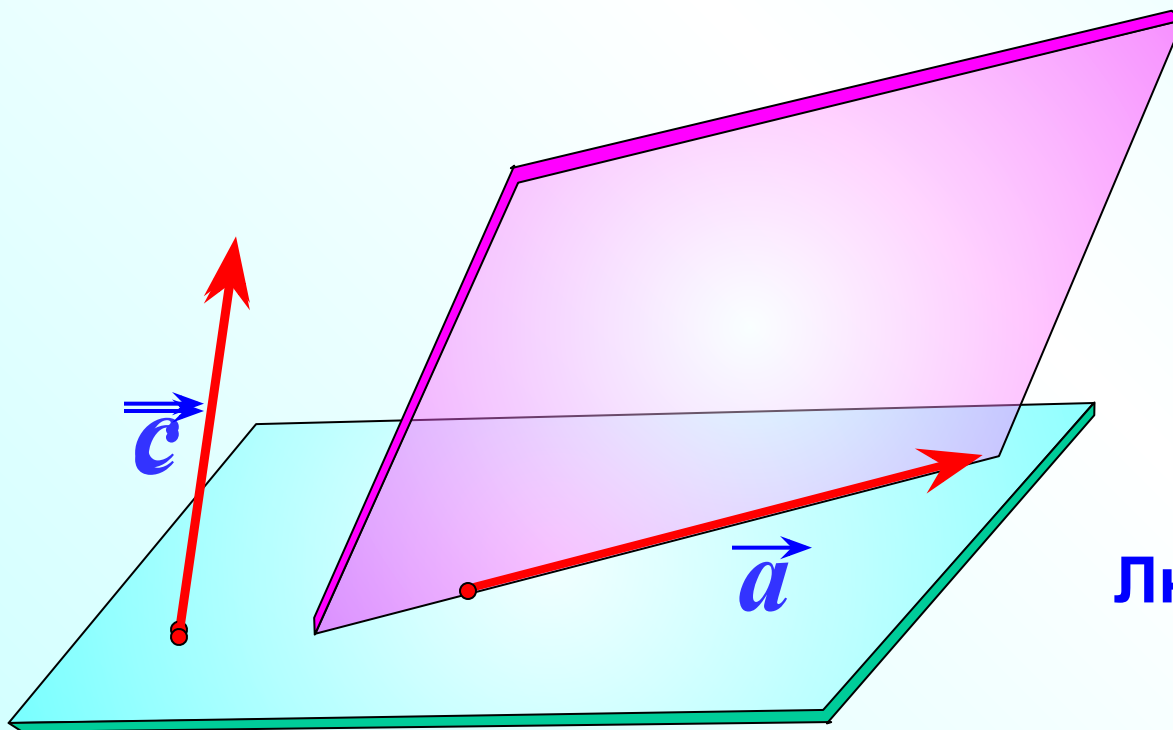


Компланарные векторы

Л.С. Атанасян "Геометрия 10-11"

