

Лекция 4-5

Инженерные кривые и поверхности

*Чтобы выполнить большой и важный труд, необходимы
две вещи: ясный план и ограниченное время.*

Элберт Хаббард

Литература

- Курс высшей математики: Смирнов В.И. , 1-й т., М., Наука, 1974. – 480с.
- Курс высшей математики, Смирнов В.И., 2-й т., М., Наука, 1974. – 656с.
- Введение в математические основы САПР: Д. М. Ушаков — Санкт-Петербург, ДМК Пресс, 2012 г.- 208 с.
- Введение в современные САПР: Владимир Малюх — Москва, ДМК Пресс, 2014 г.- 192 с.
- Любые книги по Solid Works

План

1. Кусочные кривые и их гладкость .
2. Билинейный лоскут.
3. Поверхности сдвига и вращения.
4. Линейчатая поверхность.
5. Лоскут Кунса.
6. Эрмитова кривая.
7. Бикубическая поверхность.
8. Кривые и поверхности Безье.
9. Сплайн-интерполяция.
10. Рациональные кривые и поверхности

11. **Граничные модели. Корректность граничных моделей**
12. **Пакеты геометрического моделирования**

Кусочные кривые и их гладкость

C^n - непрерывность кривых и поверхностей - непрерывность k -х производных их параметрических уравнений $\forall 0 \leq k \leq n$.

Кривые состояются из криволинейных сегментов

Поверхности - из лоскутов разной параметризации.

G^n - непрерывность – непрерывность направления (единичного вектора) k -й производной параметрического уравнения $\forall 0 \leq k \leq n$

Пример. Для сходимости итерационных методов второго порядка (например, метода Ньютона-Рафсона) необходимо, чтобы рассматриваемые кривые и поверхности имели G^2 - непрерывность.

Кусочные кривые и их гладкость

Уравнения кривых и поверхностей записываются в некоей удобной системе координат.

Для преобразования в глобальную систему координат используются аффинные трансформации.

Аффинное пространство:

- задается двумя непересекающимися множествами - точками и векторами;
- задается операцией откладывания точки от другой точки с помощью вектора;
- задается обратной операцией вычисления вектора, соединяющего две точки.
- множество векторов должно образовывать евклидово пространство (линейное пространство со скалярным произведением).

Кусочные кривые и их гладкость

В случае САПР:

- трехмерное аффинное пространство;
- определено векторное произведение;
- точки и векторы в этом пространстве могут задаваться тройками вещественных чисел.

Соглашение о нотации

Точки: $\mathbf{P}, \mathbf{\Omega}, \dots$

Векторы: $\mathbf{e}, \mathbf{\theta}, \dots$

Скалярные величины: x, α, \dots

Скалярное произведение: (u, v)

Векторное произведение: $u \wedge v$

Билинейный лоскут

Лоскут - конечная поверхность, представленная в виде области отображения прямоугольника в параметрическом Пространстве $P(u, v)$, $u_0 \leq u \leq u_1$, $v_0 \leq v \leq v_1$ (зачастую $u_0 = v_0 = 0$, $u_1 = v_1 = 1$)

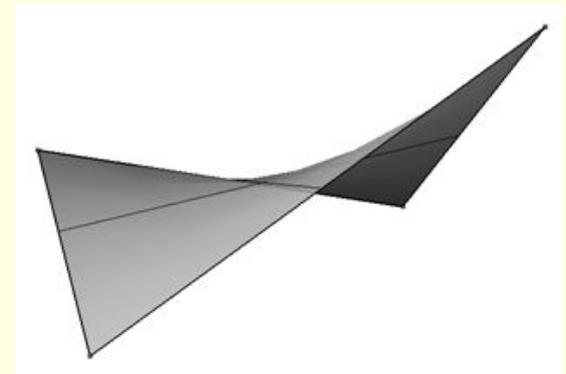
Простейший лоскут – билинейная поверхность, задаваемая четырьмя граничными вершинами:

$$P(0,0) = P_{00}, \quad P(0,1) = P_{01}$$

$$P(1,0) = P_{10}, \quad P(1,1) = P_{11}.$$

Уравнение билинейного лоскута:

$$P(u,v) = (1-u)(1-v)P_{00} + (1-u)vP_{01} + u(1-v)P_{10} + uvP_{11}.$$



Поверхности сдвига и вращения

Поверхность сдвига (*swept surface*)

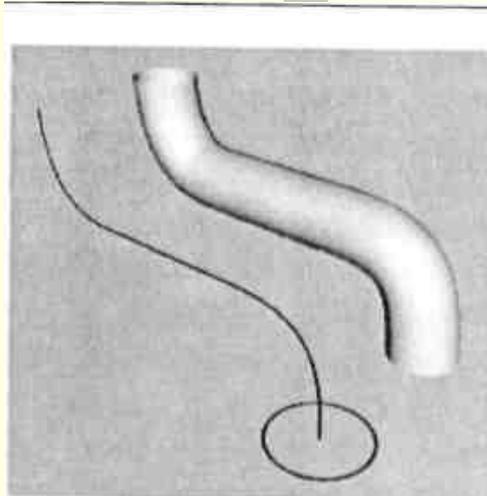
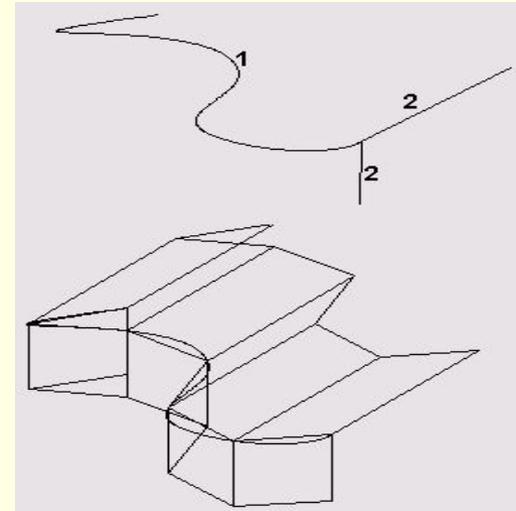
задается точками заданной кривой

$P(t)=(x(t), y(t), z(t))$, $0 \leq t \leq 1$, при ее

движении в заданном направлении

$e=(e_x, e_y, e_z)$. Параметризация

поверхности сдвига: $P(u,v)=P(u) + ve$.



Поверхность вращения описывается

заданной кривой ($P_1(t)$)

и кривой ($P_2(t)$).

