

Лекция 4-5

**Инженерные кривые и поверхности**

*Чтобы выполнить большой и важный труд, необходимы  
две вещи: ясный план и ограниченное время.*

Элберт Хаббард

# Литература

---

- Курс высшей математики: Смирнов В.И. , 1-й т., М., Наука, 1974. – 480с.
- Курс высшей математики, Смирнов В.И., 2-й т., М., Наука, 1974. – 656с.
- Введение в математические основы САПР: Д. М. Ушаков — Санкт-Петербург, ДМК Пресс, 2012 г.- 208 с.
- Введение в современные САПР: Владимир Малюх — Москва, ДМК Пресс, 2014 г.- 192 с.
- Любые книги по Solid Works

# План

---

1. Кусочные кривые и их гладкость .
2. Билинейный лоскут.
3. Поверхности сдвига и вращения.
4. Линейчатая поверхность.
5. Лоскут Кунса.
6. Эрмитова кривая.
7. Бикубическая поверхность.
8. Кривые и поверхности Безье.
9. Сплайн-интерполяция.
10. Рациональные кривые и поверхности
  
11. **Граничные модели. Корректность граничных моделей**
12. **Пакеты геометрического моделирования**

# Кусочные кривые и их гладкость

$C^n$  - непрерывность кривых и поверхностей - непрерывность  $k$ -х производных их параметрических уравнений  $\forall 0 \leq k \leq n$ .

Кривые состояются из криволинейных сегментов

Поверхности - из лоскутов разной параметризации.

$G^n$  - непрерывность – непрерывность направления (единичного вектора)  $k$ -й производной параметрического уравнения  $\forall 0 \leq k \leq n$

Пример. Для сходимости итерационных методов второго порядка (например, метода Ньютона-Рафсона) необходимо, чтобы рассматриваемые кривые и поверхности имели  $G^2$  - непрерывность.

# Кусочные кривые и их гладкость

Уравнения кривых и поверхностей записываются в некоей удобной системе координат.

Для преобразования в глобальную систему координат используются аффинные трансформации.

*Аффинное пространство:*

- задается двумя непересекающимися множествами - точками и векторами;
- задается операцией откладывания точки от другой точки с помощью вектора;
- задается обратной операцией вычисления вектора, соединяющего две точки.
- множество векторов должно образовывать евклидово пространство (линейное пространство со скалярным произведением).

# Кусочные кривые и их гладкость

---

В случае САПР:

- трехмерное аффинное пространство;
- определено векторное произведение;
- точки и векторы в этом пространстве могут задаваться тройками вещественных чисел.

## Соглашение о нотации

Точки:  $\mathbf{P}, \mathbf{\Omega}, \dots$

Векторы:  $\mathbf{e}, \mathbf{\theta}, \dots$

Скалярные величины:  $x, \alpha, \dots$

Скалярное произведение:  $(u, v)$

Векторное произведение:  $u \wedge v$

# Билинейный лоскут

*Лоскут* - конечная поверхность, представленная в виде области отображения прямоугольника в параметрическом Пространстве  $P(u, v)$ ,  $u_0 \leq u \leq u_1$ ,  $v_0 \leq v \leq v_1$  (зачастую  $u_0 = v_0 = 0$ ,  $u_1 = v_1 = 1$ )

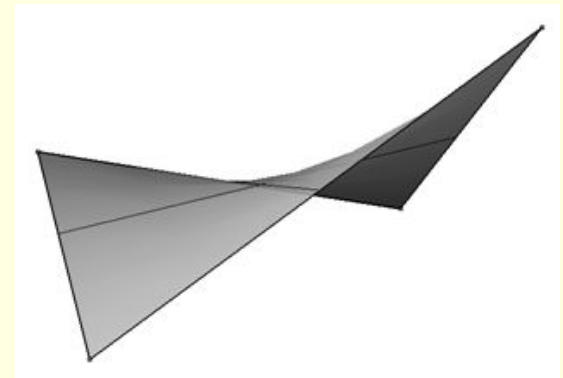
Простейший лоскут – билинейная поверхность, задаваемая четырьмя граничными вершинами:

$$P(0,0) = P_{00}, \quad P(0,1) = P_{01}$$

$$P(1,0) = P_{10}, \quad P(1,1) = P_{11}.$$

Уравнение билинейного лоскута:

$$P(u,v) = (1-u)(1-v)P_{00} + (1-u)vP_{01} + u(1-v)P_{10} + uvP_{11}.$$



# Поверхности сдвига и вращения

**Поверхность сдвига** (*swept surface*)

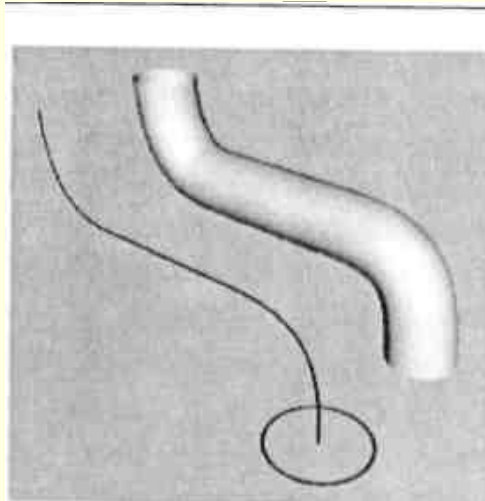
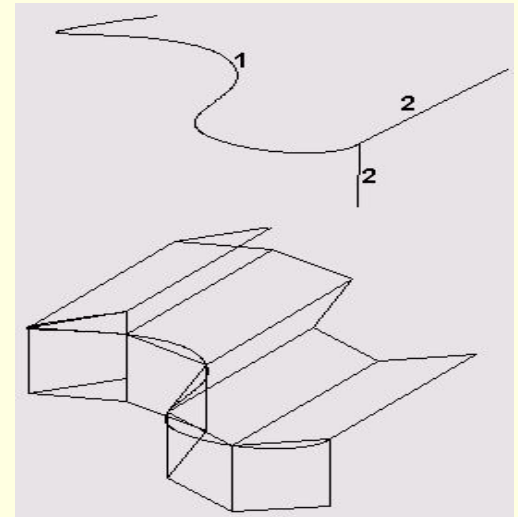
задается точками заданной кривой

$P(t)=(x(t), y(t), z(t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , при ее

движении в заданном направлении

$e=(e_x, e_y, e_z)$ . Параметризация

поверхности сдвига:  $P(u,v)=P(u) + ve$ .