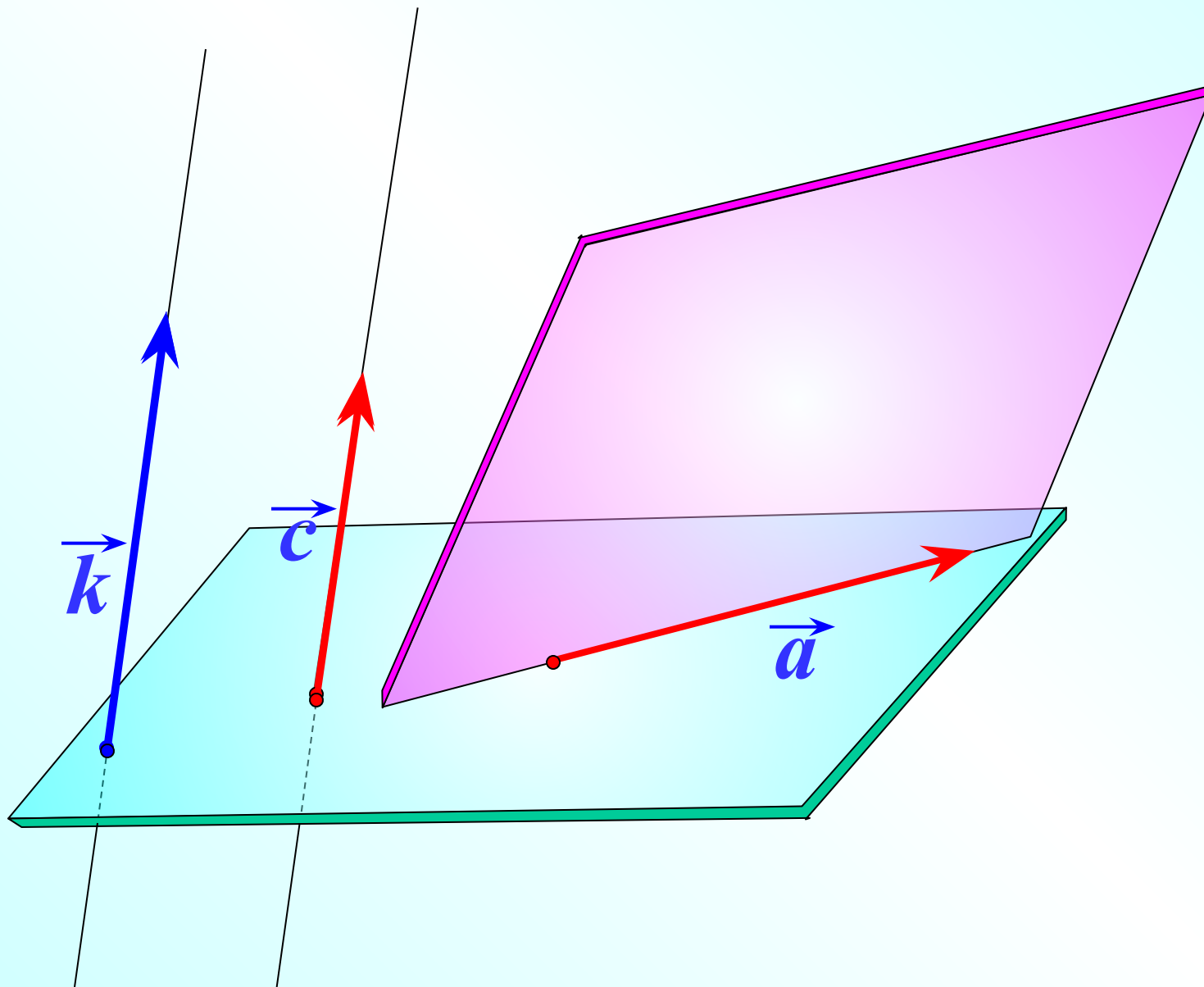
Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Другими словами, векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