Уравнение поверхности:

$$P(u,v)=P_1(u) + P_2(v) - P_2(0),$$

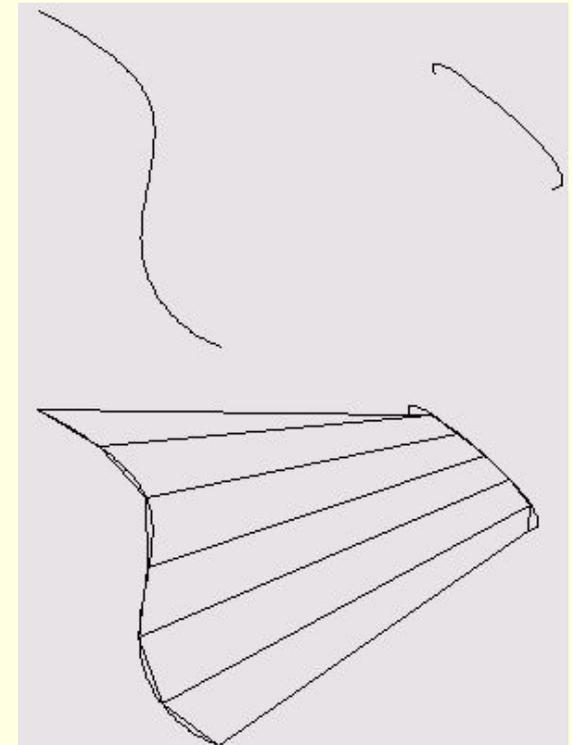
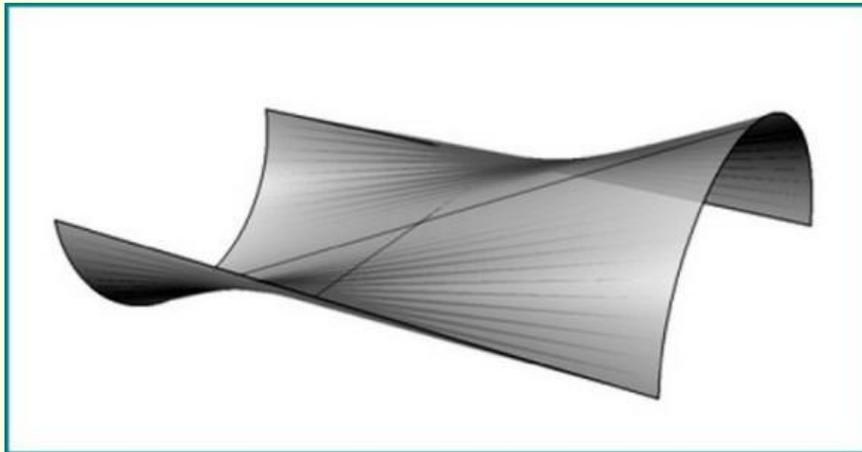
$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

вдоль
Уравнение

Линейчатая поверхность

Линейчатая поверхность (ruled surface) - способ задания поверхности по двум кривым $P_1(t)$ и $P_2(t)$, $0 \leq t \leq 1$
Параметрическое уравнение линейчатой поверхности:

$$P(u, v) = uP_1(v) + (1-u)P_2(v),$$
$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$



Лоскут Кунса

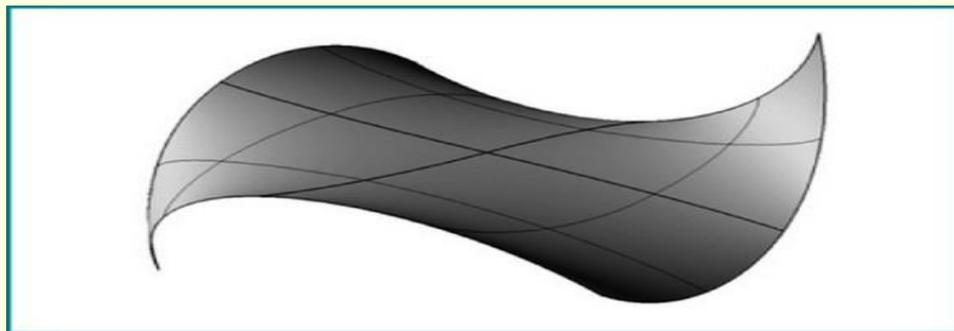
Лоскут Кунса (Coons' patch) - обобщение поверхности сдвига и линейчатой поверхности. Задается четырьмя *граничными кривыми* $P_0(t)$, $P_1(t)$, $Q_0(t)$, $Q_1(t)$, образующими замкнутый контур в трехмерном пространстве:

$$P_0(0) = Q_0(0) = P_{0,0},$$

$$P_0(1) = Q_1(0) = P_{0,1},$$

$$P_1(0) = Q_0(1) = P_{1,0},$$

$$P_1(1) = Q_1(1) = P_{1,1}.$$



Параметрическое уравнение лоскута Кунса:

$$P(u,v) = (1-u)P_0(v) + uP_1(v) + (1-v)Q_0(u) + vQ_1(u) - (1-u)(1-v)P_{0,0} - u(1-v)P_{1,0} - (1-u)vP_{0,1} - uvP_{1,1}$$

Замечание: лоскут Кунса позволяет контролировать форму поверхности на ее границах, но не между ними

Эрмитова кривая

Кубическая кривая - основной примитив при работе в САПР.

Эрмитова кривая - геометрический способ задания

Кубической кривой: с помощью концевых точек и касательных векторов в них.