Поверхность вращения описывается

заданной кривой ( $P_1(t)$ )

и кривой ( $P_2(t)$ ).

Уравнение поверхности:

$$P(u,v)=P_1(u) + P_2(v) - P_2(0),$$

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

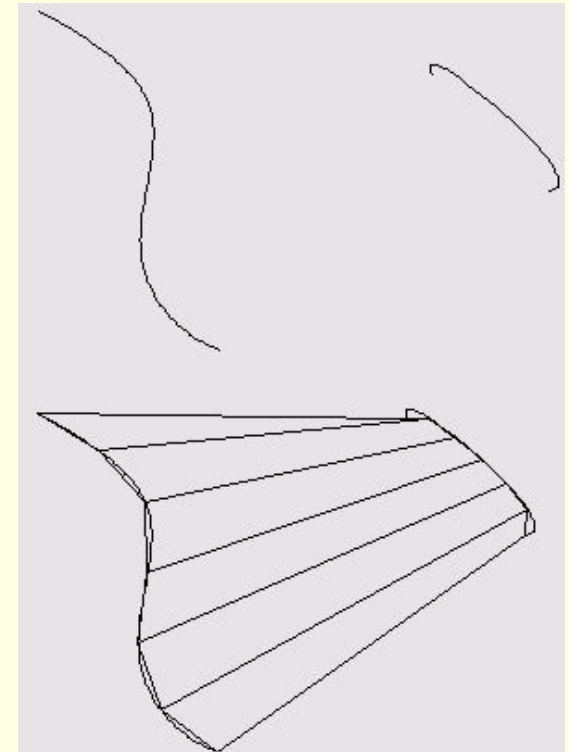
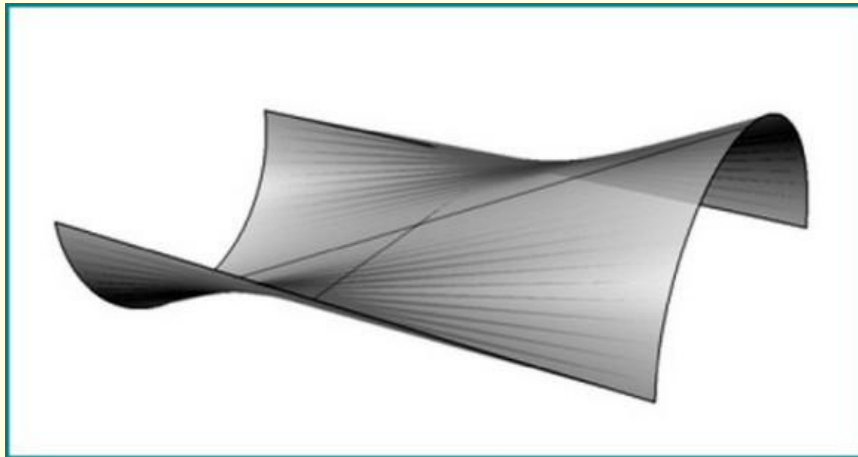
вдоль  
Уравнение



# Линейчатая поверхность

*Линейчатая поверхность (ruled surface)* - способ задания поверхности по двум кривым  $P_1(t)$  и  $P_2(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$   
Параметрическое уравнение линейчатой поверхности:

$$P(u, v) = uP_1(v) + (1-u)P_2(v),$$
$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$



# Лоскут Кунса

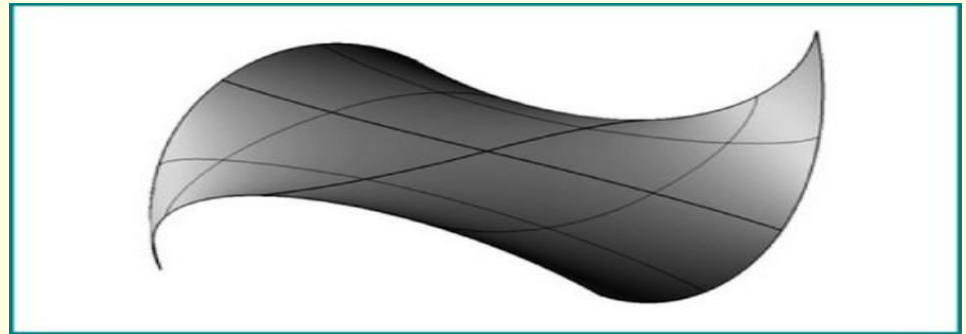
*Лоскут Кунса (Coons' patch)* - обобщение поверхности сдвига и линейчатой поверхности. Задается четырьмя *граничными кривыми*  $P_0(t)$ ,  $P_1(t)$ ,  $Q_0(t)$ ,  $Q_1(t)$ , образующими замкнутый контур в трехмерном пространстве:

$$P_0(0) = Q_0(0) = P_{0,0},$$

$$P_0(1) = Q_1(0) = P_{0,1},$$

$$P_1(0) = Q_0(1) = P_{1,0},$$

$$P_1(1) = Q_1(1) = P_{1,1}.$$



Параметрическое уравнение лоскута Кунса:

$$P(u,v) = (1-u)P_0(v) + uP_1(v) + (1-v)Q_0(u) + vQ_1(u) - (1-u)(1-v)P_{0,0} - u(1-v)P_{1,0} - (1-u)vP_{0,1} - uvP_{1,1}$$

Замечание: лоскут Кунса позволяет контролировать форму поверхности на ее границах, но не между ними

# Эрмитова кривая

Кубическая кривая - основной примитив при работе в САПР.

*Эрмитова кривая* - геометрический способ задания

Кубической кривой: с помощью концевых точек и касательных векторов в них.