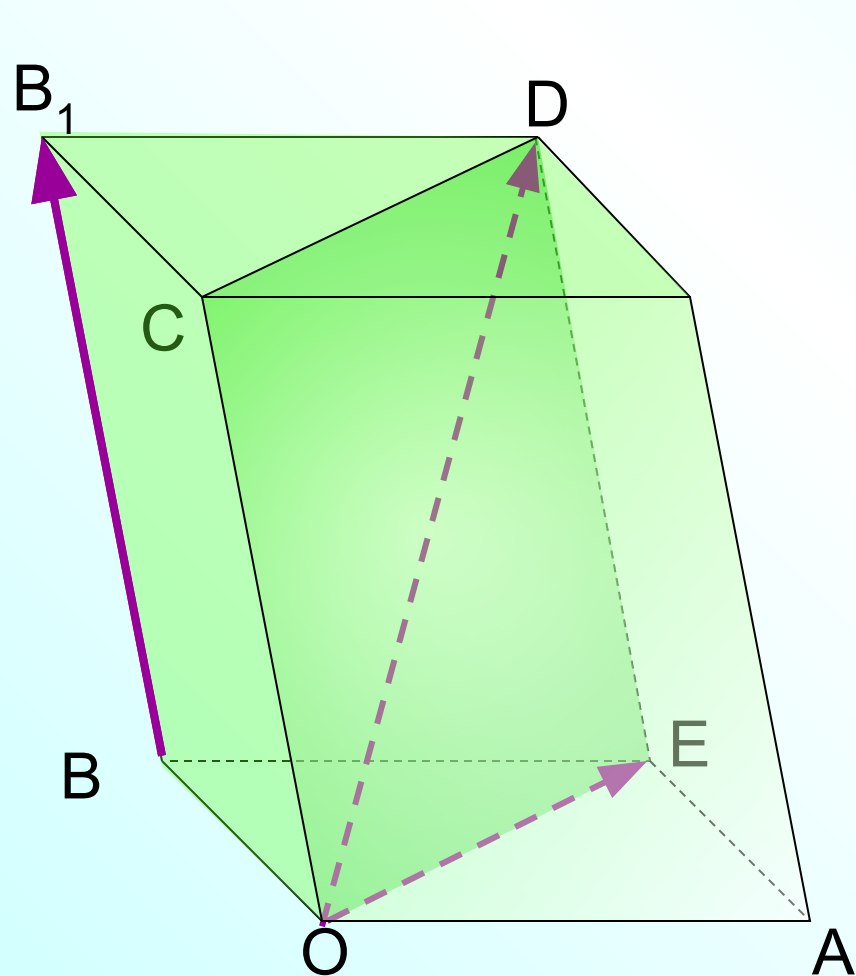


**Любые два вектора
компланарны.**

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.



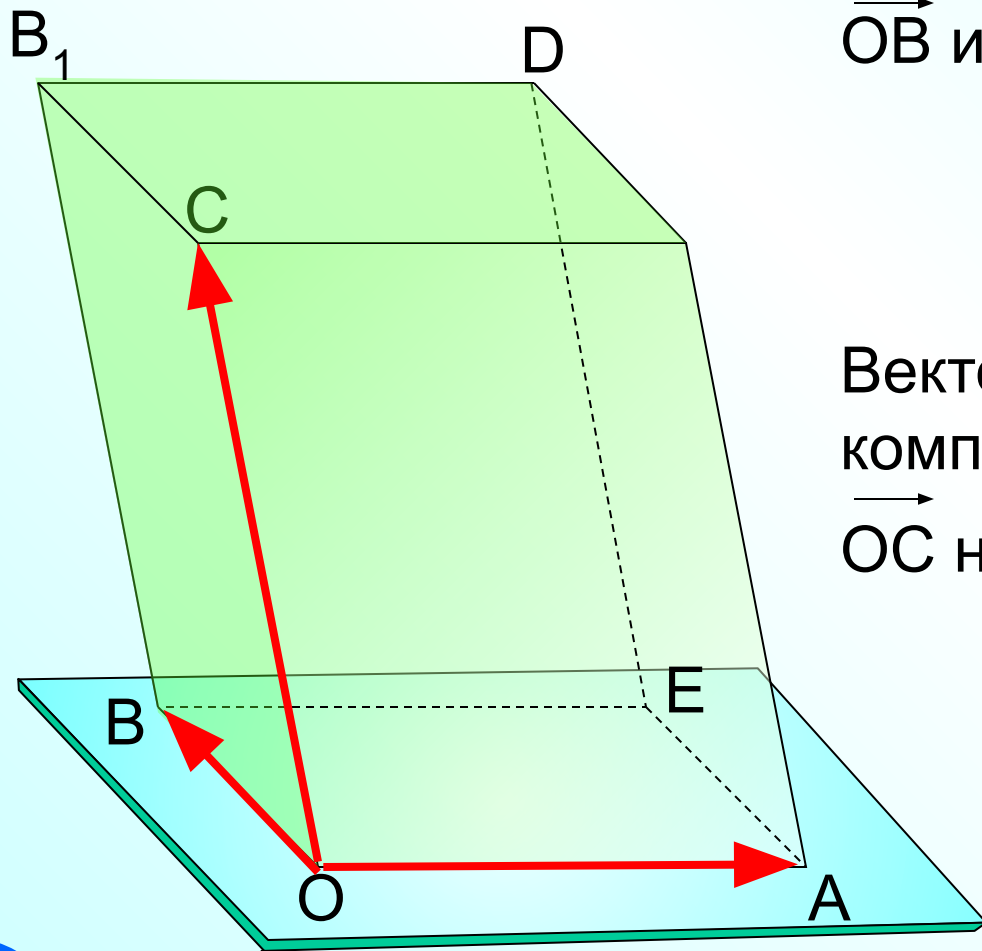
Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. На рисунке изображен параллелепипед.



