Электростатика
Принцип суперпозиции, теорема Гаусса

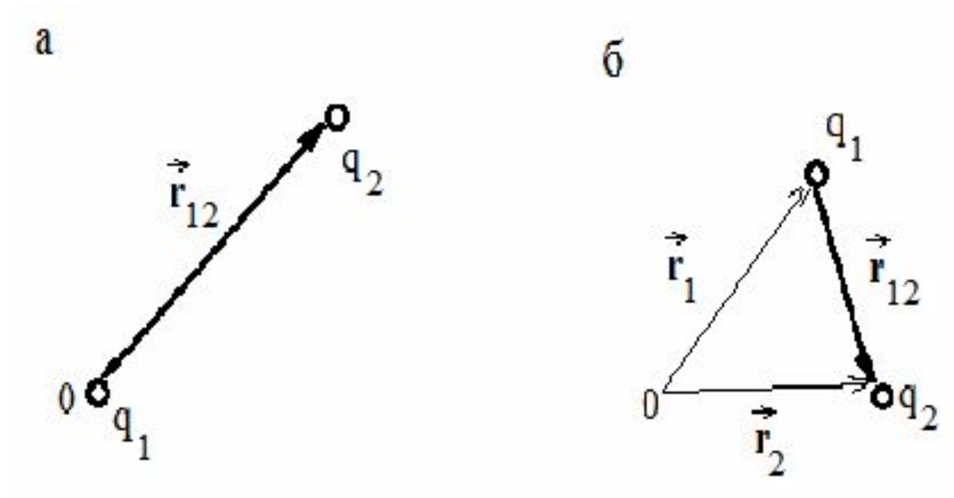
Электрическое поле изучается с помощью *точечного заряда*.

Точечный заряд
Электрические заряды считаются точечными, если линейные размеры тел, на которых сосредоточены заряды, во много раз меньше любых расстояний, рассматриваемых в данной задаче.

Основой электростатики служит закон Кулона, определяющий силу взаимодействия неподвижных точечных зарядов.

Закон Кулона
Между двумя покоящимися точечными зарядами действует сила, прямо пропорциональная произведению зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.

Рис. 1. Закон Кулона



$$\vec{F}_{12}(\vec{r}) = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad (1.1)$$

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}) = k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (1.2)$$

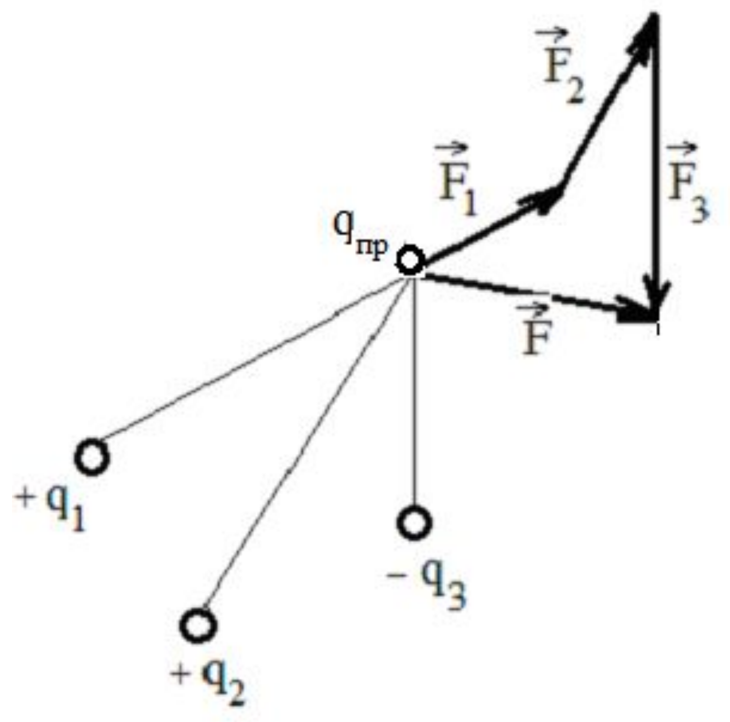
$$\vec{F}_{12}(\vec{r}) = -\vec{F}_{21}(\vec{r})$$

k **– коэффициент пропорциональности**

Принцип суперпозиции

Если зарядов, действующих на пробный заряд, не один, а больше, то результирующая сила равна *векторной сумме* сил, приложенных к пробному заряду со стороны каждого заряда, создающего поле