Уравнение Эрмитовой кривой:

$$P(t) = (1 - 3t^2 + 2t^3)P_0 + (3t^2 - 2t^3)P_1 + (t - 2t^2 + t^3)P_0' + (-t^2 + t^3)P_1'$$

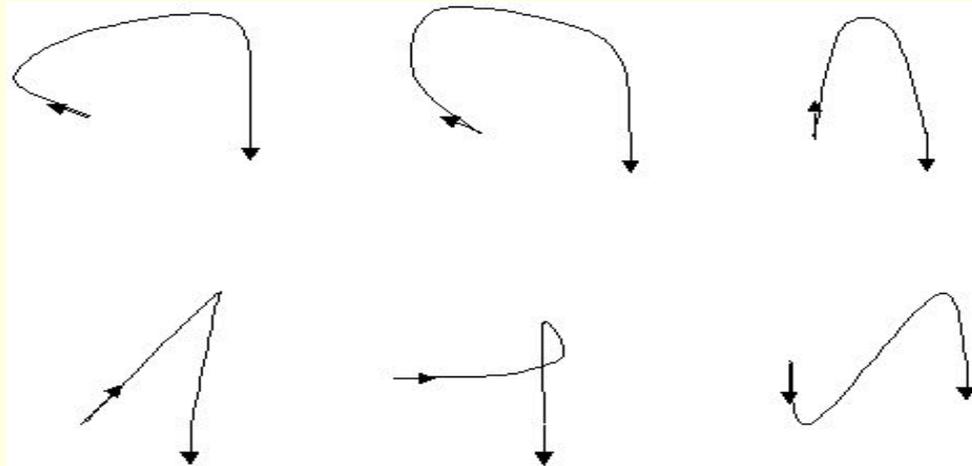
при этом

$$P(0) = P_0,$$

$$P(1) = P_1,$$

$$P'(0) = P_0',$$

$$P'(1) = P_1',$$



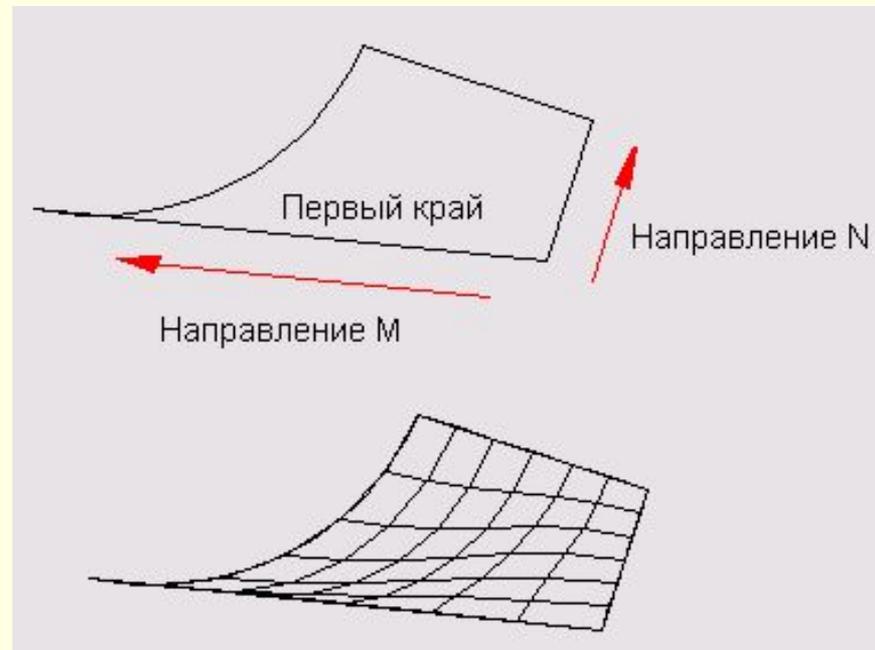
Бикубическая поверхность

Бикубическая поверхность (bicubic surface) задается алгебраически с помощью 48 (!) коэффициентов.

Для задания БП необходимы:

1. Четыре граничные точки P_{00} , P_{01} , P_{10} , P_{11} .
2. Восемь касательных векторов в этих точках.
3. Четыре вектора кручения.

БП - обладающая кубической кривизной как в направлении M , так и в направлении N поверхность, «натянутая» на четыре пространственные кривые

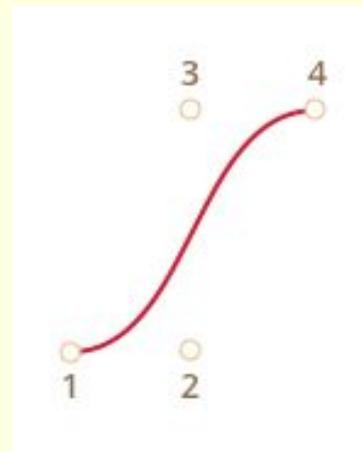
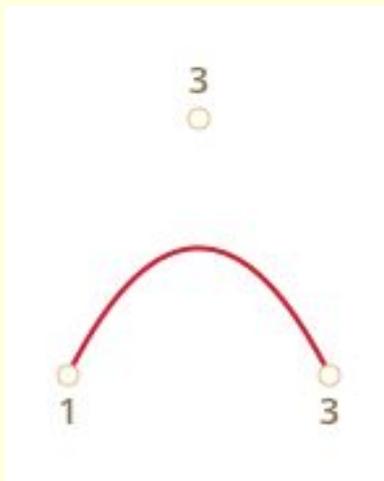
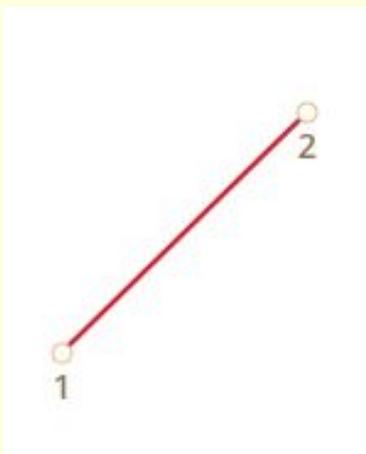


Кривые и поверхности Безье

Недостаток Эрмитовой кривой: можно определить поведение кривой только в граничных точках.

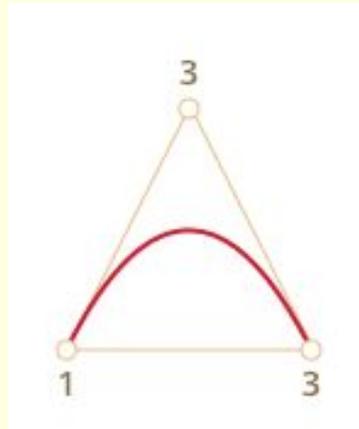
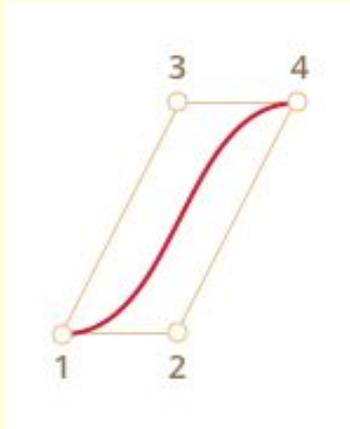
Кривая Безье - конструктивно задаваемая кривая, форму которой можно контролировать в промежуточных, так называемых контрольных, точках.

