

Компьютерная дискретная математика

Отображение и функции

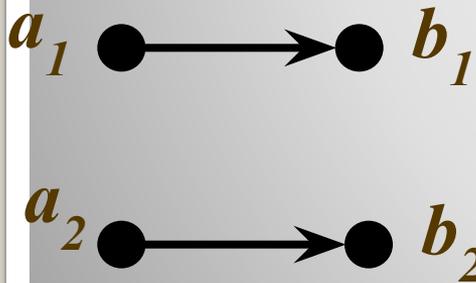
Функциональные отношения

Отношение R множеств X и Y ($R \subseteq X \times Y$) является **функциональным**, если все его элементы (упорядоченные пары) (x, y) различны по первому элементу: каждому $x \in X$ либо соответствует только один элемент $y \in Y$, такой, что xRy , либо такого элемента y вообще не существует.

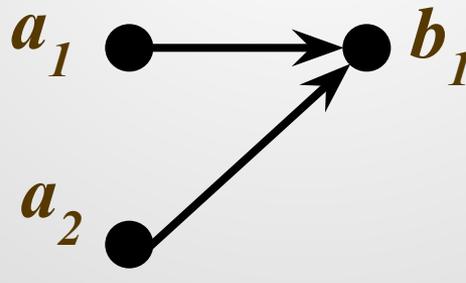
Матрица и граф функционального отношения

Матрица функционального отношения, заданного на конечных множествах X и Y , содержит не более одной единицы в каждой строке.

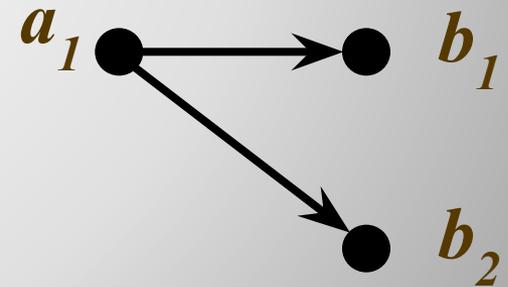
Если функциональное отношение задано в виде графа, то из каждой вершины, изображающей первую координату, выходит не более одной дуги.



а) функциональное
отношение



б) функциональное
отношение



в) не функциональное
отношение

Функциональные отношения

Пример.

A – множество кроликов;

B – множество клеток

R – отношение размещения кроликов по клеткам – “Кролик - Клетка”.

R – функциональное отношение (каждому кролику может соответствовать только одна клетка).

Функциональные отношения

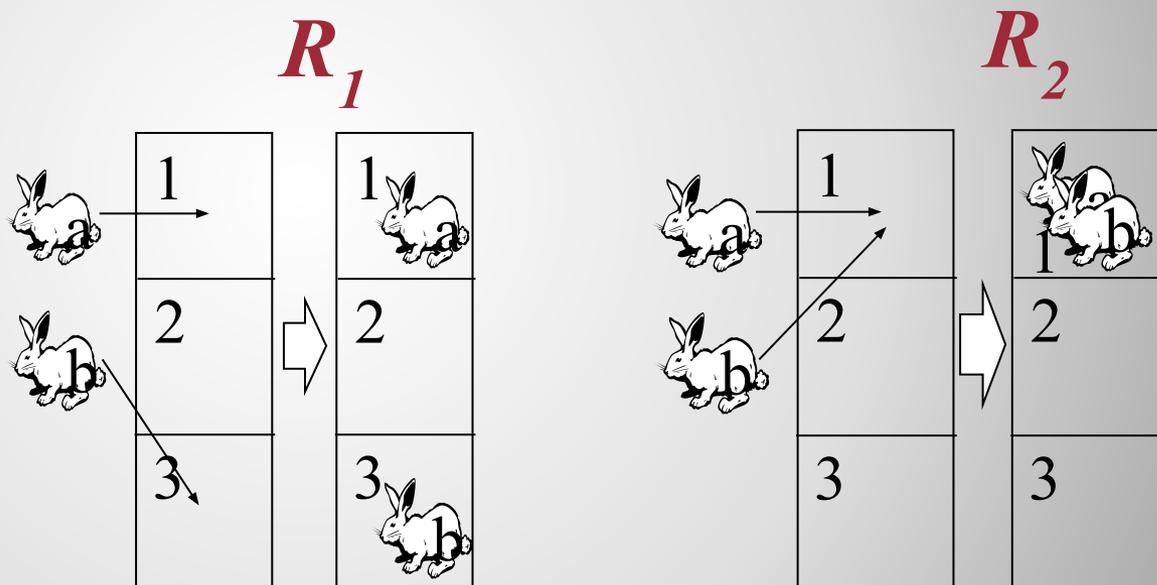
Продолжение примера.

Обозначим кроликов буквами, а клетки — номерами.

$A = \{a, b\}$,
 $B = \{1, 2, 3\}$.

$R_1 = \{(a, 1), (b, 3)\}$

$R_2 = \{(a, 1), (b, 1)\}$.