Рис. 2. Принцип суперпозиции



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Вектор напряженности

Чтобы сила не зависела от величины пробного заряда, вводится физическая величина ***вектор напряженности***

Напряженность **это сила, действующая** ***на единицу пробного положительного заряда*** **: заряд** ***q создает поле***

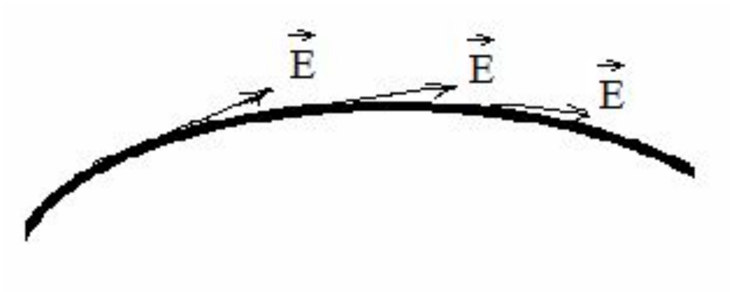
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_{np}} = k\frac{q}{|\vec{r}|^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad (1.3)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q_{np}\cdot\vec{E}(\vec{r})$$

Линия вектора напряженности

Линия вектора напряженности – это такая линия, в каждой точке которой касательная дает направление вектора напряженности электрического поля

Рис. 3. Линия вектора напряженности



Через каждую точку можно провести свою линию напряженности.

Линии напряженности не могут пересекаться, так как получалось бы, что в точке пересечения существует два направления напряженности.

Линии вектора напряженности проводят так, чтобы число линий, пронизывающих единицу площади поверхности, расположенной нормально к ним, было равно величине вектора напряженности поля в данном месте

Рис. 4. Линии вектора напряженности для точечных зарядов

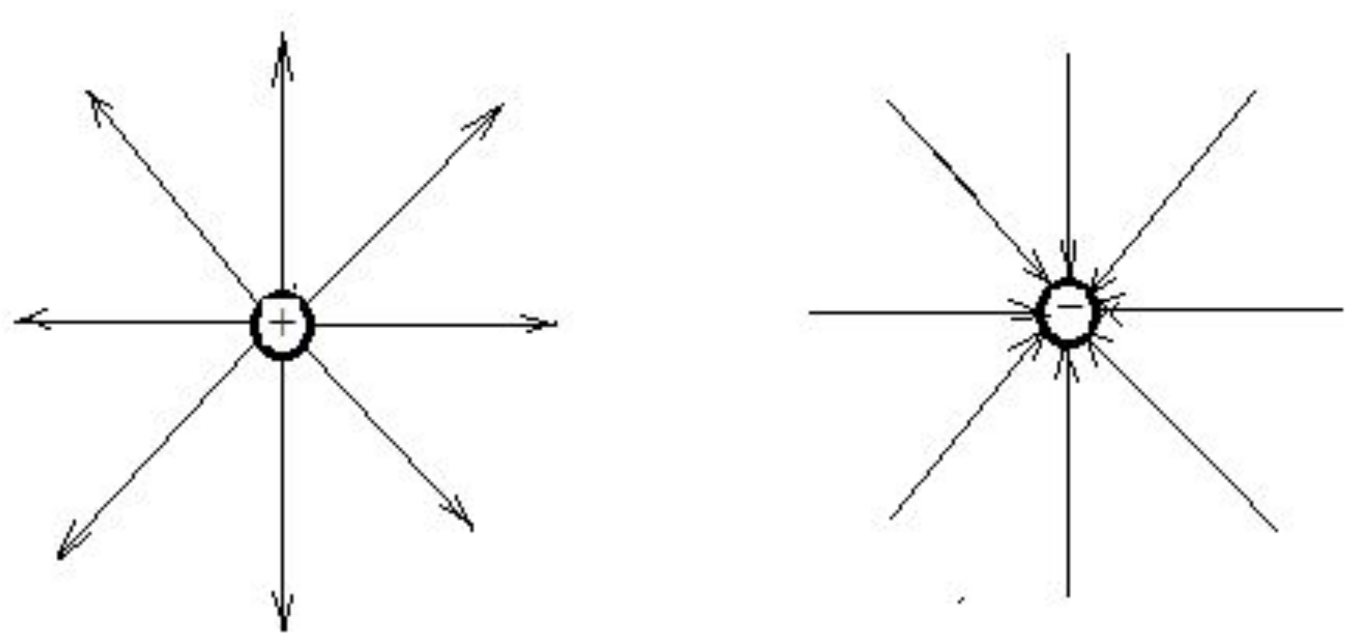


Рис. 5. Линии вектора напряженности для а) разноименных зарядов, б) одноименных зарядов