Уравнение Эрмитовой кривой:

$$P(t) = (1 - 3t^2 + 2t^3)P_0 + (3t^2 - 2t^3)P_1 + (t - 2t^2 + t^3)P_0' + (-t^2 + t^3)P_1'$$

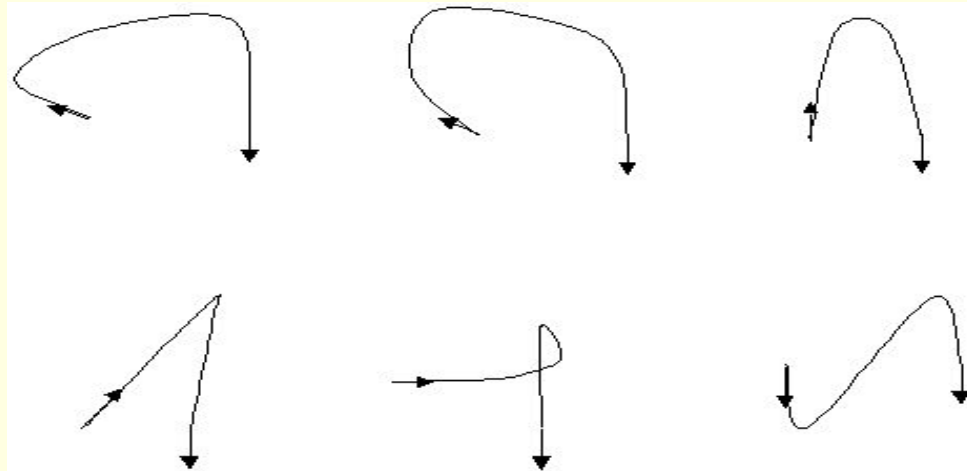
при этом

$$P(0) = P_0,$$

$$P(1) = P_1,$$

$$P'(0) = P_0',$$

$$P'(1) = P_1',$$



# Бикубическая поверхность

**Бикубическая поверхность (bicubic surface)** задается алгебраически с помощью 48 (!) коэффициентов.

Для задания БП необходимы:

1. Четыре граничные точки  $P_{00}$ ,  $P_{01}$ ,  $P_{10}$ ,  $P_{11}$ .
2. Восемь касательных векторов в этих точках.
3. Четыре вектора кручения.

БП - обладающая кубической кривизной как в направлении  $M$ , так и в направлении  $N$  поверхность, «натянутая» на четыре пространственные кривые

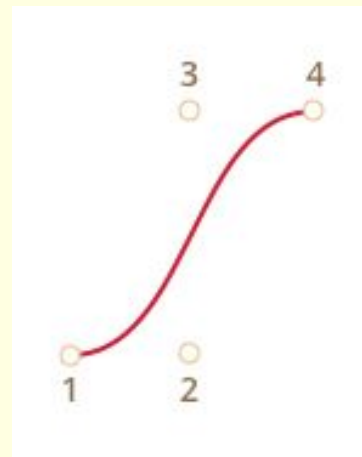
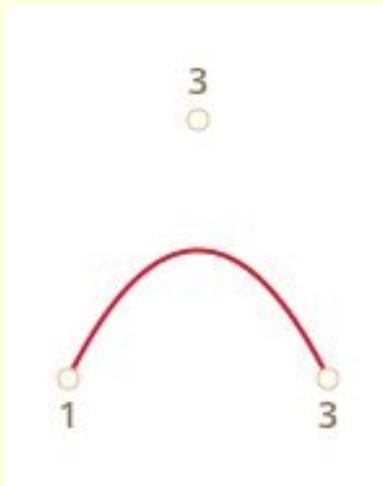
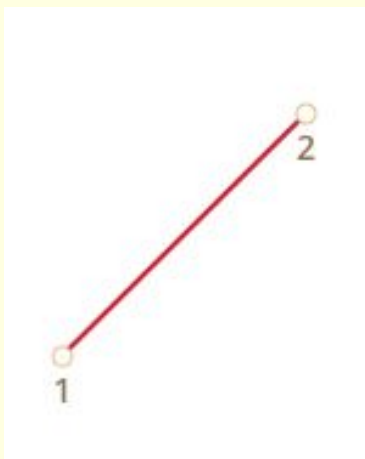


# Кривые и поверхности Безье

Недостаток Эрмитовой кривой: можно определить поведение кривой только в граничных точках.

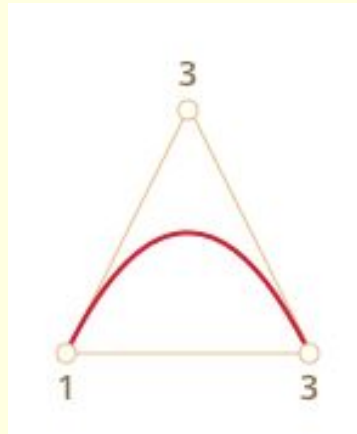
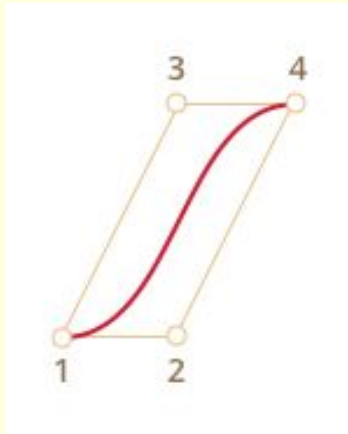
**Кривая Безье** - конструктивно задаваемая кривая, форму которой можно контролировать в промежуточных, так называемых контрольных, точках.

Кривая Безье задаётся опорными точками.