Кривая Безье задаётся опорными точками.



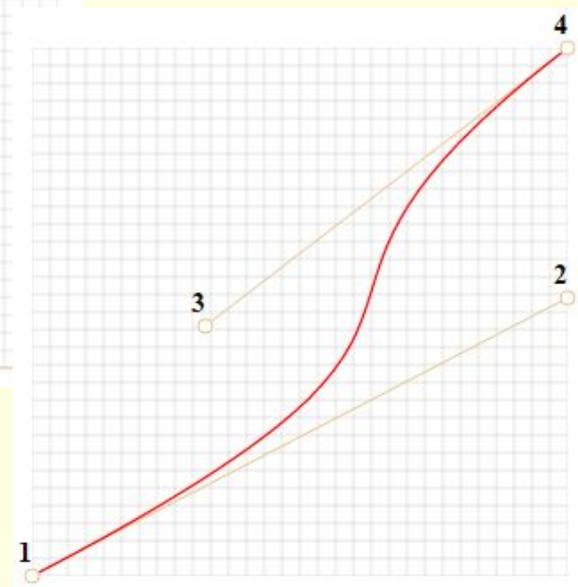
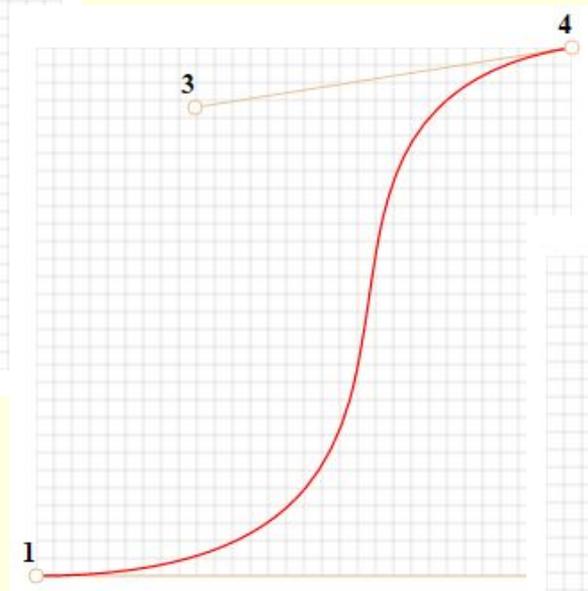
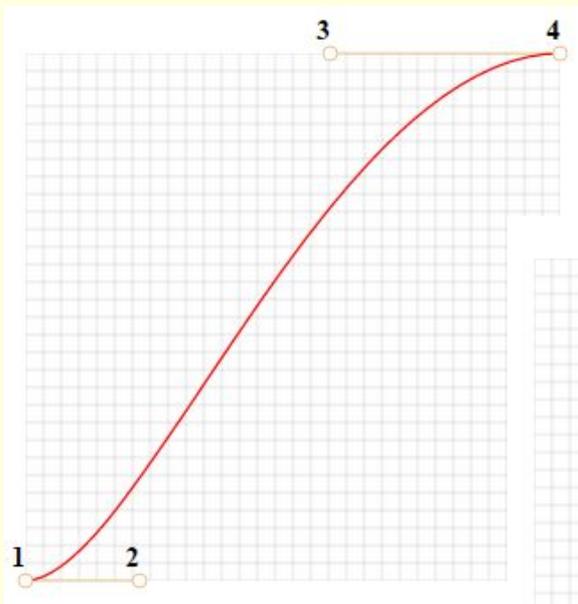
Кривые и поверхности Безье

1. Точки не всегда на кривой.
2. Степень кривой равна числу точек минус один.
3. Кривая всегда находится внутри выпуклой оболочки, образованной опорными точками:



Благодаря (3) в компьютерной графике можно оптимизировать проверку пересечений двух кривых – если их выпуклые оболочки не пересекаются, то и кривые тоже не пересекутся.

Кривые и поверхности Безье



Кривые и поверхности Безье

Координаты кривой описываются в зависимости от параметра $t \in [0,1]$

Для двух точек:

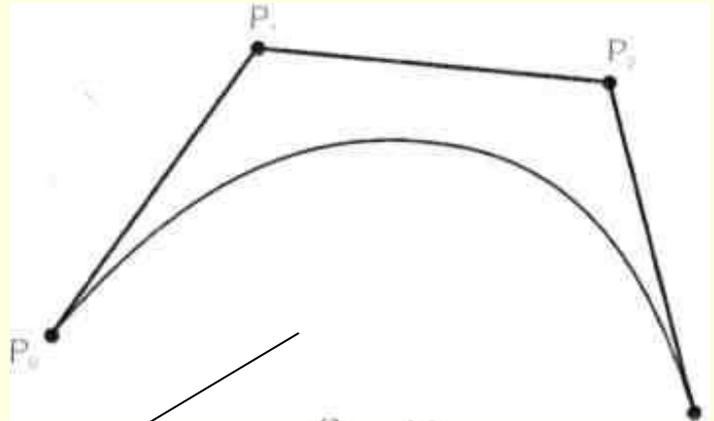
$$P = (1-t)P_1 + tP_2$$

■ Для трёх точек:

$$P = (1-t)^2P_1 + 2(1-t)tP_2 + t^2P_3$$

■ Для четырёх точек:

$$P = (1-t)^3P_1 + 3(1-t)^2tP_2 + 3(1-t)t^2P_3 + t^3P_4$$



Кривые и поверхности Безье

Вместо P_i подставляют координаты i -й опорной точки (x_i, y_i) . Эти уравнения векторные, то есть для каждой из координат:

$$\begin{aligned}x &= (1-t)^2x_1 + 2(1-t)tx_2 + t^2x_3 \\y &= (1-t)^2y_1 + 2(1-t)ty_2 + t^2y_3\end{aligned}$$

Вместо $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ подставляются координаты трёх опорных точек. В то время как t пробегает множество от 0 до 1, соответствующие значения (x, y) образуют кривую.

Кривые и поверхности Безье

Кривая Безье определяется вершинами многогранника, который единственным образом задает форму кривой. Кривой принадлежат первая и последняя вершины, другие вершины характеризуют производные, порядок и вид кривой.