Примеры функциональных отношений
“Кролик – Клетка”

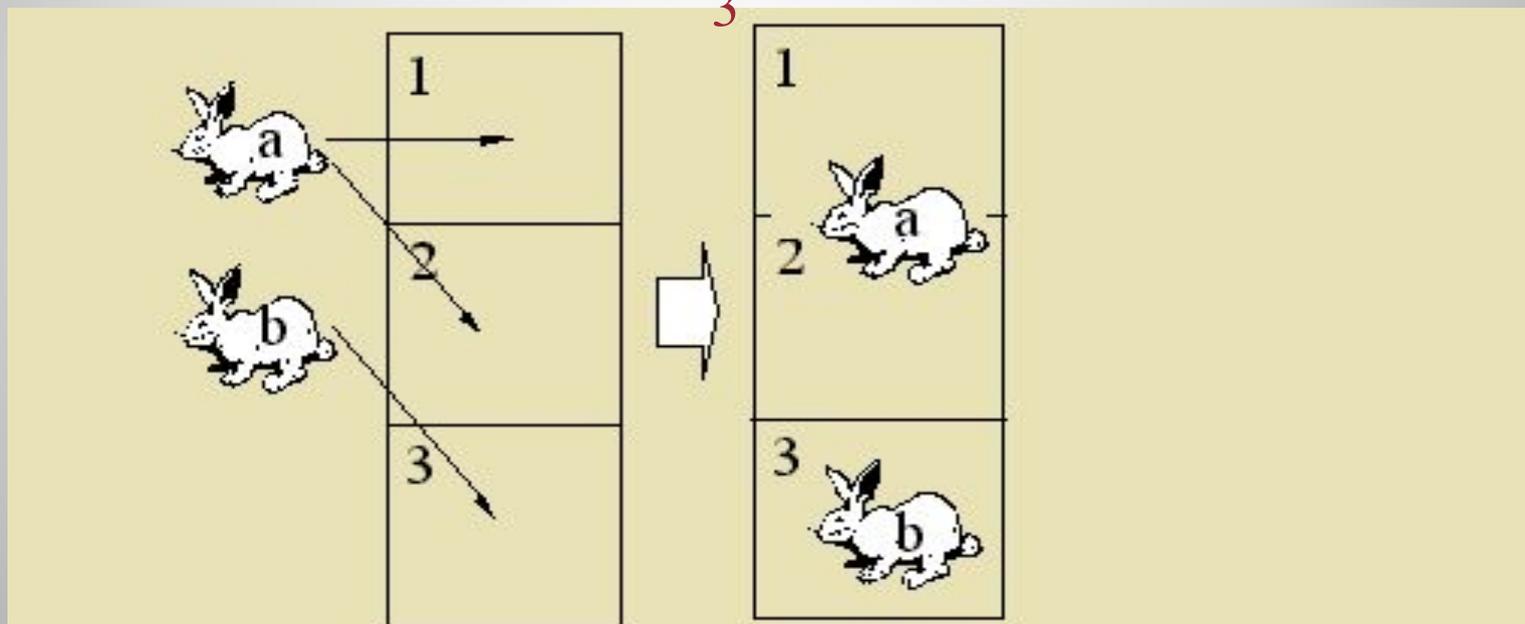
Функциональные отношения

Продолжение примера.

Пример нефункционального отношения :

$$R_3 = \{(a,1), (a,2), (b,3)\}.$$

R_3



Пример отношения “Кролик – Клетка”, не являющегося функцией

Область определения и область значений отношения

Пусть R – некоторое отношение, $R \subseteq X \times Y$.

Областью определения отношения R называется множество D_R , состоящее из всех элементов множества X , которые связаны отношением R с элементами множества Y :

$$D_R \subseteq X, D_R = \{x: \exists y \in Y, (x, y) \in R\}.$$

Областью значений отношения R называется множество \mathcal{R}_R , состоящее из всех элементов множества Y , которые связаны отношением R с элементами множества X :

$$\mathcal{R}_R \subseteq Y, \mathcal{R}_R = \{y: \exists x \in X, (x, y) \in R\}.$$

Функция или отображение

Пусть F — функциональное отношение, $F \subseteq X \times Y$. Соответствие $x \rightarrow y$ от первого ко второму элементу каждой пары $(x, y) \in F$ отношения F называется *функцией* f или *отображением* f множества D_F в Y и обозначается как $f: D_F \rightarrow Y$

Область определения и область значений функции

Множество D_F называется *областью определения* или задания функции (отображения) f и обозначается как $D_f (\equiv D_F)$.

Говорят также, что функция f действует из X в Y и определена на подмножестве D_f из X .

Если $D_f = X (=D_F)$, то пишут $f: X \rightarrow Y$ и говорят, что задано отображение $X \rightarrow Y$.

Область определения и область значений функции

Если множество $A \subseteq X$, то через $f(A) = \{y \in Y: y = f(x), \forall x \in A\}$ обозначается образ множества A .

Множество $f(X) \subseteq Y$ называется *образом* или *областью значений* отображения f и обозначается через $\mathcal{R}_f = f(X)$.