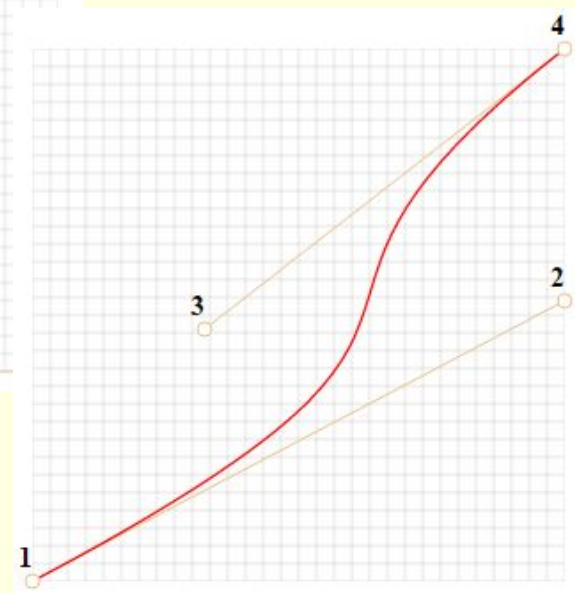
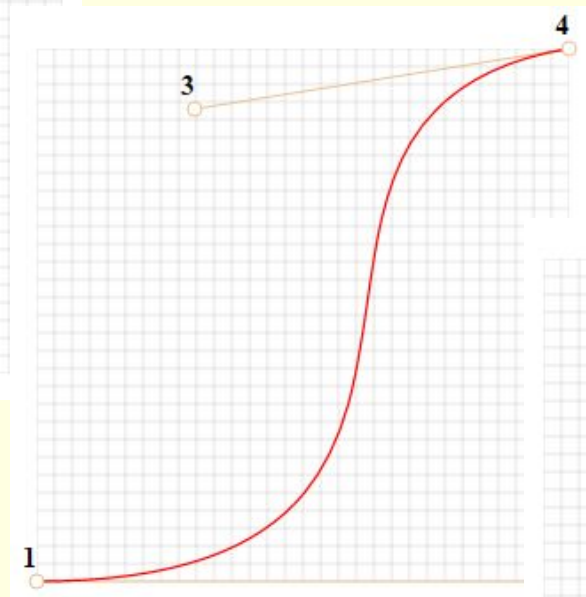
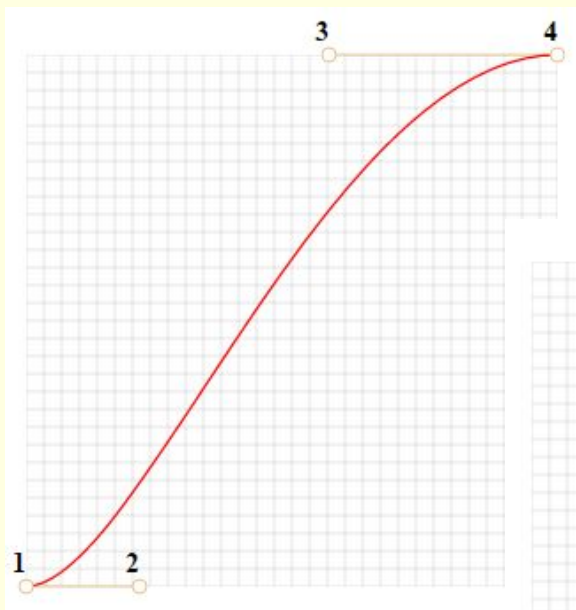
# Кривые и поверхности Безье

1. Точки не всегда на кривой.
2. Степень кривой равна числу точек минус один.
3. Кривая всегда находится внутри выпуклой оболочки, образованной опорными точками:



Благодаря (3) в компьютерной графике можно оптимизировать проверку пересечений двух кривых – если их выпуклые оболочки не пересекаются, то и кривые тоже не пересекутся.

# Кривые и поверхности Безье



# Кривые и поверхности Безье

Координаты кривой описываются в зависимости от параметра  $t \in [0,1]$

Для двух точек:

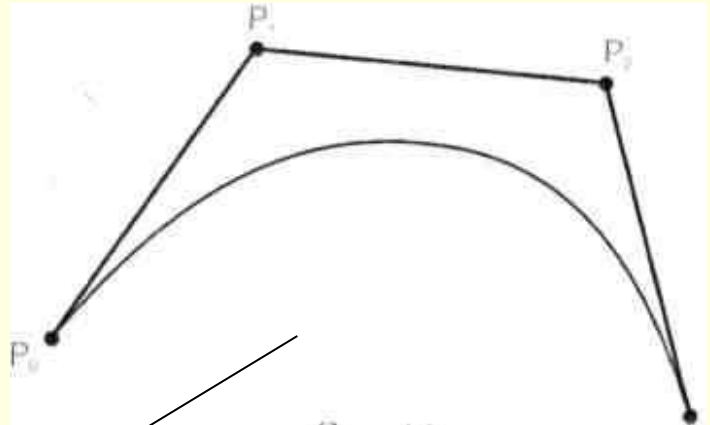
$$P = (1-t)P_1 + tP_2$$

■ Для трёх точек:

$$P = (1-t)^2P_1 + 2(1-t)tP_2 + t^2P_3$$

■ Для четырёх точек:

$$P = (1-t)^3P_1 + 3(1-t)^2tP_2 + 3(1-t)t^2P_3 + t^3P_4$$





# Кривые и поверхности Безье

Вместо  $P_i$  подставляют координаты  $i$ -й опорной точки  $(x_i, y_i)$ . Эти уравнения векторные, то есть для каждой из координат:

$$\begin{aligned}x &= (1-t)^2x_1 + 2(1-t)tx_2 + t^2x_3 \\y &= (1-t)^2y_1 + 2(1-t)ty_2 + t^2y_3\end{aligned}$$

Вместо  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  подставляются координаты трёх опорных точек. В то время как  $t$  пробегает множество от 0 до 1, соответствующие значения  $(x, y)$  образуют кривую.

# Кривые и поверхности Безье

*Кривая Безье* определяется вершинами многогранника, который единственным образом задает форму кривой. Кривой принадлежат первая и последняя вершины, другие вершины характеризуют производные, порядок и вид кривой.

