

Угол между векторами.
Скалярное произведение
векторов.

Цели обучения

9.1.4.5

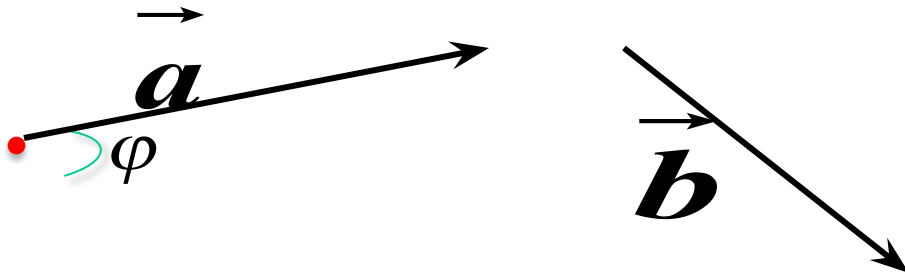
знать определение угла между двумя векторами;

9.1.4.6

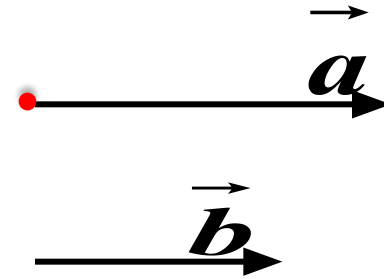
находить скалярное произведение векторов;

Скалярное произведение векторов.

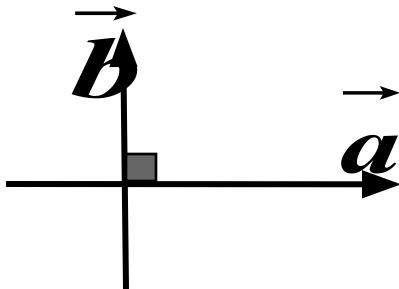
Угол между векторами:



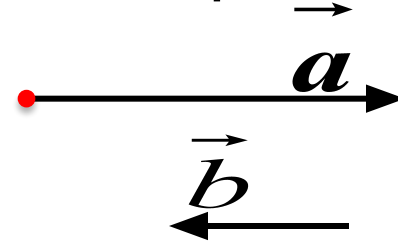
$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \quad \varphi = 0^\circ;$$



$$\vec{a} \perp \vec{b}, \quad \varphi = 90^\circ;$$



$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}, \quad \varphi = 180^\circ;$$



2. Понятие скалярного произведения векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

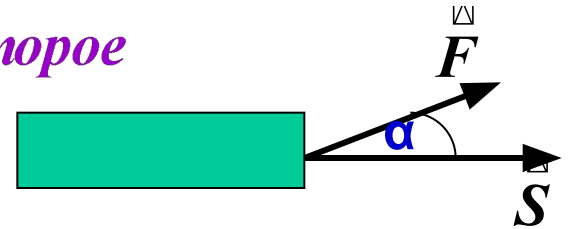
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \left(\overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right)$$

$$\cos \left(\overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



3. Пример применения скалярного произведения векторов в физике.

Пусть под действием постоянной силы $\vec{F}$ тело совершило механическое перемещение, которое задается вектором $\vec{S}$.



Если $\left(\vec{F}, \vec{S} \right) = \alpha$, то для вычисления работы A

совершенной силой $\vec{F}$, используют формулу $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \alpha$

что по определению является скалярным произведением $\vec{F} \cdot \vec{S}$.



Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Доказательство.

1) Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$, тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$,
 $\cos \alpha = \cos \left(\overset{\vec{a}}{\underset{\vec{b}}{ab}} \right) = \cos 90^\circ = 0$, значит, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

2) Пусть $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, тогда $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = 0$,
Но $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ (ненулевые векторы), значит, $\cos \alpha = 0$,
 $\alpha = 90^\circ$, $\vec{a} \perp \vec{b}$



Утверждение 2. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

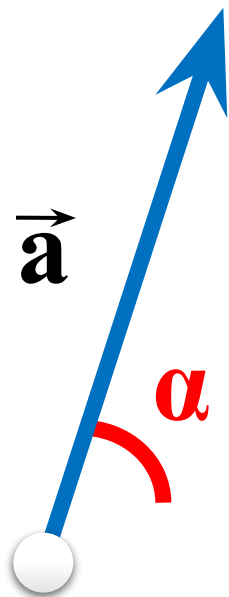
Доказательство.