Если множество $B \subseteq Y$, то множество $f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}$ называется *прообразом* множества B относительно отображения f .

График функции (отображения)

Графиком функции (отображения) $f: X \rightarrow Y$ называется совокупность «двумерных» точек (x, y) вида $(x, f(x))$ в декартовом произведении $X \times Y$.

Если $F \subset X \times Y$ — исходное функциональное отношение, порождающее функцию (отображение) f , то F в точности есть *график функции f* .

Не путать понятия «график функции f » и «граф отношения F »: граф с помощью дуг со стрелками описывает действие отображения f на каждом значении аргумента x .

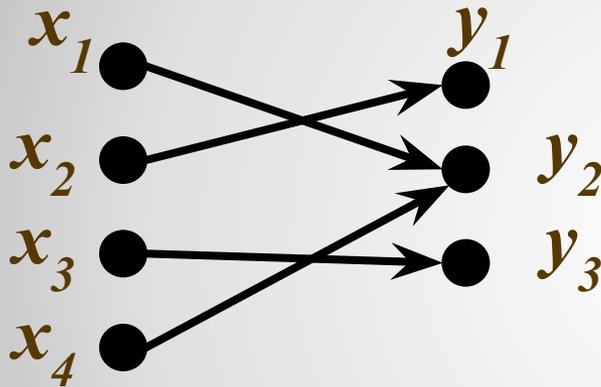
Типы отображений, Сюръективное отображение

Функция $f: X \rightarrow Y$ называется **сюръективным отображением**, если $\mathcal{R}_f = Y$.

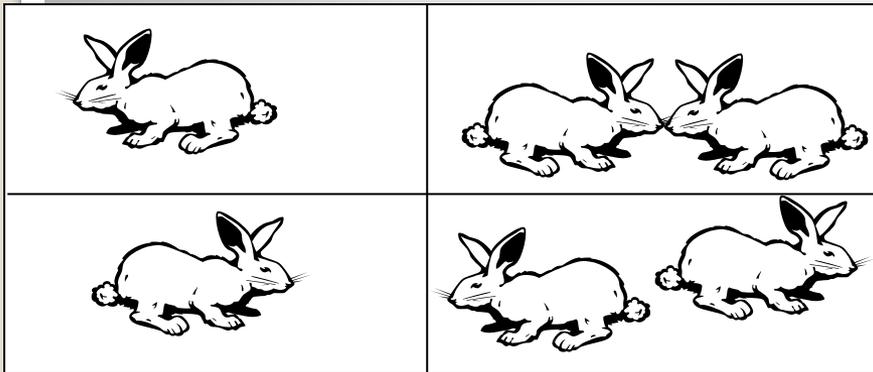
На графе, представляющем сюръективное отображение $X \rightarrow Y$, из любой вершины $x \in X$ выходит в точности одна дуга, а в любую вершину, представляющую элемент множества Y , входит не менее одной дуги .

Типы отображений. Сюръективное отображение

Пример.



Пример сюръективного
отображения



Сюръективное отображение
“Кролик - Клетка”;
 $|X|=6, |Y|=4$

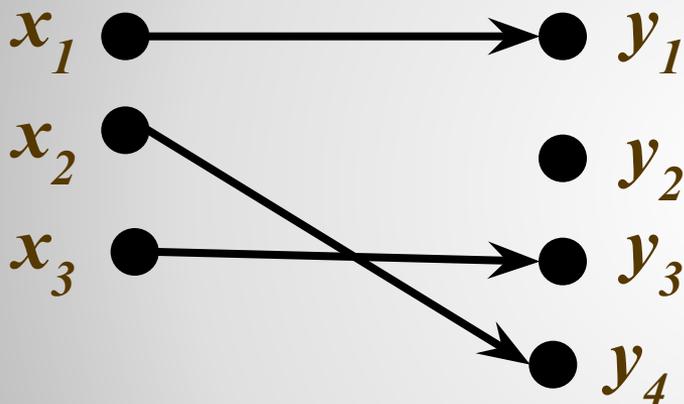
Типы отображений. Инъективное отображение

Функция $f: X \rightarrow Y$ называется **инъективным отображением**, если из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$.