Параметрическое представление кривой Безье:

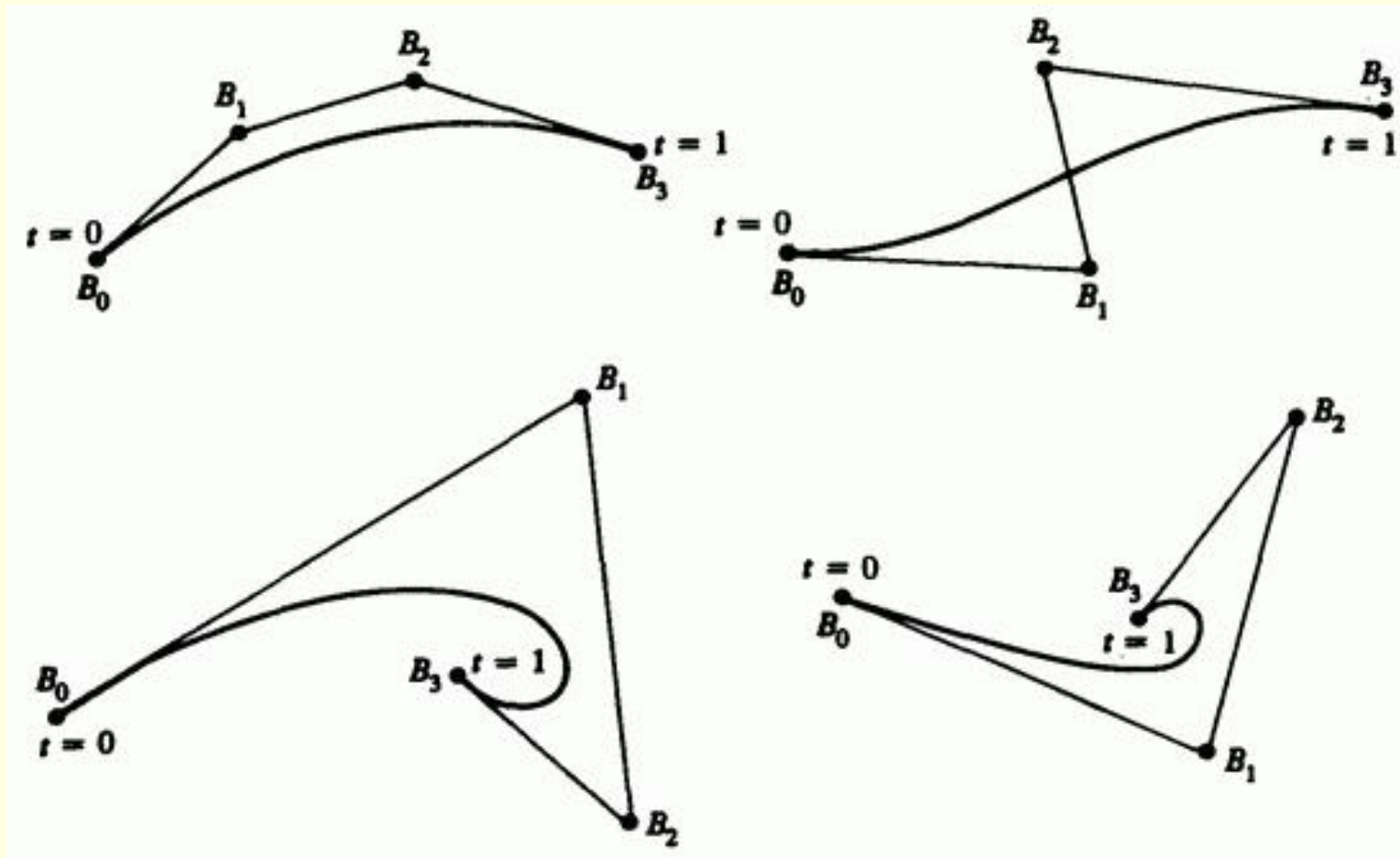
$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \quad ,$$

где базис Безье-Бернштейна, или функция аппроксимации

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad , \quad \text{где} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$J_{n,i}(t)$  - это  $i$ -я функция базиса Бернштейна порядка  $n$ .

# Кривые и поверхности Безье



# Кривые и поверхности Безье

Пусть заданы вершины многоугольника  
Безье  $B_0[1, 1]$ ,  $B_1[2, 3]$ ,  $B_2[4, 3]$ ,  $B_4[3, 1]$ .  
Найти семь точек, лежащих на кривой Безье.  
Рассмотрим уравнения (5-62) - (5-64):

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t),$$

где

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

и

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

# Кривые и поверхности Безье

В нашем случае  $n=3$ , так как имеется четыре вершины.

Отсюда 
$$\binom{n}{i} = \binom{3}{i} = \frac{6}{i!(3-i)!}$$

и 
$$J_{3,0}(t) = (1)t^0(1-t)^3 = (1-t)^3,$$

$$J_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2,$$

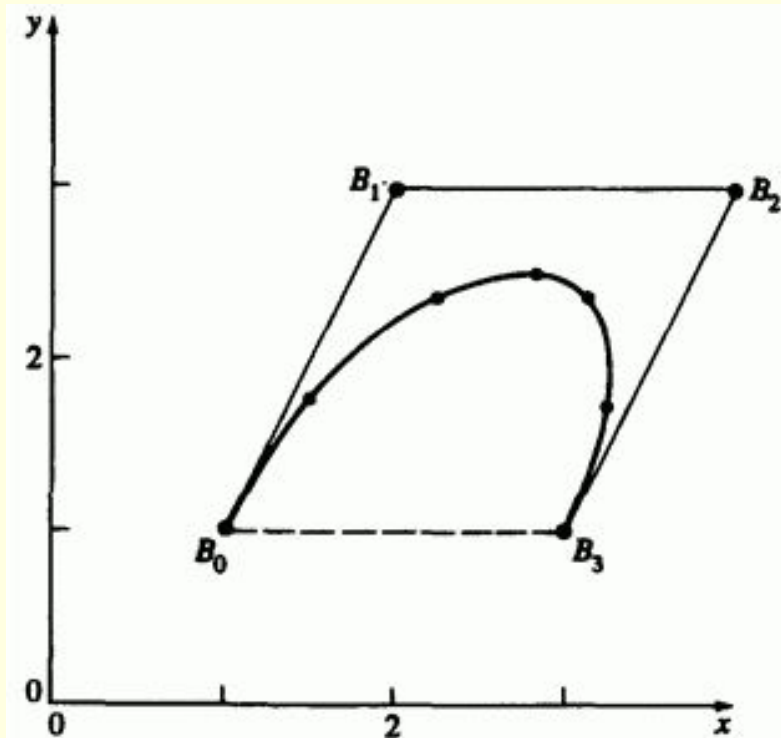
$$J_{3,2}(t) = 3t^2(1-t),$$

$$J_{3,3}(t) = t^3.$$

# Кривые и поверхности Безье

Итак, 
$$P(t) = B_0 J_{3,0} + B_1 J_{3,1} + B_2 J_{3,2} + B_3 J_{3,3} =$$
$$= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