Являются ли векторы $\overrightarrow{BB_1}$, \overrightarrow{OD} и \overrightarrow{OE} компланарными?

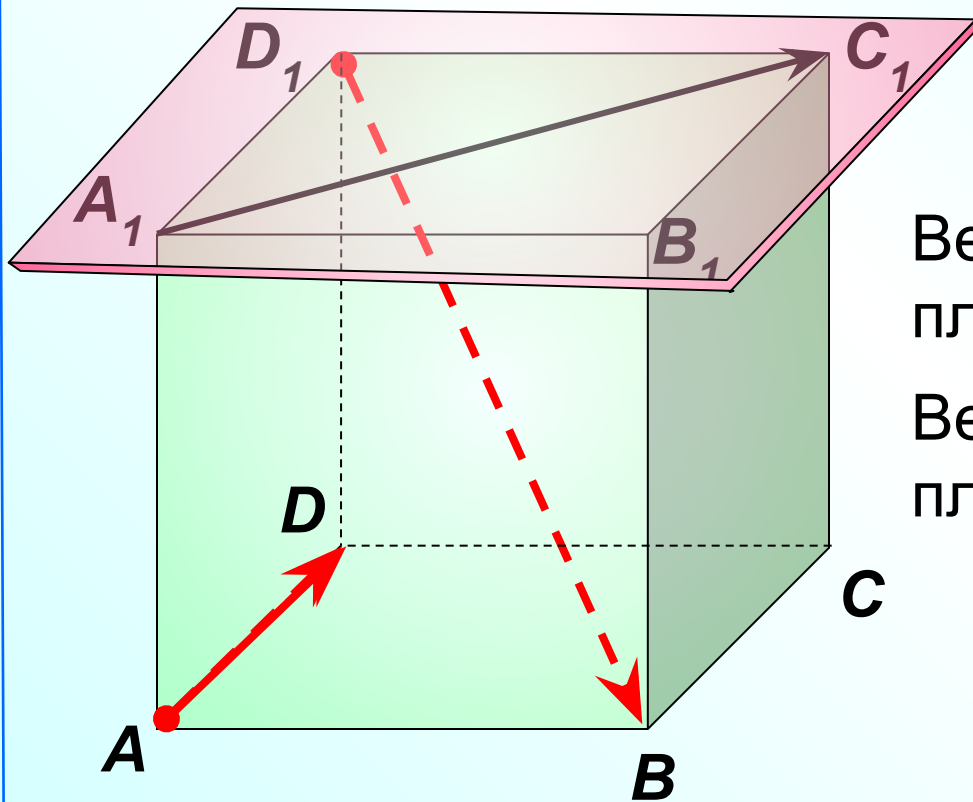
Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. На рисунке изображен параллелепипед.

Являются ли векторы \vec{OA} , \vec{OB} и \vec{OC} компланарными?



Векторы \vec{OA} , \vec{OB} и \vec{OC} не компланарны, так как вектор \vec{OC} не лежит в плоскости OAB.