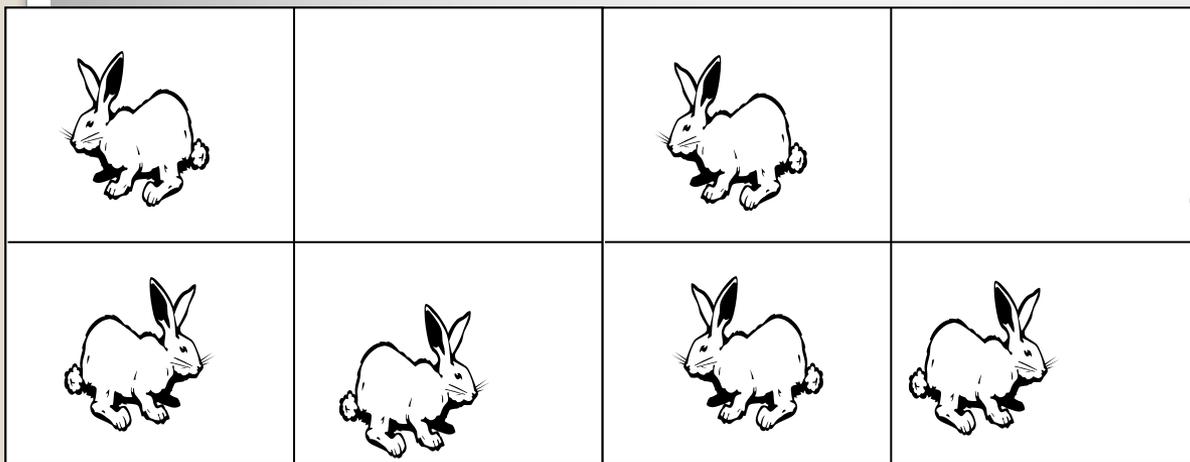
На графе, представляющем инъективное отображение $X \rightarrow Y$ из любой вершины $x \in X$ выходит в точности одна дуга, а в любую вершину, представляющую элемент множества Y , входит не более одной дуги.

Типы отображений. Инъективное отображение

Пример.



Пример инъективного
отображения



Инъективное
отображение
“Кролик - Клетка”;

$$|X|=6, |Y|=8$$

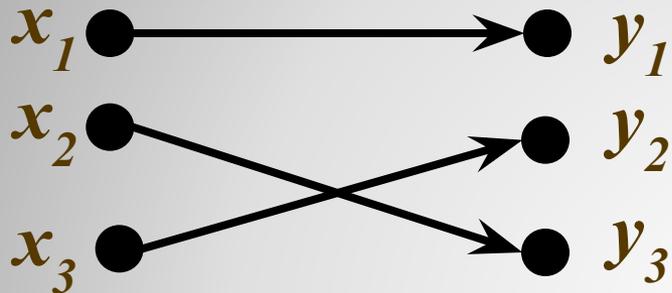
Типы отображений. Биективное отображение

Функция $f: X \rightarrow Y$ называется **биективным отображением**, если она сюръективна и инъективна.

На графе, представляющем биективное отображение $X \rightarrow Y$ конечных множеств, из любой вершины $x \in X$ выходит в точности одна дуга, а в любую вершину $y \in Y$ входит одна и только одна дуга.

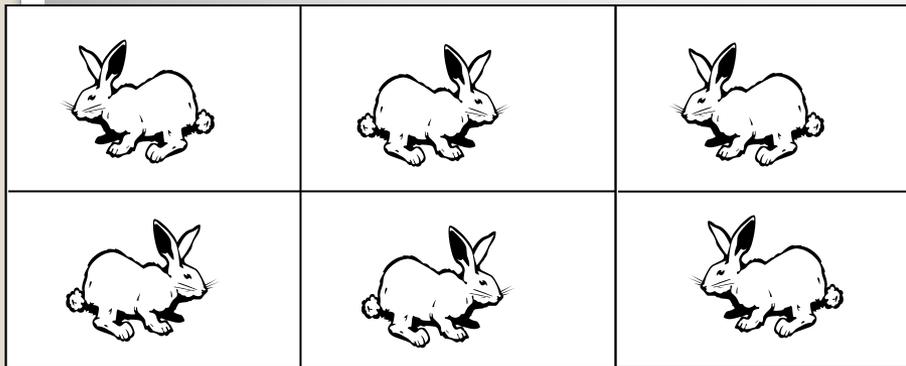
Типы отображений. Биективное отображение

Пример.



Пример биективного
отображения

Биективное отображение $f: X \rightarrow Y$ осуществляет взаимно однозначное отображение между множествами X и Y , поэтому $X \sim Y$, $|X| = |Y|$



Биективное отображение
“Кролик - Клетка”;
 $|X| = 6, |Y| = 6$

Обратное отображение

Если $F: X \rightarrow Y$ биективно, то существует обратное отображение $F^{-1}: Y \rightarrow X$, причем $D_{F^{-1}} = Y$.

Реляционная модель данных и реляционная алгебра

С математической точки зрения табличное представление данных легко формулируется в терминах теории отношений и поэтому к нему применим аппарат теории множеств. Такая модель данных называется *реляционной*.

Пример:

Фамилия	Инициалы	Группа
Алексеев	И.А.	ПО- 01
Андреева	О.П.	ПМ-01
Баранов	Н.П.	ПМ-01
Быкова	Н.А.	ПО- 01
Волков	В.В.	ПМ- 01

Терминология реляционной алгебры

Элементы отношения, соответствующие строкам таблицы, называются *кортежами*.