Коэффициенты для кривой Безье  
для различных значений  $t$



$t$	$J_{3,0}$	$J_{3,1}$	$J_{3,2}$	$J_{3,3}$
0	1	0	0	0
0.15	0.614	0.325	0.058	0.003
0.35	0.275	0.444	0.239	0.042
0.5	0.125	0.375	0.375	0.125
0.65	0.042	0.239	0.444	0.275
0.85	0.003	0.058	0.325	0.614
1	0	0	0	1

# Кривые и поверхности Безье

Точки на кривой:

$$P(0) = B_0 = [1 \quad 1]$$

$$P(0.15) = 0.614B_0 + 0.325B_1 + 0.058B_2 + 0.003B_3 = [1.5 \quad 1.765]$$

$$P(0.35) = 0.275B_0 + 0.444B_1 + 0.239B_2 + 0.042B_3 = [2.248 \quad 2.367]$$

$$P(0.5) = 0.125B_0 + 0.375B_1 + 0.375B_2 + 0.125B_3 = [2.75 \quad 2.5]$$

$$P(0.65) = 0.042B_0 + 0.239B_1 + 0.444B_2 + 0.275B_3 = [3.122 \quad 2.367]$$

$$P(0.85) = 0.003B_0 + 0.058B_1 + 0.325B_2 + 0.614B_3 = [3.248 \quad 1.765]$$

$$P(1) = B_3 = [3 \quad 1]$$

# Кривые и поверхности Безье

## Применение:

- В компьютерной графике, моделировании, в графических редакторах;
- Шрифты описываются с помощью кривых Безье;
- В веб-разработке – для графики на Canvas (создание растрового двухмерного изображения при помощи скриптов ) или в формате SVG (обеспечения векторной графической поддержки для Web-браузеров );
- В CSS-анимации, для задания траектории или скорости передвижения.

CSS - Cascading Style Sheets (каскадные таблицы стилей) – это язык описания внешнего вида веб-страницы .





# Кривые и поверхности Безье

---

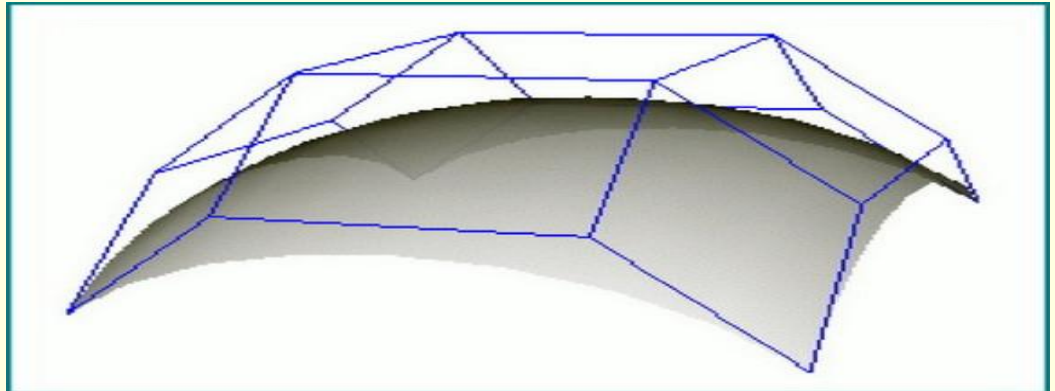
## Недостатки кривых:

1. С помощью кривых Безье нельзя точно представить конические сечения;
2. Алгебраическая степень кривых растет вместе с числом контрольных точек, что весьма затрудняет численные расчеты..

# Кривые и поверхности Безье

## Алгоритм перехода от кривых к поверхностям Безье (1-й способ)

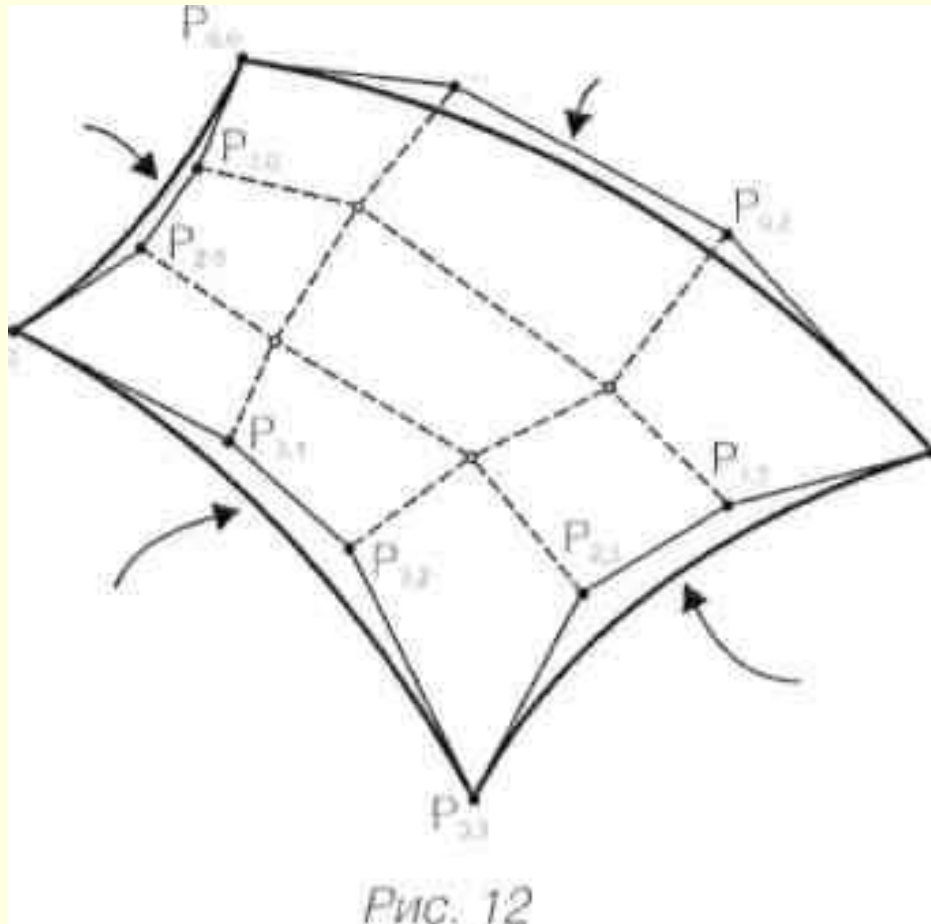
1. Вводятся образующие кривые Безье, имеющие одинаковую параметризацию.
2. При каждом значении параметра по точкам на этих кривых в свою очередь строится кривая Безье.
3. Перемещаясь по образующим кривым, получаем поверхность, которая называется поверхностью Безье на четырёхугольнике.
4. Областью задания параметров такой поверхности является прямоугольник.