Являются ли векторы \vec{AD} , $\vec{A_1C_1}$ и $\vec{D_1B}$ компланарными?



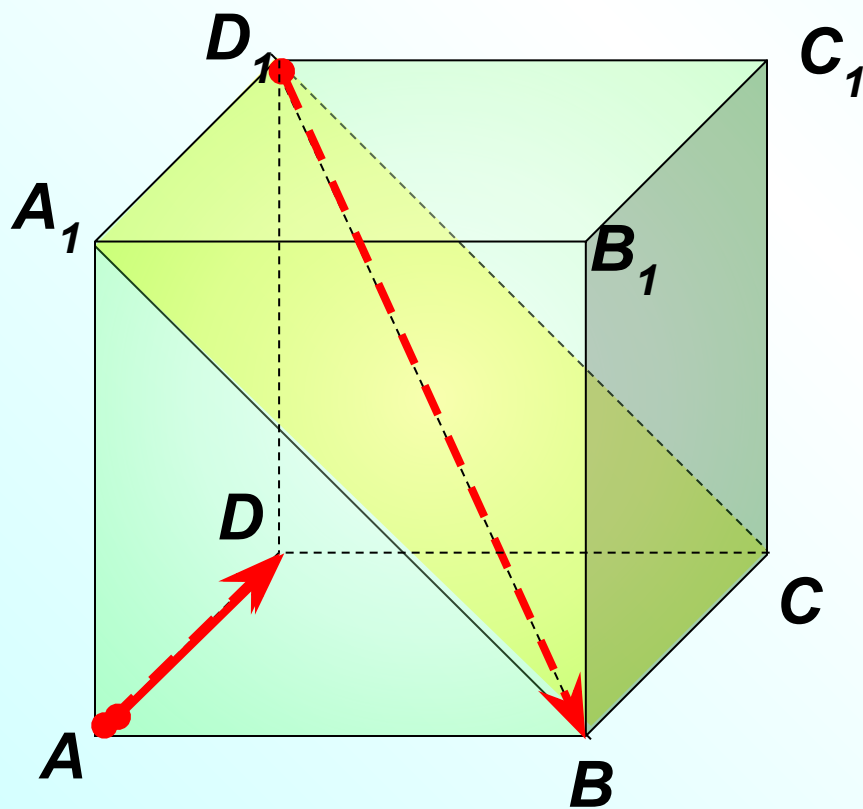
Векторы $\vec{A_1D_1}$, $\vec{A_1C_1}$ лежат в плоскости $A_1D_1C_1$.

Вектор $\vec{D_1B}$ не лежит в этой плоскости.

Векторы \vec{AD} , $\vec{A_1C_1}$ и $\vec{D_1B}$ не компланарны.

Являются ли векторы \vec{AD} и $\vec{D_1B}$ компланарными?