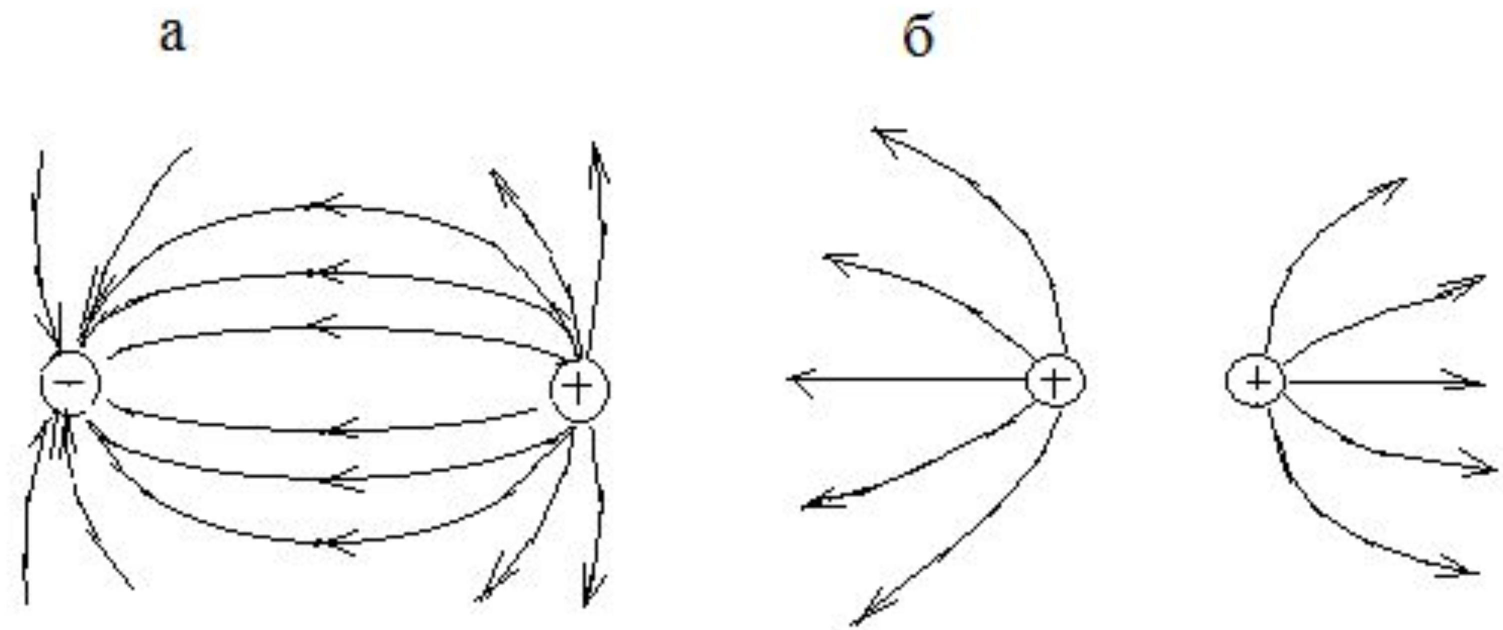
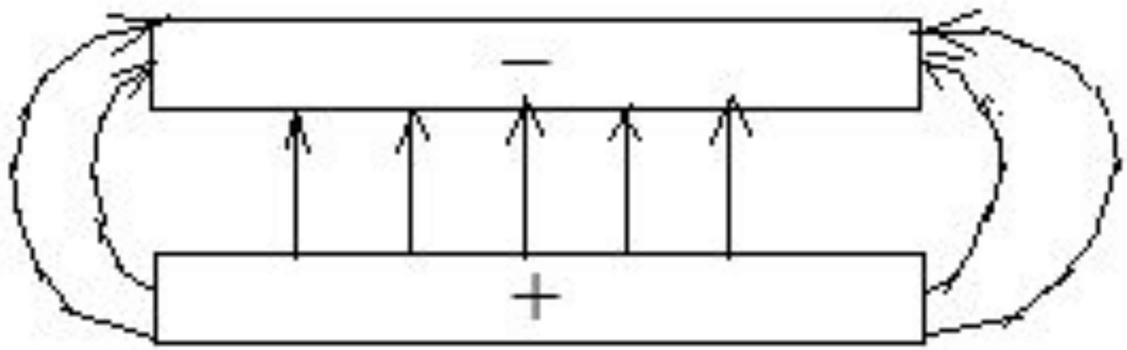


