J ∧ ¬K ∧ L ∧ ¬M ∧ (N ∨ ¬N) = 0, где J, K, L, M, N — логические переменные?

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Данное выражение истинно, если все переменные истинны.

Для N=1 мы имеем 2^4=16 возможных комбинаций (2 значения 1 и 0 – основание системы, а 4 переменных – 4 разряда) Лишь одна комбинация, где все переменные J, K, L, M равны 1, не подойдёт, т.е. нам подходит 15 комбинаций.

Для N=0 мы тоже получим 15 подходящих комбинаций, итого у нас 15+15=30 различных решений.

ИНФОРМАТИКА

Задача 5.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных $x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5$, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$(x1 \rightarrow x2) \wedge (x2 \rightarrow x3) \wedge (x3 \rightarrow x4) \wedge (x4 \rightarrow x5\ ) = 1$

$(y1 \rightarrow y2) \wedge (y2 \rightarrow y3) \wedge (y3 \rightarrow y4) \wedge (y4 \rightarrow y5\ ) = 1$

$x1 \vee y1 = 1$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных $x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5$, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Эта задача отлична от предыдущих, удобнее всего решать её таблицей. Последнее уравнение будем называть исключающим. Рассмотрим первое уравнение и заметим, что оно будет истинным, только если все

ИНФОРМАТИКА

Задача 5.

(x1 → x2) =1, (x2 → x3)=1 и т. д. связаны импликацией; она ложна, если первое выражение истинно, а второе ложно. Так же первые скобки связанны переменной x2, а значит выражения являются **зависимыми**.
Предположим, что первая переменная истинна, тогда вторая может быть только истинной и истинными должны быть все. Заметьте, что если x3=1, то все следующие за ней переменные должны быть также истинны.

x1	x2	x3	x4	x5
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Таким образом мы получим таблицу решений для первого уравнения, из которой видно, что решений шесть. Точно такая же таблица получится и для 2-го уравнения. Попробуем их совместить.

ИНФОРМАТИКА

Задача 5.

Таблица возможных комбинаций решений первых двух уравнений.						
решенияX / решенияY	11111	01111	00111	00011	00001	00000
	x1x2x3x4x5	x1x2x3x4x5	x1x2x3x4x5	x1x2x3x4x5	x1x2x3x4x5	x1x2x3x4x5
y1y2y3y4y5	11111	11111	11111	11111	11111	11111
y1y2y3y4y5	01111	01111	01111	01111	01111	01111
y1y2y3y4y5	00111	00111	00111	00111	00111	00111
y1y2y3y4y5	00011	00011	00011	00011	00011	00011
y1y2y3y4y5	00001	00001	00001	00001	00001	00001
y1y2y3y4y5	00000	00000	00000	00000	00000	00000

Рассмотрим условие: $x1 \vee y1 = 1$, исключим из таблицы все неподходящие под это уравнение решения, т.е. такие, где x1 и y1 одновременно принимают ложное значение. Отметим их оранжевым.

ИНФОРМАТИКА

Задача 5.

Таблица возможных комбинаций решений первых двух уравнений.						
решенияX / решенияY	11111 x1x2x3x4x5	01111 x1x2x3x4x5	00111 x1x2x3x4x5	00011 x1x2x3x4x5	00001 x1x2x3x4x5	00000 x1x2x3x4x5
y1y2y3y4y5	11111	11111	11111	11111	11111	11111
y1y2y3y4y5	01111	01111	01111	01111	01111	01111
y1y2y3y4y5	00111	00111	00111	00111	00111	00111
y1y2y3y4y5	00011	00011	00011	00011	00011	00011
y1y2y3y4y5	00001	00001	00001	00001	00001	00001
y1y2y3y4y5	00000	00000	00000	00000	00000	00000

Всего у нас 6*6 = 36 решений в таблице, из них, после исключающего уравнения, у нас остаётся 36-25=11 решений.

Ответ 11

ИНФОРМАТИКА

Задача 6.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных $x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8$, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$(x1 \lor x2) \to (x3 \lor x4) = 1$

$(x3 \lor x4) \to (x5 \lor x6) = 1$

$(x5 \lor x6) \to (x7 \lor x8) = 1$

Так как нам надо найти все наборы переменных, при которых выполняются все условия, то мы можем объединить условия с помощью функции «и»:

$$((x1 \lor x2) \to (x3 \lor x4)) \wedge ((x3 \lor x4) \to (x5 \lor x6)) \wedge ((x5 \lor x6) \to (x7 \lor x8)) = 1$$

Задача 6.

Далее нам следует заменить выражения в скобках буквенными переменными, чтобы упростить выражение:

$x1 \lor x2 = A$;

$x3 \lor x4 = B$;

$x5 \lor x6 = C$;

$x7 \lor x8 = D$.

