Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad Ax = b$$

Основные определения

Обратная матрица $\quad AA^{-1} = I$

Невырожденная матрица

$$\det(A) \neq 0$$

$$Ax = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$Ax = b \longrightarrow x \neq 0$$

столбцы (строки) матрицы A линейно независимы

матрица A - полного ранга

Собственные числа и векторы $\quad Ax = \lambda x$

Спектр, спектральный радиус $\quad \{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \qquad \rho(A) = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$

Норма матрицы $\quad \|A\| = \sup\limits_{x \in R^n} \dfrac{|Ax|}{|x|} = \rho\left(A^T A\right)^{1/2}.$

Метод Гаусса

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\vdots \\
a_{n1} + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\
\qquad\qquad \vdots \\
\qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}.
\end{cases}
$$

$$
a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - l_{i1}a_{1j}, \quad b_i^{(1)} = b_i - l_{i1}b_1, \quad l_{i1} = a_{i1}/a_{11}, i, j = 2, \cdots, n
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\
\vdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}
$$

$$
l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - l_{ik}b_k^{(k-1)}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik}a_{ij}^{(k-1)},
$$

k=1,…n–1 $\qquad$ i=k+1, …, n $\qquad$ j=k+1, …, n

Решение

$$
x_k = \left(\mathrm{b}_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{k-1})} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)}x_j \right) \Big/ a_{kk}^{(k-1)}.
$$

k=n, n-1, …, 1

LU-факторизация

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad y_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} y_i$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right)$$

Определитель и обратная матрица

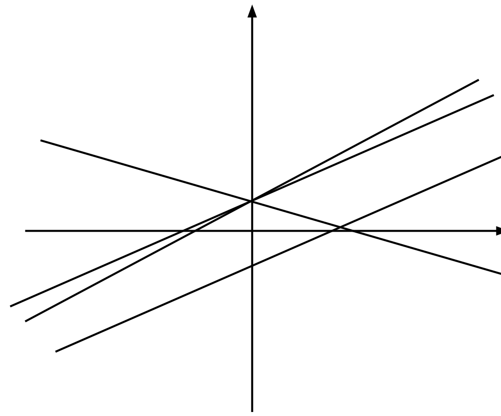
$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U)$$

$$AX = I \qquad A(x_1 \mid x_2 \mid \cdots \mid x_n) = (e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n)$$

$$Ax_i = e_i, \quad i = 1, \ldots, n \qquad \begin{aligned} Ly_i &= e_i, \\ Ux_i &= y_i, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Обусловленность СЛАУ

$$0{,}8x_1 + 0{,}4x_2 = 1,$$
$$0{,}79x_1 + 0{,}41x_2 = \varepsilon.$$



Как оценить обусловленность СЛАУ?

$$Ax = b$$

$$x = x_0 + \Delta x$$
$$b = b_0 + \Delta b$$

$$\|\Delta x\| = \left\|A^{-1}\Delta b\right\| \le \left\|A^{-1}\right\|\|\Delta b\|,$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x_0\|} \le \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b_0\|} \qquad \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| = \mathrm{cond}(A)$$

$$\|A\| = \rho\left(A^T A\right) = \max_{1 \le i \le n}\left|\lambda_i\left(A^T A\right)\right| \qquad \left\|A^{-1}\right\| = \rho\left(\left(A^{-1}\right)^T A^{-1}\right)$$

$$\left\|A^{-1}\right\| = \rho\left(\left(A^{-1}\right)^T A^{-1}\right) = \max_{1 \le i \le n} \frac{1}{\lambda_i\left(A^T A\right)} = \frac{1}{\min\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i\left(A^T A\right)}.$$

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| = \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i\left(A^T A\right)}{\min\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i\left(A^T A\right)} \ge 1$$

Определение собственных чисел

ХП: $p(s) = \det(Is - A) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1 s + p_0,$

Теорема Гамильтона-Кэли: $A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \cdots + p_1 A + p_0 I = 0.$

Алгоритм А.Н. Крылова: $p(s_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$

$$A^n x_0 + p_{n-1}A^{n-1}x_0 + \cdots + p_1 A x_0 + p_0 x_0 = 0, \qquad x_i = A^i x_0$$

$$x_n + p_{n-1}x_{n-1} + \cdots + p_1 x_1 + p_0 x_0 = 0.$$

$p = (p_{n-1}\ p_{n-2}\ \cdots\ p_1\ p_0)^T,$

$$Xp = -x_n$$

$X = (x_{n-1} \mid x_{n-2} \mid \cdots \mid x_1 \mid x_0).$

Итерационные методы решения СЛАУ

$\dfrac{dx}{dt} = -Ax + b$ задача сводится к СЛНДУ

Минимизация функционала: $J(x) = x^{\mathrm{T}}Ax - 2 * x^{\mathrm{T}} * b$