Рис. 6. Линии вектора напряженности для плоского конденсатора



Понятие линии вектора напряженности является *математическим понятием*, облегчающим описание вектора напряженности.
Это условный графический прием, введенный для наглядности

Свойства линий напряженности

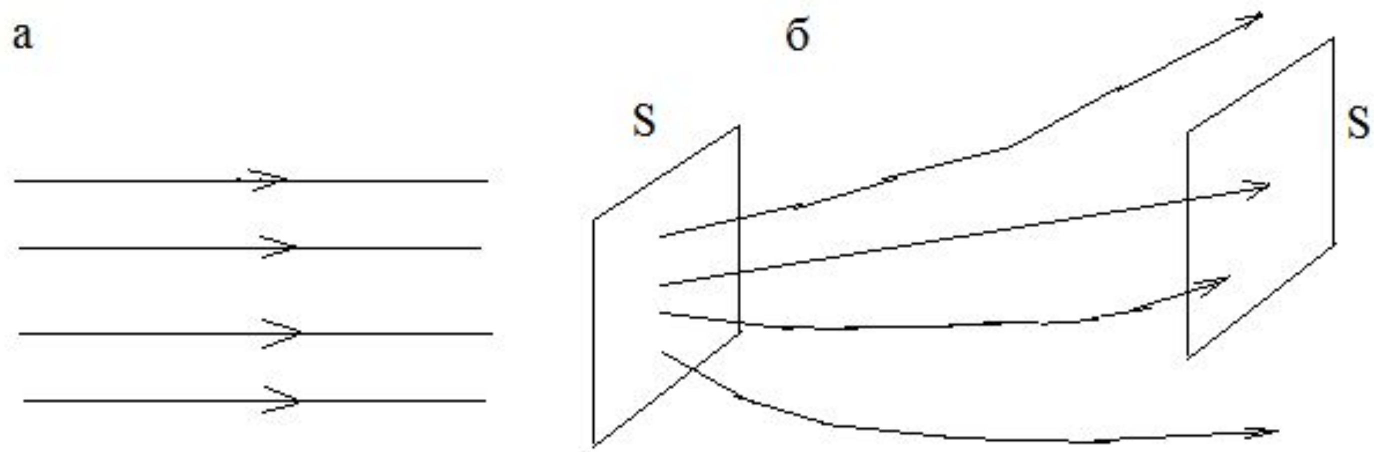
Векторные (силовые) линии ЭС поля могут:

- начинаться на положительном заряде и уходить в бесконечность;
- приходить из бесконечности и оканчиваться на отрицательном заряде;
- начинаться на положительном заряде и оканчиваться на отрицательном

Однородные и неоднородные поля

Если напряженность поля всюду одинакова по величине и направлению, то поле называется *однородным* и изображается системой параллельных линий

Рис. 7. а) однородное поле, б) неоднородное поле



Поток вектора напряженности

Число силовых линий, проходящих через некоторую поверхность, помещенную в электрическое поле, называется *потоком вектора напряженности через эту поверхность*

Если в однородном электрическом поле площадка S расположена нормально к силовым линиям $\vec{E}$ и через единицу площади проходит $|\vec{E}|$ линий вектора напряженности, то поток вектора напряженности в этом случае будет равен

$$N = |\vec{E}| S$$

Если же площадка S расположена под углом α к силовым линиям $\vec{E}$ однородного поля , то поток вектора напряженности равен

$$N = |\vec{E}| S \cos\alpha = (\vec{E}, \vec{S}) = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