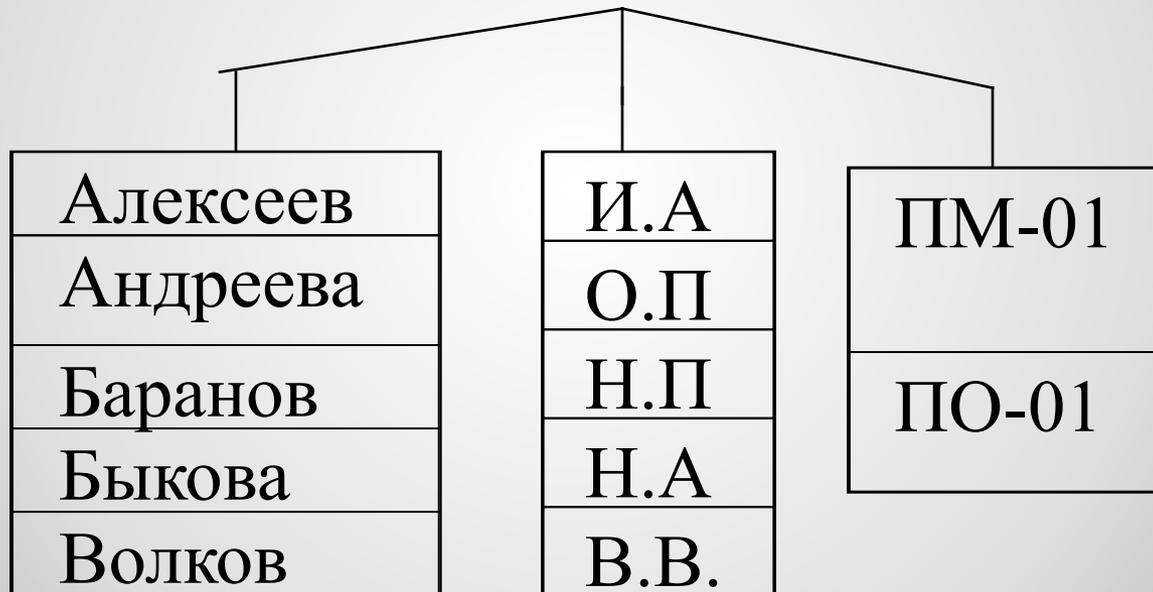
Множества (или области данных, на которых определено отношение), соответствующие столбцам таблицы, называются *доменами*.

Наименования столбцов таблицы называют *атрибутами*.

Схемой отношения является список атрибутов.

Реляционная модель данных и реляционная алгебра

домены:



Реляционная модель данных и реляционная алгебра

атрибуты

Фамилия	Инициалы	Группа
Алексеев	И.А.	ПО-01
Андреева	О.П.	ПМ-01
Баранов	Н.П.	ПМ-01
Быкова	Н.А.	ПО-01
Волков	В.В.	ПМ-01

кортежи

Реляционная модель данных и реляционная алгебра

Для работы с *реляционной моделью* была создана *реляционная алгебра*.

Каждая операция этой алгебры использует одну или несколько таблиц (отношений) в качестве ее операндов и продуцирует в результате новую таблицу, т.е. позволяет "разрезать" и "склеивать" таблицы.

Операции алгебры отношений

Объединение отношений.

При выполнении операции объединения двух отношений (\cup) получаем отношение, включающее все кортежи, входящие хотя бы в одно из отношений-операндов.

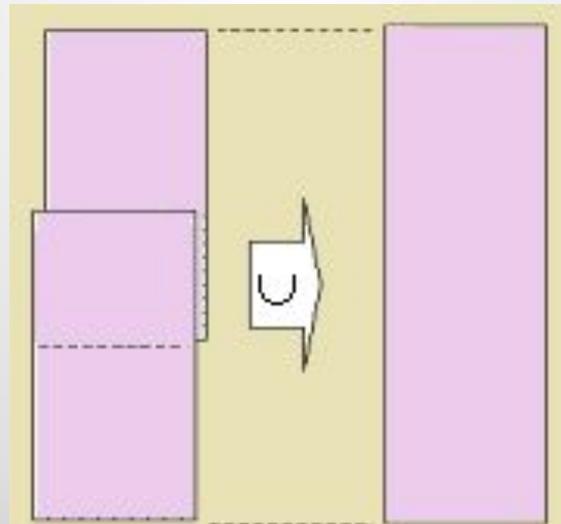


Схема выполнения операции
“ \cup ”

Операции алгебры отношений

- **Пересечение отношений.**

При выполнении операции пересечения двух отношений (\cap) получаем отношение, включающее только те кортежи, которые входят в оба отношения-операнда.

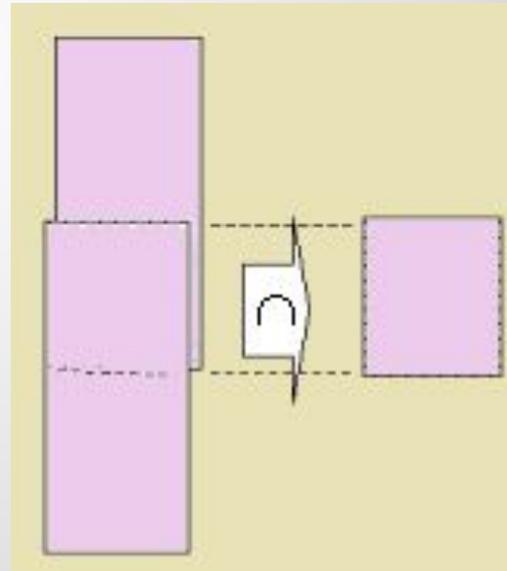


Схема выполнения операции “ \cap ”

Операции алгебры отношений

- **Разность отношений.**

Отношение, являющееся разностью (\setminus) двух отношений включает все кортежи, входящие в отношение – первый операнд, такие, что ни один из них не входит в отношение, являющееся вторым операндом.