$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C) \land (C \rightarrow D) = 1$

Напомним, что решение этого уравнения мы уже знаем:

A	B	C	D
1	1	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1
0	0	0	1
0	0	0	0

A,B,C,D – независимы(не имеют общих переменных), в таком случае количество возможных решений = количество решений A*количество решений B*количество решений C*количество решений D. Для A=1 существует 3 решения, для A=0 всего 1. Так же дела обстоят и с остальными переменными.

Задача 6.

Отметим рядом с каждым решением количество комбинаций, которое ему соответствует:

A	B	C	D	Подсчёт комбинаций
1_3	1_3	1_3	1_3	3*3*3*3=81
0_1	1_3	1_3	1_3	1*3*3*3=27
0_1	0_1	1_3	1_3	1*1*3*3=9
0_1	0_1	0_1	1_3	1*1*1*3=3
0_1	0_1	0_1	0_1	1*1*1*1=1

ачения:
81+27+9+3+1=121.

Ответ 121

Задача 7.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, ... x_{10}, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_3 \wedge \neg x_4) = 1$

$(x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_3 \wedge x_4) \vee (x_5 \wedge x_6) \vee (\neg x_5 \wedge \neg x_6) = 1$

...

$(x_7 \wedge \neg x_8) \vee (\neg x_7 \wedge x_8) \vee (x_9 \wedge x_{10}) \vee (\neg x_9 \wedge \neg x_{10}) = 1$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных x_1, x_2, … x_{10} при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Сначала сделаем преобразование:

$(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) = \neg (x_1 \equiv x_2)$

$(x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_3 \wedge \neg x_4) = (x_3 \equiv x_4)$

$\neg(x_1 \equiv x_2) \vee (x_3 \equiv x_4) = (x_1 \equiv x_2) \rightarrow (x_3 \equiv x_4)$

Задача 7.

$(x_1 \equiv x_2) \rightarrow (x_3 \equiv x_4) = 1$

$(x_3 \equiv x_4) \rightarrow (x_5 \equiv x_6) = 1$

$(x_5 \equiv x_6) \rightarrow (x_7 \equiv x_8) = 1$

$(x_7 \equiv x_8) \rightarrow (x_9 \equiv x_{10}) = 1$

Сделаем, как в предыдущей задаче:

$((x_1 \equiv x_2) \rightarrow (x_3 \equiv x_4)) \wedge ((x_3 \equiv x_4) \rightarrow (x_5 \equiv x_6)) \wedge ((x_5 \equiv x_6) \rightarrow (x_7 \equiv x_8)) \wedge ((x_7 \equiv x_8) \rightarrow (x_9 \equiv x_{10})) = 1$

Теперь замена:

$A = (x_1 \equiv x_2)$

$B = (x_3 \equiv x_4)$

$C = (x_5 \equiv x_6)$

$D = (x_7 \equiv x_8)$

$E = (x_9 \equiv x_{10})$

$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow E) = 1$

ИНФОРМАТИКА

Задача 7.

Теперь составим таблицу решений. A, B, C, D, E тоже независимы, но у A x1 и x2 теперь соединены тождеством, а не дизъюнкцией, поэтому будет 2 случая ложного исхода и 2 случая истинного исхода. Это распространяется и на оставшиеся 4 переменные B, C, D,

A	B	C	D	E	Подсчёт комбинаций
1_2	1_2	1_2	1_2	1_2	2*2*2*2*2=32
0_2	1_2	1_2	1_2	1_2	2*2*2*2*2=32
0_2	0_2	1_2	1_2	1_2	2*2*2*2*2=32
0_2	0_2	0_2	1_2	1_2	2*2*2*2*2=32
0_2	0_2	0_2	0_2	1_2	2*2*2*2*2=32
0_2	0_2	0_2	0_2	0_2	2*2*2*2*2=32

Далее находим сумму 32*6=192 решения.

Ответ 192

Задача 8.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, ... x_{10}, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) = 1$

$(x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_3 \wedge x_4) = 1$

...

$(x_8 \wedge x_9) \vee (\neg x_8 \wedge \neg x_9) \vee (x_9 \wedge \neg x_{10}) \vee (\neg x_9 \wedge x_{10}) = 1$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных x_1, x_2, … x_{10} при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Казалось бы задача похожа на предыдущую, но! в правой и левой части есть одинаковые переменные, а значит они зависимы и решать придётся графом, а не таблицей.

ИНФОРМАТИКА

Задача 8.