$\alpha = \left(\vec{E}, \vec{n}\right)$ -угол между вектором напряженности и нормалью к площадке

Поток вектора напряженности в неоднородном поле

Если поверхность S находится в неоднородном поле, то эту поверхность разбивают на элементарные площадки dS, которые считаем плоскими, а поле возле них предполагается однородным. Тогда поток вектора напряженности через элементарную площадку будет равен

$$dN = E_n dS \qquad N = \int_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_S E_n dS \qquad (1.4)$$

E_n – проекция вектора напряженности на нормаль к площадке dS

Теорема Гаусса. Поток вектора напряженности через замкнутую поверхность S, окружающую точечный заряд q, всегда равен $\dfrac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$

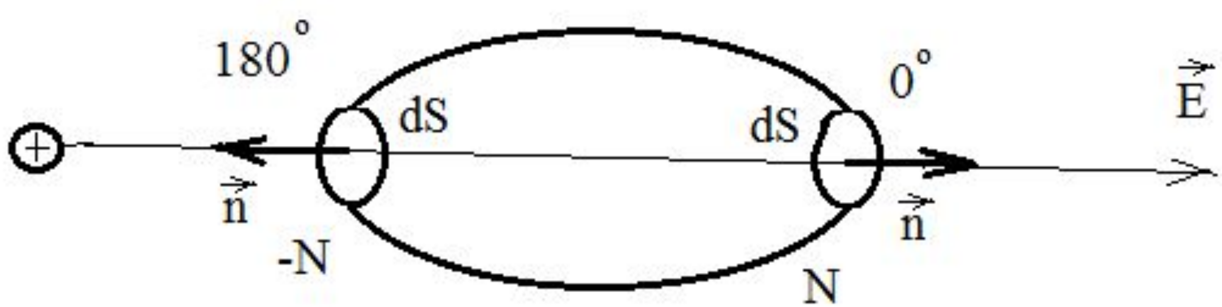
$$\int_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (1.5)$$

ε_0 – электрическая постоянная

ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, значение ее характеризует среду и задается в таблице

Замечание. Если замкнутая поверхность не содержит заряд, создающий поле, или заряженное тело, то поток вектора напряженности электрического поля через нее равен нулю. В этом случае, если линия вектора напряженности входит внутрь поверхности, то она непременно пересекает ее еще раз.

Рис. 8. Заряд не содержится внутри замкнутой поверхности



Плотность распределения заряда

Если заряд, создающий поле, распределен на некотором теле, или поверхности тела, либо заряд распределен линейно, то требуется знать соответствующую плотность распределения заряда

Объемная плотность распределения заряда $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{q}{\Delta V}$

ΔV – элемент объема $q = \int\limits_V \rho dV$

Поверхностная плотность распределения заряда $\sigma = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{q}{\Delta S}$

ΔS – элемент поверхности $q = \int\limits_S \sigma dS$

Линейная плотность распределения заряда $\tau = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{q}{\Delta l}$

Δl – элемент длины $q = \int\limits_l \tau dl$

Потенциал электрического поля

Потенциал поля $\varphi(\vec{r})$ **в заданной точке** $\mathrm{M}(\vec{\mathrm{r}})$ **есть физическая величина, измеряемая работой , которую совершают силы поля** $\vec{F}$ **при перемещении единичного положительного пробного заряда** $q_{\text{пр}}$ **из рассматриваемой точки** $\mathrm{M}(\vec{\mathrm{r}})$ **в другую точку** $\mathrm{M}(\vec{\mathrm{r}}_1)$

$$\varphi(r) = \frac{A_{MM_1}}{q_{\text{пр}}} = \frac{\int\limits_{M(\vec{r})}^{M(\vec{r}_1)} (\mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}), d\vec{\mathrm{r}})}{q_{\text{пр}}} = \int\limits_{M(r)}^{M(\vec{r}_1)} (\vec{E}(\vec{r}), d\vec{r}) \qquad (1.6)$$

$d\vec{r}$ – элемент перемещения

Потенциал как энергетическая характеристика ЭС поля

Работа, совершаемая силами поля при перемещении заряда q_{np} на элемент пути $\Delta\vec{r}$ в ЭС поле, равна убыли потенциальной энергии заряда q_{np} : $\Delta A = -\Delta W$