Параметрическое представление кривой Безье:

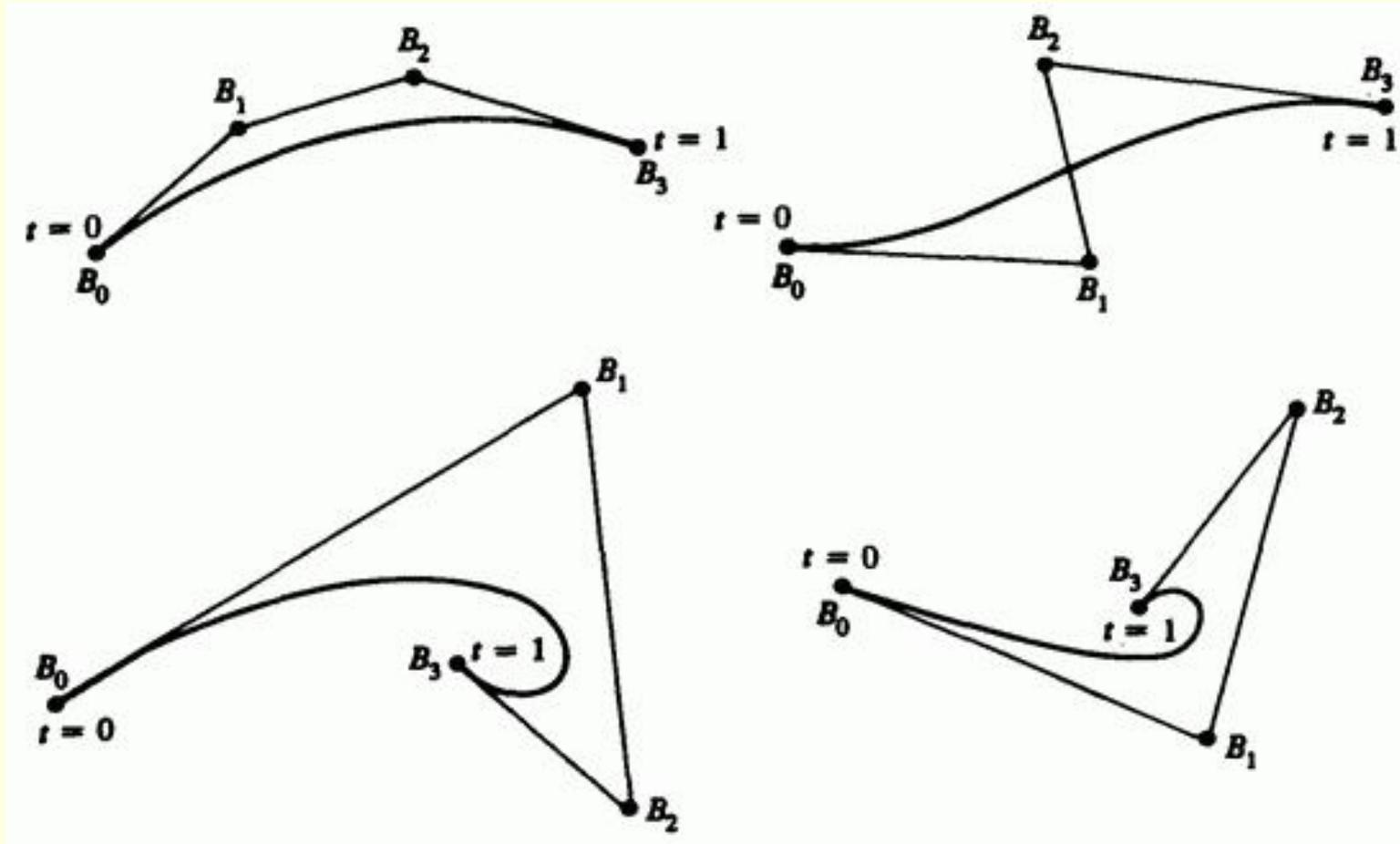
$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \quad ,$$

где базис Безье-Бернштейна, или функция аппроксимации

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad , \quad \text{где} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$J_{n,i}(t)$ - это i -я функция базиса Бернштейна порядка n .

Кривые и поверхности Безье



Кривые и поверхности Безье

Пусть заданы вершины многоугольника
Безье $B_0[1, 1]$, $B_1[2, 3]$, $B_2[4, 3]$, $B_4[3, 1]$.
Найти семь точек, лежащих на кривой Безье.
Рассмотрим уравнения (5-62) - (5-64):

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t),$$

где

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

и

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Кривые и поверхности Безье

В нашем случае $n=3$, так как имеется четыре вершины.

Отсюда
$$\binom{n}{i} = \binom{3}{i} = \frac{6}{i!(3-i)!}$$

и
$$J_{3,0}(t) = (1)t^0(1-t)^3 = (1-t)^3,$$

$$J_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2,$$

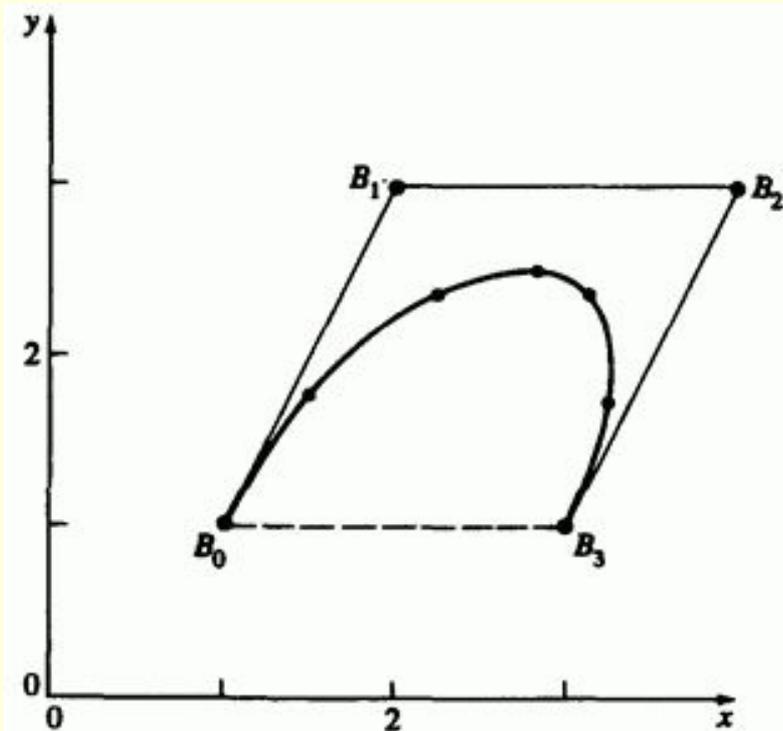
$$J_{3,2}(t) = 3t^2(1-t),$$

$$J_{3,3}(t) = t^3.$$

Кривые и поверхности Безье

Итак,
$$P(t) = B_0 J_{3,0} + B_1 J_{3,1} + B_2 J_{3,2} + B_3 J_{3,3} =$$
$$= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