Вначале преобразуем:

$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) = (x_1 \equiv x_2)$

$(x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) = \neg(x_2 \equiv x_3)$

$(x_1 \equiv x_2) \vee \neg(x_2 \equiv x_3) = \neg(x_2 \equiv x_3) \vee (x_1 \equiv x_2) = (x_3 \equiv x_2) \longrightarrow (x_2 \equiv x_1) = 1$

$\mathbf{(x_3 \equiv x_2) \longrightarrow (x_2 \equiv x_1) = 1}$

$\mathbf{(x_4 \equiv x_3) \longrightarrow (x_3 \equiv x_2) = 1}$

$\mathbf{(x_5 \equiv x_4) \longrightarrow (x_4 \equiv x_3) = 1}$

$\mathbf{(x_6 \equiv x_5) \longrightarrow (x_5 \equiv x_4) = 1}$

$\mathbf{(x_7 \equiv x_6) \longrightarrow (x_6 \equiv x_5) = 1}$

$\mathbf{(x_8 \equiv x_7) \longrightarrow (x_7 \equiv x_6) = 1}$

$\mathbf{(x_9 \equiv x_8) \longrightarrow (x_8 \equiv x_7) = 1}$

$\mathbf{(x_{10} \equiv x_9) \longrightarrow (x_9 \equiv x_8) = 1}$

Тождество – симметричная операция, поэтому существует 2 симметричных набора решений, для нуля и для единицы, построим граф решений, предположив что все переменные равны единице, а затем будем

Задача 8.

Составим граф или таблицу решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
									0
								0	1
							0	1	0
						0	1	0	1
					0	1	0	1	0
				0	1	0	1	0	1
			0	1	0	1	0	1	0
		0	1	0	1	0	1	0	1
	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Задача 8.

Из таблицы видно, что существует 10 решений для единицы и, соответственно, будет еще 10 для нуля. Всего 20 решений.

Ответ 20

Вопросы.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$(x1 \rightarrow x2) \wedge (x2 \rightarrow x3) \wedge (x3 \rightarrow x4) \wedge (x4 \rightarrow x5) = 1$

$(y2 \rightarrow y1) \wedge (y3 \rightarrow y2) \wedge (y4 \rightarrow y3) \wedge (y5 \rightarrow y4) \wedge (y6 \rightarrow y5) = 1$

$x5 \rightarrow y6 = 1$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных x1, x2, x3, x4, x5, x6, y1, y2, y3, y4, y5, y6, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Указание: переставьте скобки во 2-м выражении от $(y6 \rightarrow y5)$ к $(y2 \rightarrow y1)$, из таблицы решений исключите все те, в которых одновременно $x5=1$, $y6=0$.

Вопросы.

Сколько различных решений имеет система уравнений

$\neg x1 \lor x2 = 1$

$\neg x2 \lor x3 = 1$

…

$\neg x9 \lor x10 = 1$,

где x1, x2, … x10 — логические переменные?

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений x1, x2, … x10, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Указание: преобразуйте каждое выражение вот таким образом: $\neg x1 \lor x2 = x1 \rightarrow x2$, затем объедините все выражения конъюнкцией, и получится уравнение, такого же вида, как в задаче №5.

Ответ 11.

Вопросы.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, z1, z2, z3, z4, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$(x1 \rightarrow x2) \land (x2 \rightarrow x3) \land (x3 \rightarrow x4) = 1$

$(\neg x1 \land y1 \land z1) \lor (x1 \land \neg y1 \land z1) \lor (x1 \land y1 \land \neg z1) = 1$

$(\neg x2 \land y2 \land z2) \lor (x2 \land \neg y2 \land z2) \lor (x2 \land y2 \land \neg z2) = 1$

$(\neg x3 \land y3 \land z3) \lor (x3 \land \neg y3 \land z3) \lor (x3 \land y3 \land \neg z3) = 1$

$(\neg x4 \land y4 \land z4) \lor (x4 \land \neg y4 \land z4) \lor (x4 \land y4 \land \neg z4) = 1$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, z1, z2, z3, z4, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Вопросы.

Решение. Слева - решение первого уравнения. Посередине - решение второго уравнения. Справа – подсчет комбинаций.

Решения третьего, четвертого и пятого уравнений рассматривать не будем, т.к. они совпадают со вторым, при этом они не содержат одинаковых переменных, т.е. независимы. Заметим, что для x1=1 существует 2

я о р ,

x1	x2	x3	x4
1	1	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1
0	0	0	1
0	0	0	0

x1	y1	z1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x1	x2	x3	x4	Комбинации
1_2	1_2	1_2	1_2	2*2*2*2=16
0_1	1_2	1_2	1_2	1*2*2*2=8
0_1	0_1	1_2	1_2	1*1*2*2=4
0_1	0_1	0_1	1_2	1*1*1*2=2
0_1	0_1	0_1	0_1	1*1*1*1=1

Всего в сумме 16+8+4+2+1=31 комбинация.