Из определения потенциала

$$\Delta A = q_{\text{пр}} \Delta \varphi \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{\Delta W}{q_{\text{пр}}} \qquad (1.7)$$

Знак Δ обозначает приращение

Запишем приращение потенциала

$$\varphi(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} + o(|\Delta\vec{r}|)$$

Если $|\Delta(\vec{r})| \to 0$

Тогда в пределе перейдем к дифференциалам

$$d\varphi = (\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}), d\vec{r}) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)(dx, dy, dz) \qquad (1.8)$$

$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ – оператор “набла”

Формулы взаимосвязи вектора напряженности и потенциала

С другой стороны $\Delta A = q_{\text{пр}}(\vec{E}, \Delta\vec{r})$

$$\Delta A = q_{\text{пр}}\Delta\varphi$$

$\Rightarrow \quad (\vec{E}, \Delta\vec{r}) = -\Delta\varphi$

Перейдем к дифференциалам при $\left|\Delta(\vec{r})\right| \to 0$

$$(\vec{E}, d\vec{r}) = -d\varphi \tag{1.9}$$

$$(\vec{E}, d\vec{r}) = -(\vec{\nabla}\varphi, d\vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \tag{1.10}$$

Интегрируем (1.9) и получаем **формулу для вычисления потенциала через напряженность**

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_1) = \int_{M(\vec{r})}^{M(\vec{r}_1)} (\vec{E}, d\vec{r}) \tag{1.11}$$

Замечания

1. Физический смысл имеет лишь разность потенциалов . Когда говорят о потенциале в данной точке $\varphi(\vec{r})$, то подразумевают разность между потенциалом в этой точке и потенциалом в некоторой произвольной другой точки $\varphi(\vec{r}_1)$

2. Сила поля уменьшается при удалении от источника, поэтому при определении потенциала за нуль чаще всего принимается потенциал в точке $M(\vec{r}_1)$, *лежащей в бесконечности*

3. В электротехнике за ноль принимают *потенциал Земли*

4. При решении задач произвольную точку $M(\vec{r}_1)$ выбирают таким образом, чтобы потенциал в ней *равнялся нулю*

Получение компонент вектора напряженности и его модуля

Запишем (1.10), раскрывая определение оператора "набла"

$$\vec{E} = -grad\varphi \tag{1.12}$$

или

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.13}$$

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} \tag{1.14}$$

Потенциальное поле

Замечание 5. Форма дуги l, соединяющей точки $M(\vec{r})$ и $M(\vec{r}_1)$, не влияет на величину потенциала.

Замечание 6. Если пробный заряд прошел замкнутый круг, тогда

$$\oint_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0 \qquad (1.15)$$

Этот интеграл носит название ***циркуляции вектора напряженности*** по замкнутому контуру

Поля, в которых работа по замкнутому контуру равна нулю, называют *потенциальными*. Следовательно, **электростатическое поле потенциально.**

Эквипотенциальные поверхности

Геометрическое место точек поля, обладающих равными потенциалами, называется *эквипотенциальной поверхностью*.

Свойства линий вектора напряженности

$$\vec{E}(\vec{r}) = -grad\ \varphi(\vec{r})$$

- Линии вектора напряженности указывают направление быстрейшего изменения потенциала .
- В любой точке эквипотенциальной поверхности вектор напряженности ЭС поля перпендикулярен к ней и направлен в сторону убывания потенциала.
- Работа при перемещении заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю.

Теорема Гаусса в дифференциальной форме

$$\iint_S E_n dS = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad q = \int_V \rho dV$$

$$\iint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho dV \qquad (1.16)$$

По теореме Остроградского-Гаусса

$$\iint_S E_n dS = \int_V div\vec{E} dV$$

Из двух последних равенств имеем $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$ (1.17)

Формула (1.17) представляет теорему Гаусса в дифференциальной форме

Уравнение Пуассона и Лапласа

$$div\vec{E} = (\vec{\nabla}, \vec{E}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (E_x, E_y, E_z) =$$

$$= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \underset{(1.12)}{=} -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = -\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi \underset{(1.17)}{=} -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (1.18)$$

Уравнение (1.18) называется уравнением Пуассона

В области, где зарядов нет $\rho = 0$, получим уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (1.19)$$