Коэффициенты для кривой Безье
для различных значений t



| t | $J_{3,0}$ | $J_{3,1}$ | $J_{3,2}$ | $J_{3,3}$ |
|------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0.15 | 0.614 | 0.325 | 0.058 | 0.003 |
| 0.35 | 0.275 | 0.444 | 0.239 | 0.042 |
| 0.5 | 0.125 | 0.375 | 0.375 | 0.125 |
| 0.65 | 0.042 | 0.239 | 0.444 | 0.275 |
| 0.85 | 0.003 | 0.058 | 0.325 | 0.614 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Кривые и поверхности Безье

Точки на кривой:

$$P(0) = B_0 = [1 \quad 1]$$

$$P(0.15) = 0.614B_0 + 0.325B_1 + 0.058B_2 + 0.003B_3 = [1.5 \quad 1.765]$$

$$P(0.35) = 0.275B_0 + 0.444B_1 + 0.239B_2 + 0.042B_3 = [2.248 \quad 2.367]$$

$$P(0.5) = 0.125B_0 + 0.375B_1 + 0.375B_2 + 0.125B_3 = [2.75 \quad 2.5]$$

$$P(0.65) = 0.042B_0 + 0.239B_1 + 0.444B_2 + 0.275B_3 = [3.122 \quad 2.367]$$

$$P(0.85) = 0.003B_0 + 0.058B_1 + 0.325B_2 + 0.614B_3 = [3.248 \quad 1.765]$$

$$P(1) = B_3 = [3 \quad 1]$$

Кривые и поверхности Безье

Применение:

- В компьютерной графике, моделировании, в графических редакторах;
- Шрифты описываются с помощью кривых Безье;
- В веб-разработке – для графики на Canvas (создание растрового двухмерного изображения при помощи скриптов) или в формате SVG (обеспечения векторной графической поддержки для Web-браузеров);
- В CSS-анимации, для задания траектории или скорости передвижения.

CSS - Cascading Style Sheets (каскадные таблицы стилей) – это язык описания внешнего вида веб-страницы .



Кривые и поверхности Безье

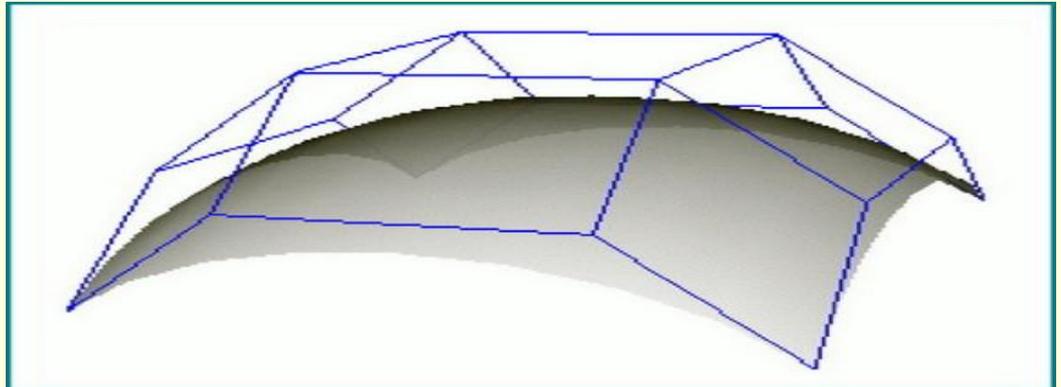
Недостатки кривых:

1. С помощью кривых Безье нельзя точно представить конические сечения;
2. Алгебраическая степень кривых растет вместе с числом контрольных точек, что весьма затрудняет численные расчеты..

Кривые и поверхности Безье

Алгоритм перехода от кривых к поверхностям Безье (1-й способ)

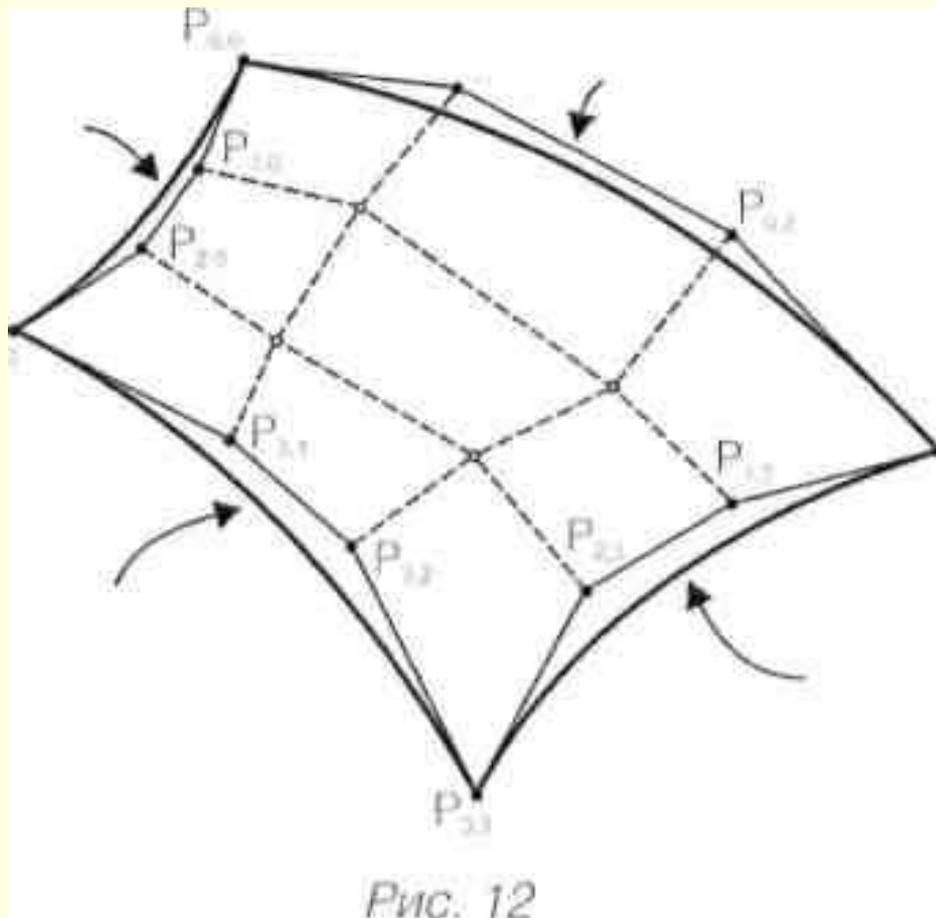
1. Вводятся образующие кривые Безье, имеющие одинаковую параметризацию.
2. При каждом значении параметра по точкам на этих кривых в свою очередь строится кривая Безье.
3. Перемещаясь по образующим кривым, получаем поверхность, которая называется поверхностью Безье на четырёхугольнике.
4. Областью задания параметров такой поверхности является прямоугольник.