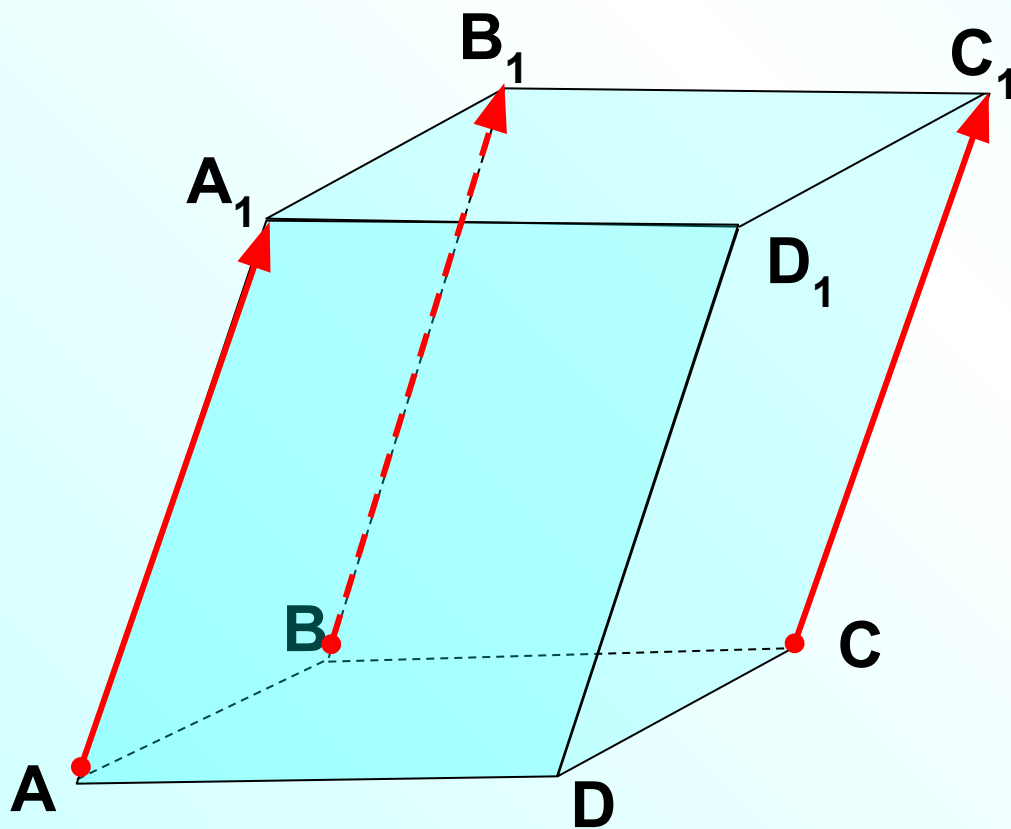
Любые два вектора компланарны.