# Кривые и поверхности Безье

Кривая

Кривая Безье



Кривая  
Безье

Кривая Безье

# Кривые и поверхности Безье

Естественное обобщение полиномов Бернштейна на случай двух переменных (второй способ)

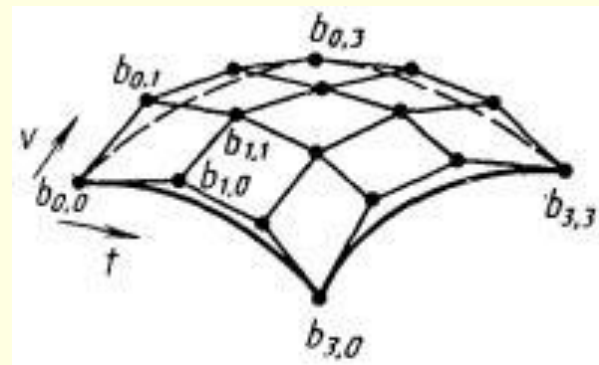
Используются сегменты Безье, определяемые с помощью произведения полиномов Бернштейна

$$x(u, v) = \sum_i \sum_k b_{i,k} B_k^m(S) B_i^n(t).$$

где  $u = u_0(1 - t) + u_1 t$  и  $v = v_0(1 - S) + v_1 S$ ;  $S, t \in [0, 1]$

Большие куски поверхностей можно получать из сегментов Безье.

Поверхность, которая задается таким полиномом, называется **поверхностью Безье на треугольнике**.



# Кривые и поверхности Безье

---

Как бороться с алгебраической степенью сложной кривой?

Способ известен давно – достаточно построить кривую, состоящую из гладко сопряженных сегментов, каждый из которых имеет ограниченную алгебраическую степень.

Такие кривые называются *сплайнами* (Исаак Шёнберг, 1946).

Карл де Бур - “On calculating with B-Splines” (1972), “The numerical evaluation of B-Splines” (1972) - установлена связь между геометрической формой составной кривой и алгебраическим способом ее задания.

# Кривые и поверхности Безье

Однородные В-сплайны (Basic spline) являются обобщением кривых Безье. Уравнение В-сплайна степени  $k - 1$ , определяемого  $n + 1$  точками, имеет вид, аналогичный кривой Безье:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) P_i, \quad 0 \leq t \leq n - k + 2,$$

где сопрягающие функции  $N_{i,k}$  не являются многочленами Бернштейна, а определяются следующим рекурсивным образом:

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - t_i) N_{i,k-1}}{t_{i+k-1} - t_i} + \frac{(t_{i+k} - t) N_{i+1,k-1}}{t_{i+k} - t_{i+1}}$$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t \leq t_{i+1}, \\ 0. & \end{cases}$$

# Рациональные кривые и поверхности

Недостаток кривых Безье и В-сплайнов: с их помощью нельзя точно аппроксимировать конические сечения

Рациональная кривая Безье:

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n h_i B_{i,n}(t) P_i}{\sum_{i=0}^n h_i B_{i,n}(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

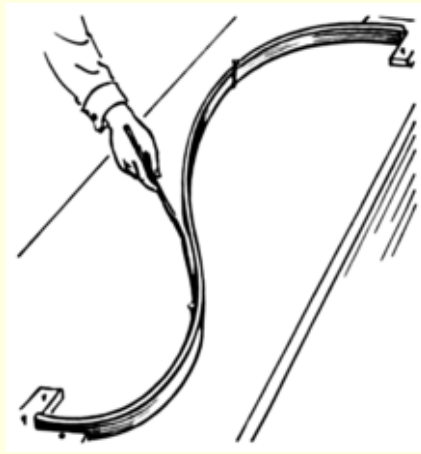
$h_i=0, \quad 0 \leq i \leq n$  - обычная поверхность Безье,

$h_0=h_1=1, \quad h_2=\cos\theta$  - дуга окружности

Кен Версприл (1975) - NURBS (non-uniform rational B-spline) – *неоднородные рациональные В-сплайны.*

# Сплайн-интерполяция

*Сплайн* (от англ. *spline*, от *flatspline* — гибкое лекало, гибкая плазовая рейка — полоса металла, используемая для черчения кривых линий) — функция, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых **сплайн** совпадает с некоторым алгебраическим многочленом.



Универсальный математический аппарат для описания, хранения, преобразования, анализа и представления.

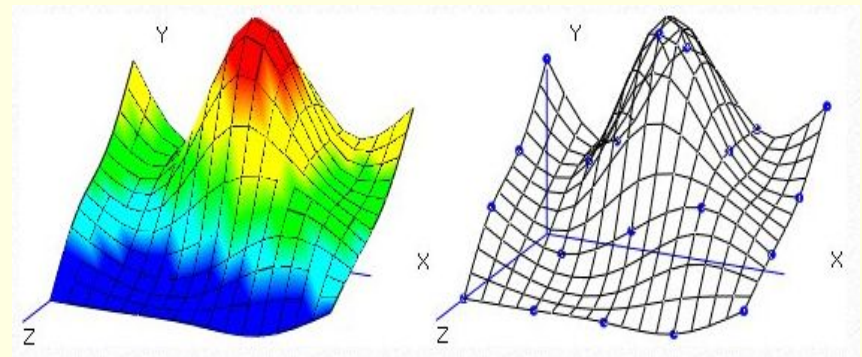


# Сплайн-интерполяция

*Сплайны* представляют собой сегменты Эрмитовых кривых или В-сплайновых кривых третьей степени, гладко совмещенных друг с другом ( $G^2$ ) и проходящих через задающие их точки.