Кривые и поверхности Безье

Кривая

Кривая Безье



Кривая
Безье

Кривая Безье

Кривые и поверхности Безье

Естественное обобщение полиномов Бернштейна на случай двух переменных (второй способ)

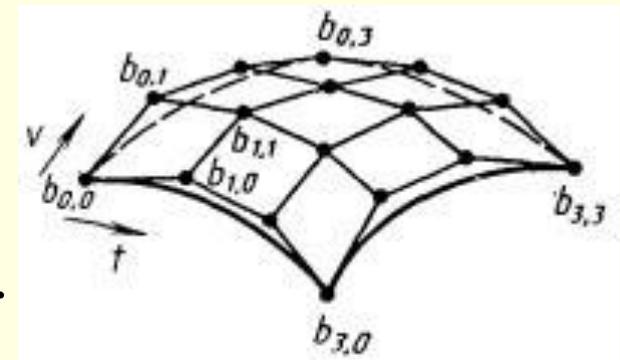
Используются сегменты Безье, определяемые с помощью произведения полиномов Бернштейна

$$x(u, v) = \sum_i \sum_k b_{i,k} B_k^m(S) B_i^n(t).$$

где $u = u_0(1 - t) + u_1 t$ и $v = v_0(1 - S) + v_1 S$; $S, t \in [0, 1]$

Большие куски поверхностей можно получать из сегментов Безье.

Поверхность, которая задается таким полиномом, называется **поверхностью Безье на треугольнике**.



Кривые и поверхности Безье

Как бороться с алгебраической степенью сложной кривой?

Способ известен давно – достаточно построить кривую, состоящую из гладко сопряженных сегментов, каждый из которых имеет ограниченную алгебраическую степень.

Такие кривые называются *сплайнами* (Исаак Шёнберг, 1946).

Карл де Бур - “On calculating with B-Splines” (1972), “The numerical evaluation of B-Splines” (1972) - установлена связь между геометрической формой составной кривой и алгебраическим способом ее задания.

Кривые и поверхности Безье

Однородные В-сплайны (Basic spline) являются обобщением кривых Безье. Уравнение В-сплайна степени $k - 1$, определяемого $n + 1$ точками, имеет вид, аналогичный кривой Безье:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) P_i, \quad 0 \leq t \leq n - k + 2,$$

где сопрягающие функции $N_{i,k}$ не являются многочленами Бернштейна, а определяются следующим рекурсивным образом:

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - t_i) N_{i,k-1}}{t_{i+k-1} - t_i} + \frac{(t_{i+k} - t) N_{i+1,k-1}}{t_{i+k} - t_{i+1}}$$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t \leq t_{i+1}, \\ 0. & \end{cases}$$

Рациональные кривые и поверхности

Недостаток кривых Безье и В-сплайнов: с их помощью нельзя точно аппроксимировать конические сечения

Рациональная кривая Безье:

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n h_i B_{i,n}(t) P_i}{\sum_{i=0}^n h_i B_{i,n}(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

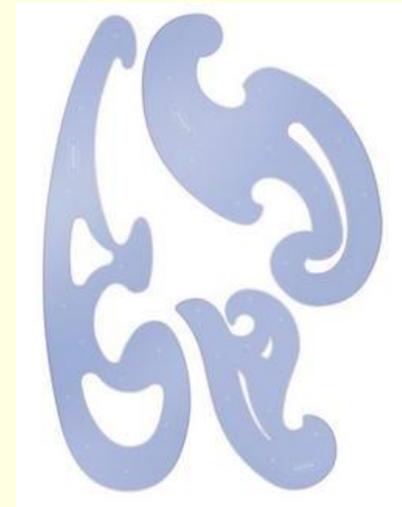
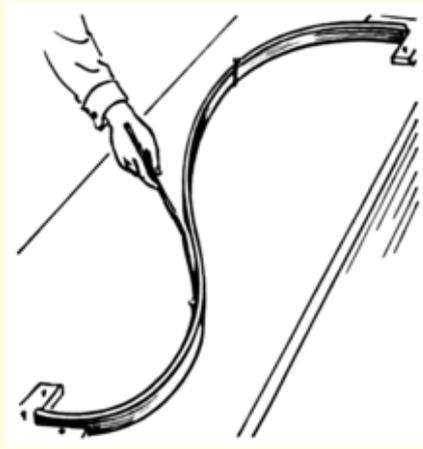
$h_i=0, \quad 0 \leq i \leq n$ - обычная поверхность Безье,

$h_0=h_1=1, \quad h_2=\cos\theta$ - дуга окружности

Кен Версприл (1975) - NURBS (non-uniform rational B-spline) – *неоднородные рациональные В-сплайны.*

Сплайн-интерполяция

Сплайн (от англ. *spline*, от *flatspline* — гибкое лекало, гибкая плазовая рейка — полоса металла, используемая для черчения кривых линий) — функция, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых **сплайн** совпадает с некоторым алгебраическим многочленом.



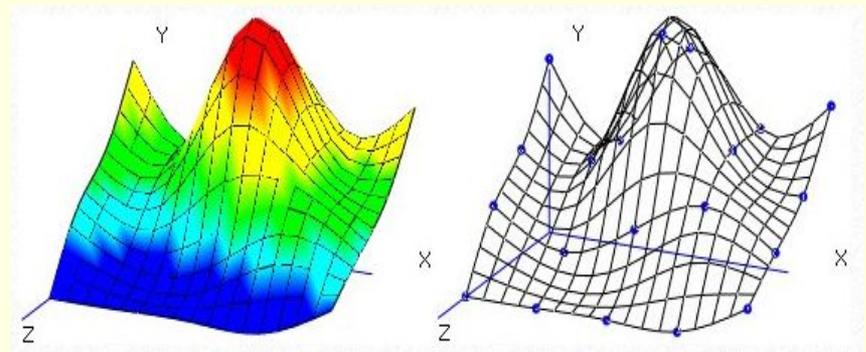
Универсальный математический аппарат для описания, хранения, преобразования, анализа и представления.