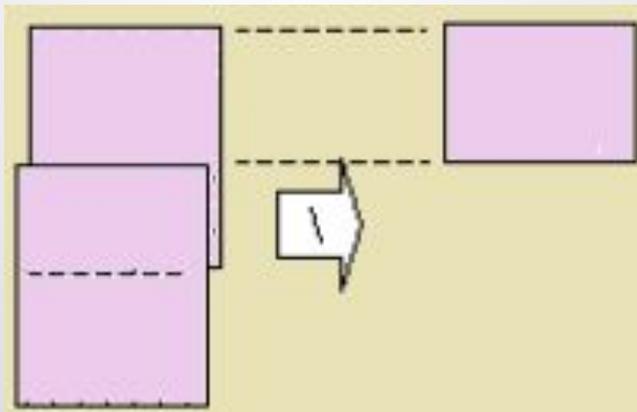


Схема выполнения операции “ \setminus ”

Операции алгебры отношений

Пример.

СТУДЕНТ 1

Фамилия	Инициалы	Группа
Алексеев	И.А.	ПО- 01
Андреева	О.П.	ПМ-01
Баранов	Н.П.	ПМ-01
Быкова	Н.А.	ПО- 01
Волков	В.В.	ПМ- 01

СТУДЕНТ 2

Фамилия	Инициалы	Группа
Алексеев	И.А.	ПО- 01
Быкова	Н.А.	ПО- 01
Дроздов	И.К.	ПО-01
Зайцев	О.Н.	ПМ-01
Кузнецова	Е.В.	ПО- 01

Операции алгебры отношений

Продолжение примера.

СТУДЕНТ 1 \cap СТУДЕНТ 2

Фамилия	Инициалы	Группа
Алексеев	И.А.	ПО- 01
Быкова	Н.А.	ПО- 01

Операции алгебры отношений

Продолжение примера.

ВСЕ СТУДЕНТЫ = СТУДЕНТ 1 \cup СТУДЕНТ 2

Фамилия	Инициалы	Группа
Алексеев	И.А.	ПО- 01
Андреева	О.П.	ПМ-01
Баранов	Н.П.	ПМ-01
Быкова	Н.А.	ПО- 01
Волков	В.В.	ПМ- 01
Дроздов	И.К.	ПО- 01
Зайцев	О.Н.	ПМ-01
Кузнецова	Е.В.	ПО- 01

Операции алгебры отношений

Продолжение примера.

СТУДЕНТ 1 \ СТУДЕНТ 2

Фамилия	Инициалы	Группа
Андреева	О.П.	ПМ-01
Баранов	Н.П.	ПМ-01
Волков	В.В.	ПМ-01

Операции алгебры отношений

Прямое произведение отношений.

При выполнении прямого произведения (\times) двух отношений получаем отношение, множество кортежей которого является декартовым произведением множеств кортежей первого и второго операндов.

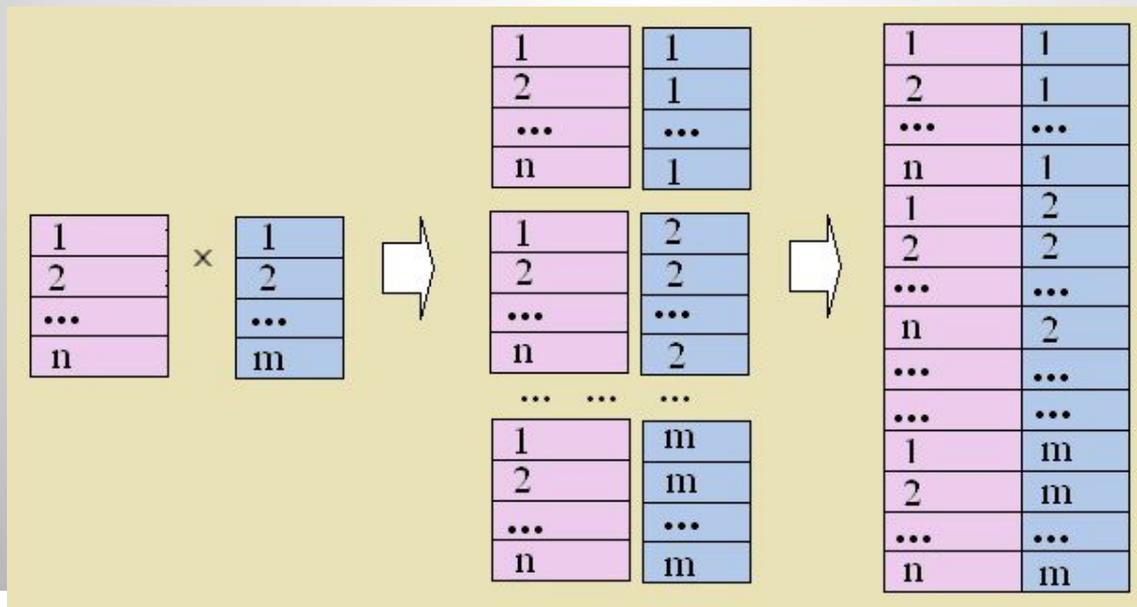


Схема выполнения операции прямого произведения отношений

Операции алгебры отношений

Пример.