Угол между равными векторами равен 0° , $\cos 0^\circ = 1$,

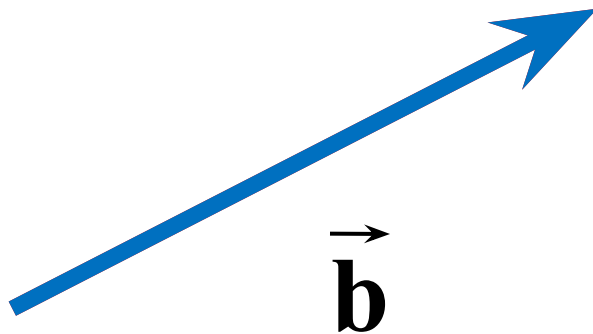
Имеем $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.



Скалярное произведение векторов

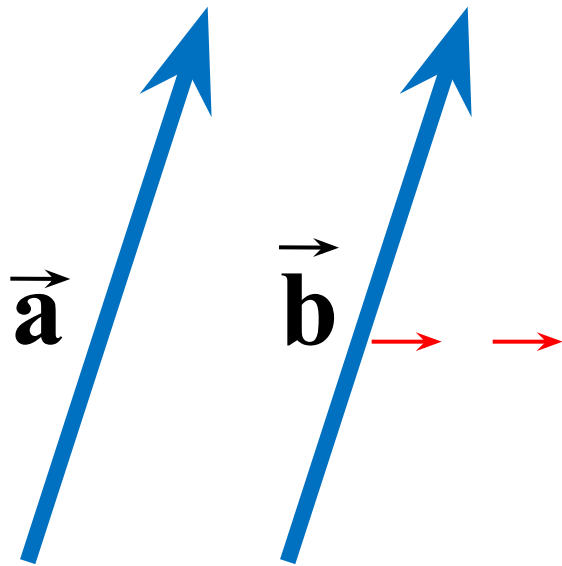


$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos (\widehat{\mathbf{a} \mathbf{b}})$$



Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos (\widehat{\mathbf{a} \mathbf{b}})$$

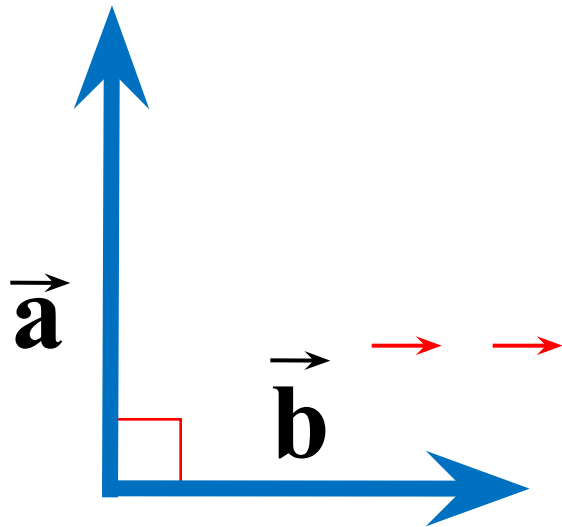


$$\begin{array}{c} \vec{a} \quad \uparrow \uparrow \quad \vec{b} \\ \widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ \end{array}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$$

Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos (\widehat{\mathbf{a} \mathbf{b}})$$



$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 90^\circ$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

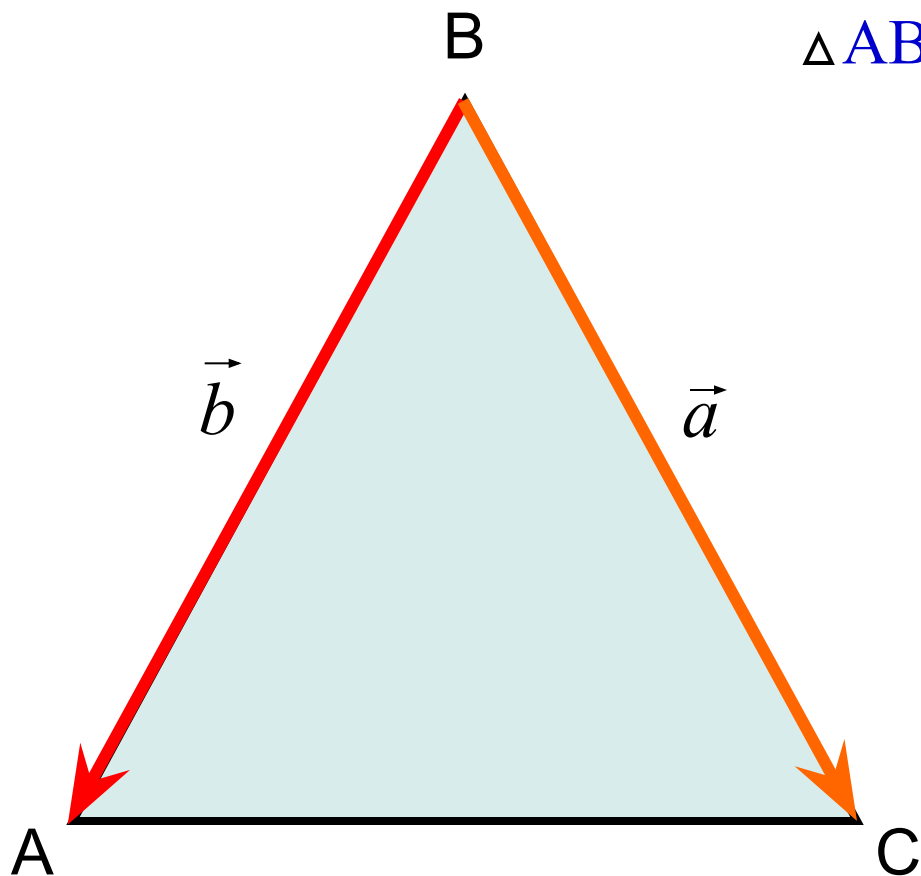
Заполните таблицу:

$ \vec{a} $	$ \vec{b} $	$\widehat{\vec{a} \vec{b}}$	$\vec{a} \cdot \vec{b}$
1	6	60°	?
8	?	0°	64
9	3	?	0
13	3	?	-39
5	12	60°	?

Найдите скалярное произведение векторов

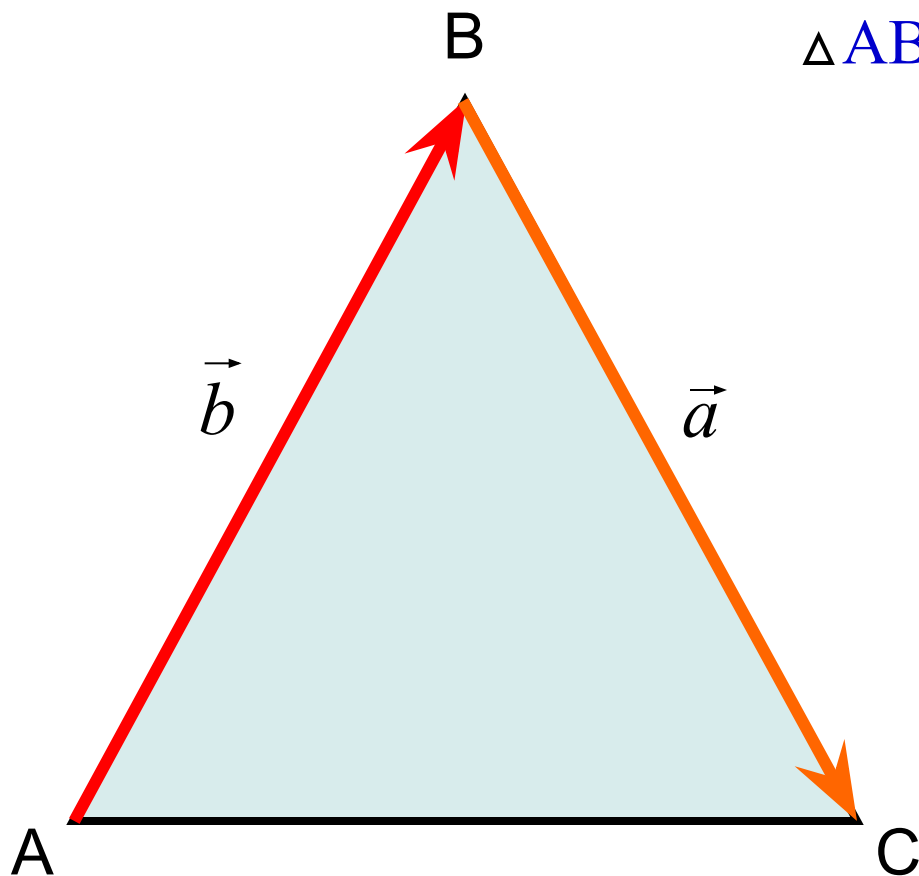
$\triangle ABC$ - равносторонний

$$AB = BC = AC = 2$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{?}$$

Найдите скалярное произведение векторов



$\triangle ABC$ - равносторонний

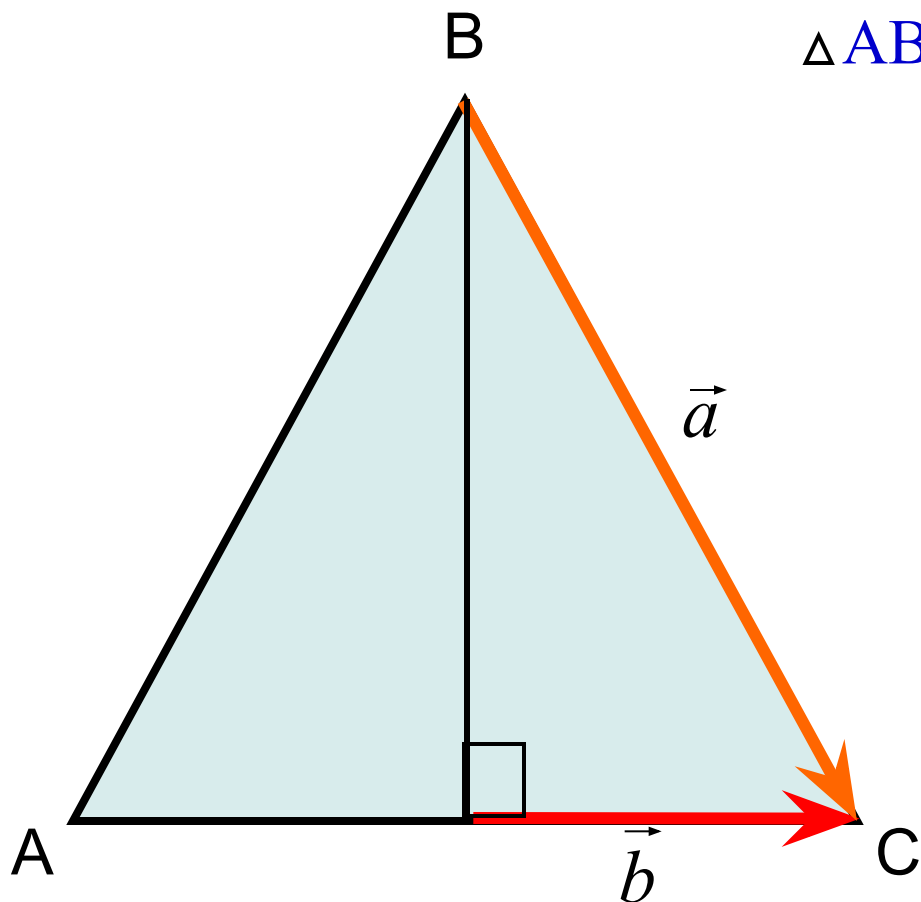
$$AB = BC = AC = 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{?}$$