Сплайн-интерполяция

Сплайны представляют собой сегменты Эрмитовых кривых или В-сплайновых кривых третьей степени, гладко совмещенных друг с другом (G^2) и проходящих через задающие их точки.



Сплайновые поверхности состоят из гладко сопрягающихся бикубических лоскутов или В-сплайновых поверхностей.

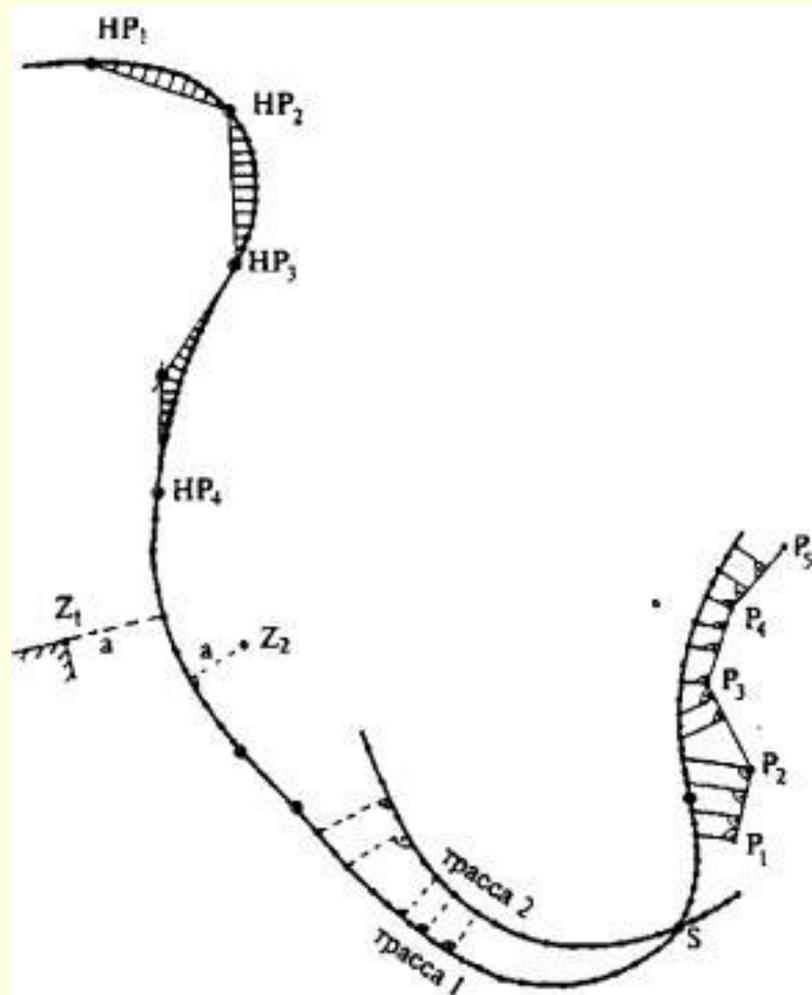
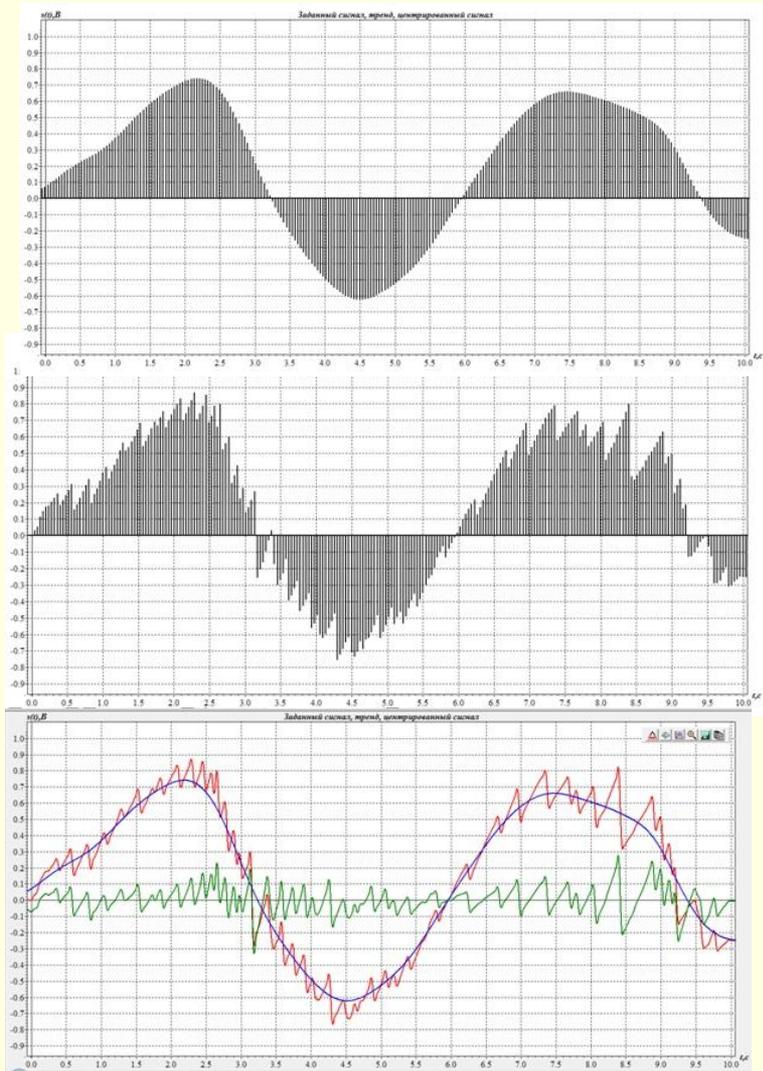


Сплайн-интерполяция

Применение:

- в системах автоматизированного проектирования для задания линий и поверхностей;
- в задачах перекодировки звукового сигнала;
- в описании законов движения;
- в задачах прогнозирования;
- проектирование автомобильных дорог (сплайн-трассирование) и т.д.

Сплайн-интерполяция



Слайн-интерполяция