Рассмотрим отношения КУРС и СТУДЕНТ 1

КУРС

Уч. год	Курс
2001-2002	1
2002-2003	2

СТУДЕНТ 1

Фамилия	Инициалы	Группа
Алексеев	И.А.	ПО- 01
Андреева	О.П.	ПМ-01
Баранов	Н.П.	ПМ-01
Быкова	Н.А.	ПО- 01
Волков	В.В.	ПМ- 01

СТУДЕНТ 1 × КУРС = КУРС СТУДЕНТ 1

Операции алгебры отношений

КУРС СТУДЕНТ 1

Фамилия	Инициалы	Группа	Уч. год	Курс
Алексеев	И.А.	ПО- 01	2001-2002	1
Алексеев	И.А.	ПО- 01	2002-2003	2
Андреева	О.П.	ПМ-01	2001-2002	1
Андреева	О.П.	ПМ-01	2002-2003	2
Баранов	Н.П.	ПМ-01	2001-2002	1
Баранов	Н.П.	ПМ-01	2002-2003	2
Быкова	Н.А.	ПО- 01	2001-2002	1
Быкова	Н.А.	ПО- 01	2002-2003	2
Волков	В.В.	ПМ- 01	2001-2002	1
Волков	В.В.	ПМ- 01	2002-2003	2

Операции алгебры отношений

- ***Ограничение отношения.***

Результатом ограничения (σ) отношения по некоторому атрибуту или атрибутам является отношение, включающее кортежи отношения-операнда, которые удовлетворяют этому условию.

Операции алгебры отношений

Пример.

Выполним ограничение отношения ВСЕ
СТУДЕНТЫ по атрибуту Группа=ПО-01.
Назовем результат – СТУДЕНТ ПО-01.

СТУДЕНТЫ ПО-01

Фамилия	Инициалы	Группа
Алексеев	И.А.	ПО- 01
Быкова	Н.А.	ПО- 01
Дроздов	И.К.	ПО- 01
Кузнецова	Е.В.	ПО- 01

Операции алгебры отношений

Проекция отношения.

При выполнении проекции отношения (π) на заданный набор его атрибутов отношение-результат получается путем удаления из отношения-операнда атрибутов, не указанных в заданном наборе.

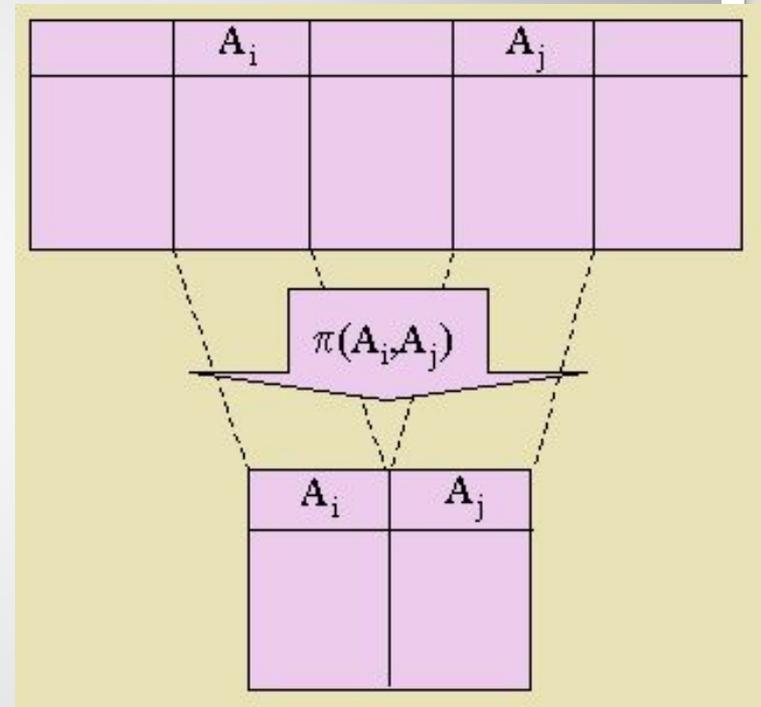


Схема выполнения операции проекции отношения

Операции алгебры отношений

Пример.