Найдите скалярное произведение векторов

$\triangle ABC$ - равносторонний

$$AB = BC = AC = 2$$

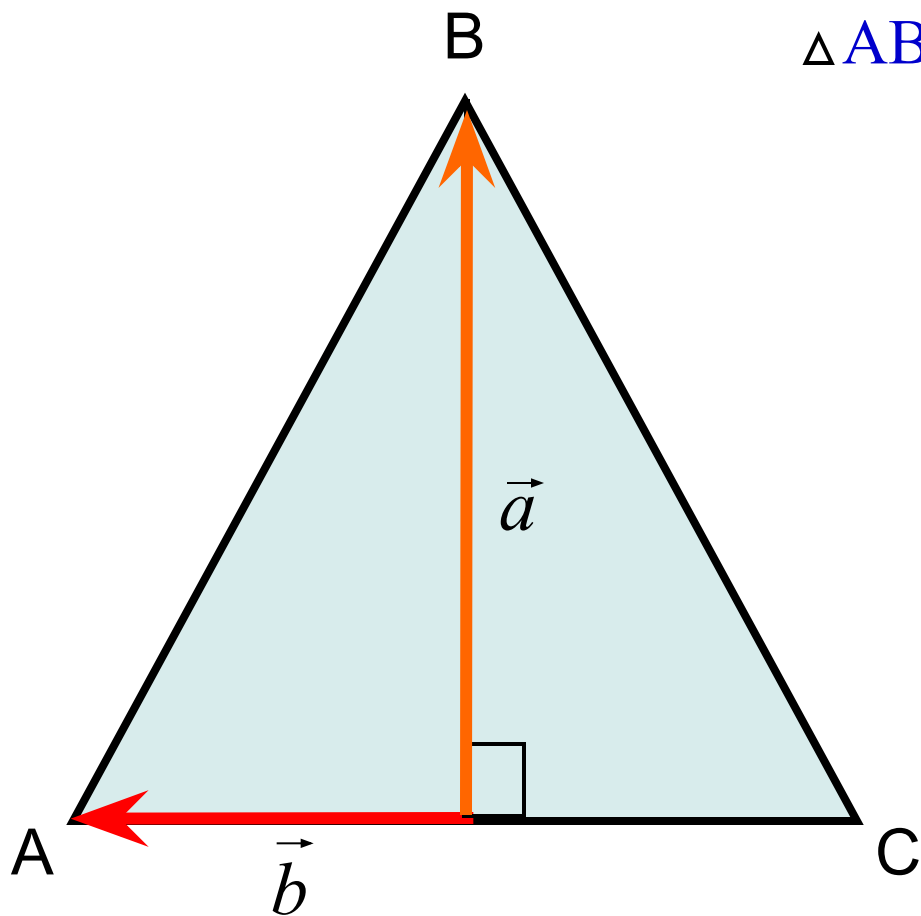


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{?}$$

Найдите скалярное произведение векторов

$\triangle ABC$ - равносторонний

$$AB = BC = AC = 2$$

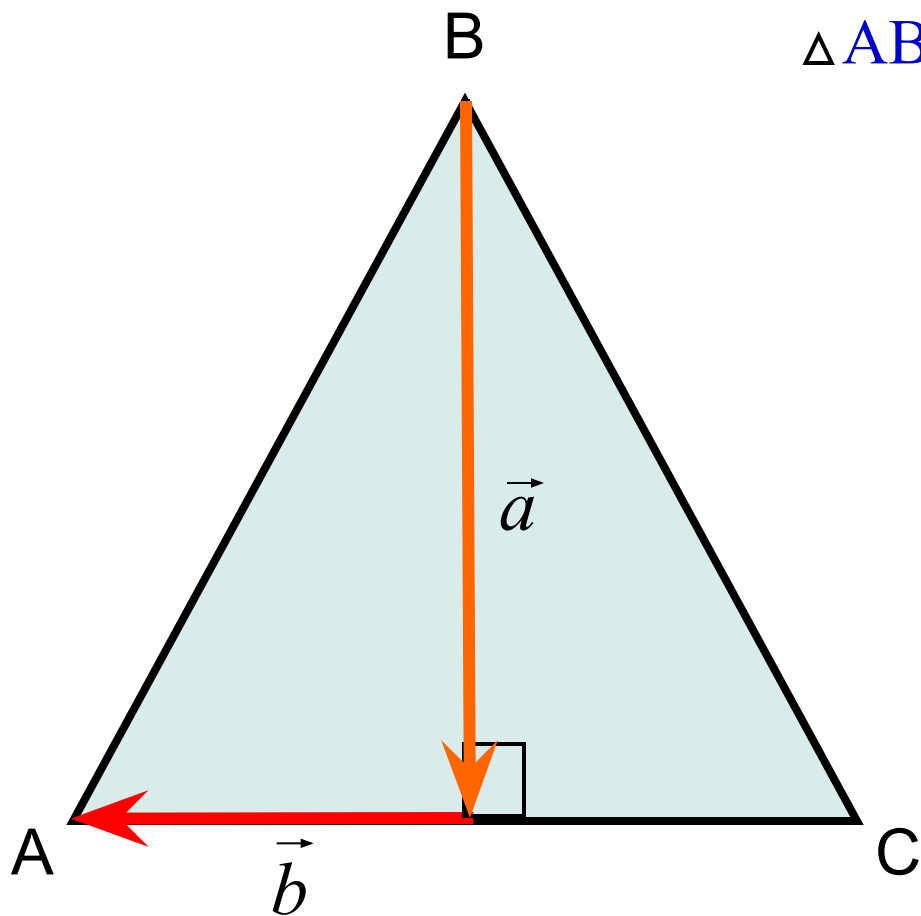


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

Найдите скалярное произведение векторов

$\triangle ABC$ - равносторонний

$$AB = BC = AC = 2$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

Скалярное произведение векторов.

Если $\vec{a}\{x_1; y_1\}; \vec{b}\{x_2; y_2\}$, **то**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$\nearrow \cos \varphi > 0, \Rightarrow \varphi - \text{острый.}$

$\rightarrow \cos \varphi = 0, \Rightarrow \varphi - \text{прямой.}$

$\searrow \cos \varphi < 0, \Rightarrow \varphi - \text{тупой.}$

Задача №1.

Найти угол между векторами

$$\vec{a} = \{1; -2\}, \quad \vec{b} = \{-3; 1\}.$$

Ответ: $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 135^\circ.$