*Сплайновые поверхности* состоят из гладко сопрягающихся бикубических лоскутов или В-сплайновых поверхностей.



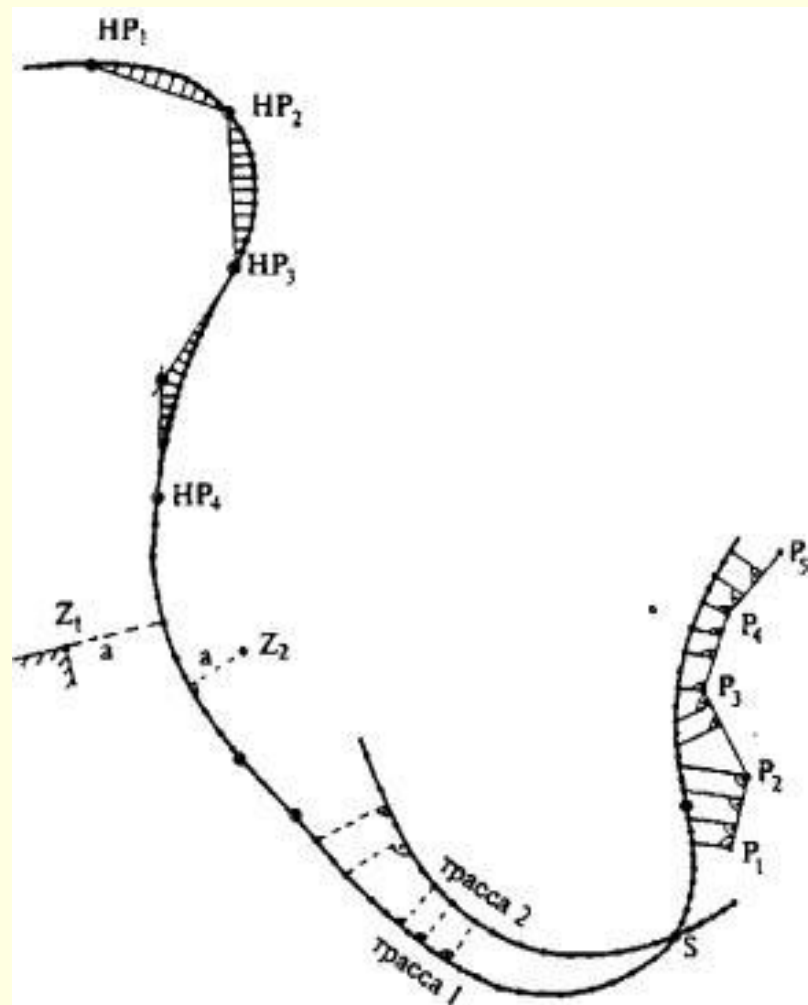
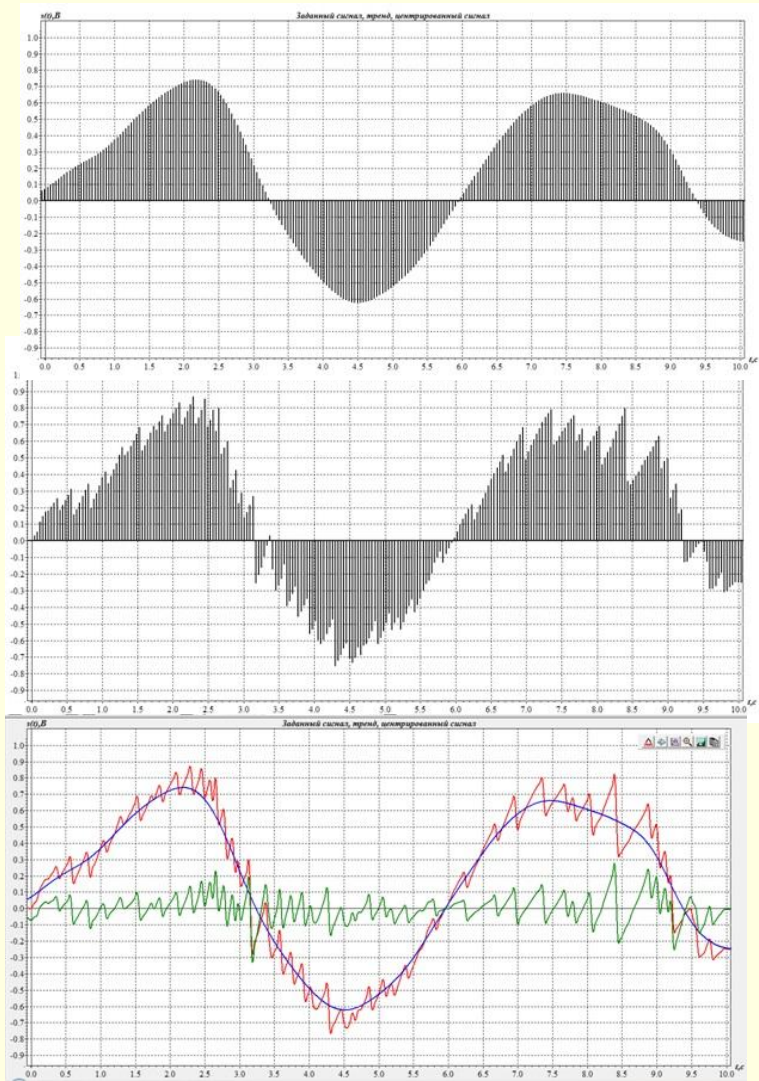
# Сплайн-интерполяция

---

## Применение:

- в системах автоматизированного проектирования для задания линий и поверхностей;
- в задачах перекодировки звукового сигнала;
- в описании законов движения;
- в задачах прогнозирования;
- проектирование автомобильных дорог (сплайн-трассирование) и т.д.

# Сплайн-интерполяция



# Слайн-интерполяция