Выполним проекцию отношения КУРС
СТУДЕНТ 1 по атрибутам Группа, Уч. год, Курс

$\pi_{\text{Группа, Уч. год, Курс}}(\text{КУРС СТУДЕНТ 1})$

Группа	Уч. год	Курс
ПО- 01	2001-2002	1
ПО- 01	2002-2003	2
ПМ-01	2001-2002	1
ПМ-01	2002-2003	2

Операции алгебры отношений

- **Естественное соединение отношений.**

При естественном соединении двух отношений $(I \bowtie I)$ образуется результирующее отношение, кортежи которого являются соединением кортежей первого и второго отношений, если значение общих атрибутов совпадает.

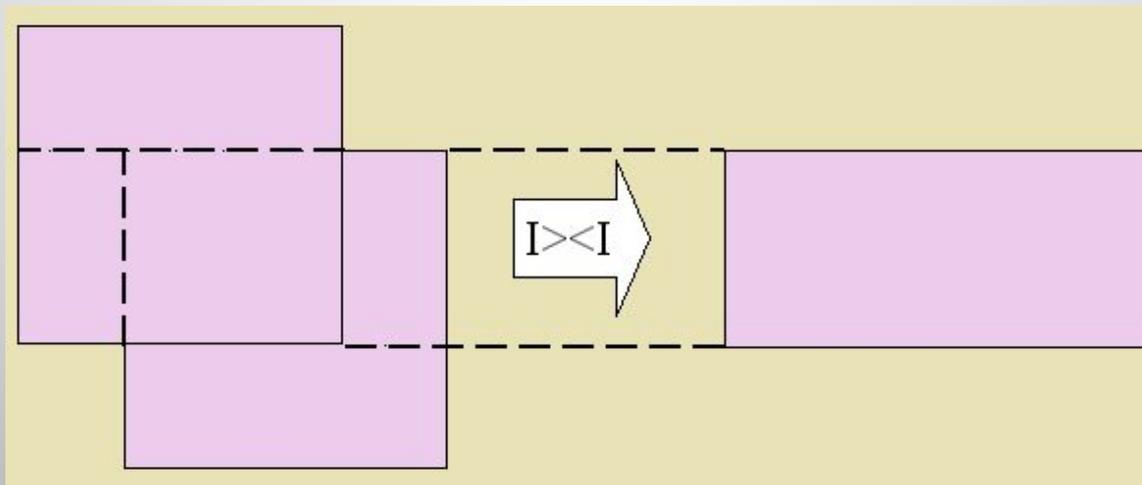


Схема выполнения операции естественного соединения отношений

Операции алгебры отношений

Пример.

Рассмотрим отношение НОМЕР

НОМЕР

Фамилия	Инициалы	Зачетка N	Студ N
Алексеев	И.А.	11197	784567
Андреева	О.П.	11215	784565
Баранов	Н.П.	11213	784598
Быкова	Н.А.	11216	784588
Волков	В.В.	11217	784599
Дроздов	И.К.	11193	784611
Зайцев	О.Н.	11191	784601
Кузнецов	Е.В.	11195	785587

Операции алгебры отношений

Продолжение примера.

СТУДЕНТ ПО-01 $I \succ \prec I$ НОМЕР

Фамилия	Инициалы	Группа	Зачетка N	Студ N
Алексеев	И.А.	ПО- 01	11197	784567
Быкова	Н.А.	ПО- 01	11216	784588
Дроздов	И.К.	ПО- 01	11193	784611
Кузнецов	Е.В.	ПО- 01	11195	785587

Операции алгебры отношений

Деление отношений.

Операция деления отношений (\div) происходит следующим образом. Отношение – делитель должно иметь набор атрибутов, включенный в набор атрибутов делимого. Результирующее отношение содержит те атрибуты делимого, которые не присутствуют в делителе.

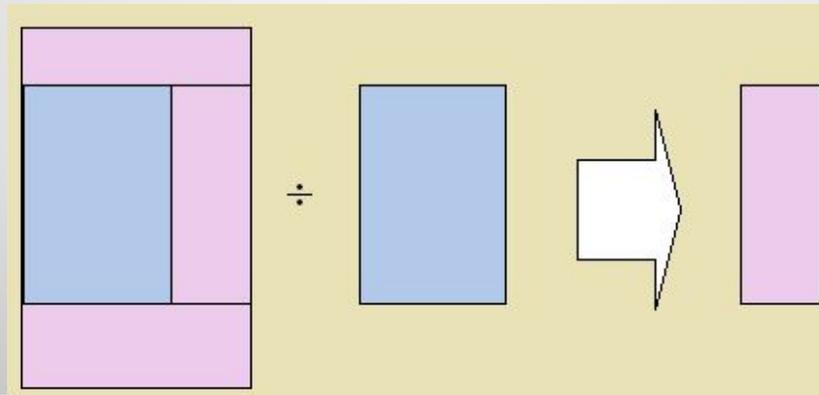


Схема выполнения операции деления отношений

Операции алгебры отношений

Пример.

Произведем деление отношения НОМЕР на отношение ФАМИЛИЯ СТ ПО 01

НОМЕР ÷ ФАМИЛИЯ СТ ПО 01

Зачетка N	Студ N
11197	784567
11216	784588
11193	784611
11195	785587