№355 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

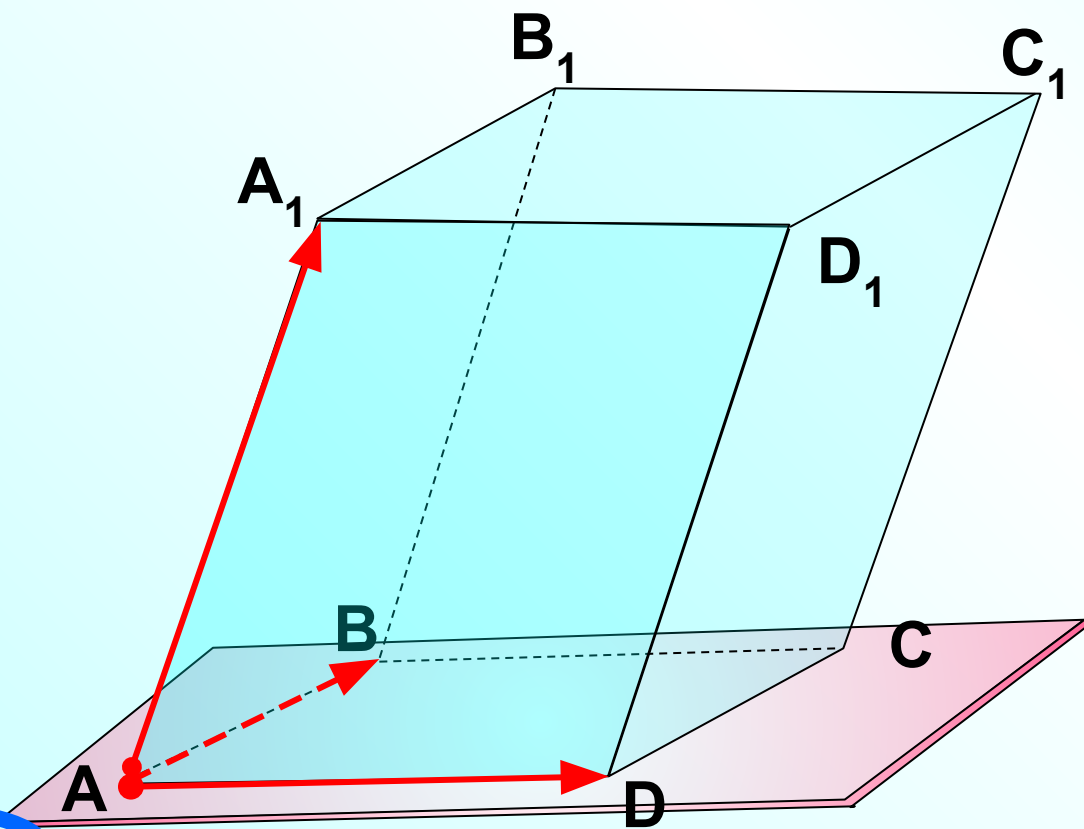
$\vec{AA_1}, \vec{CC_1}, \vec{BB_1}$

Три вектора, среди которых имеются
два коллинеарных, компланарны.



№355 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

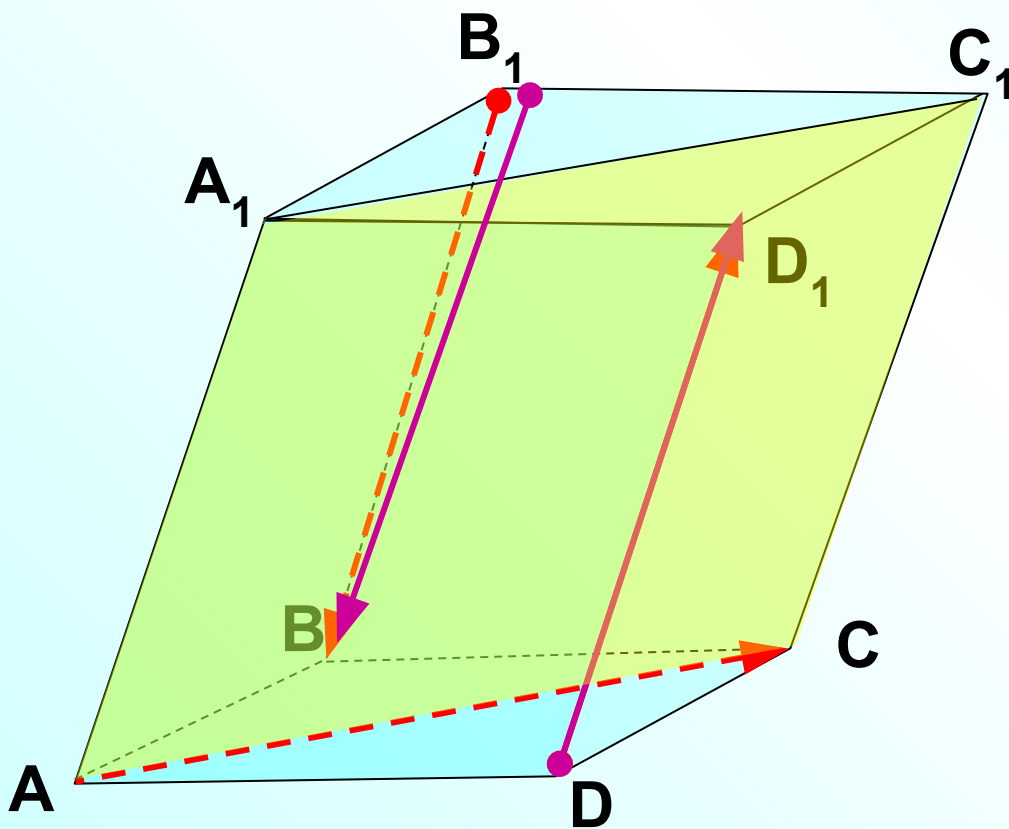
\vec{AB} , \vec{AD} , $\vec{AA_1}$ Векторы \vec{AB} , \vec{AD} и $\vec{AA_1}$ не компланарны, так как вектор $\vec{AA_1}$ не лежит в плоскости ABC .



№355 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

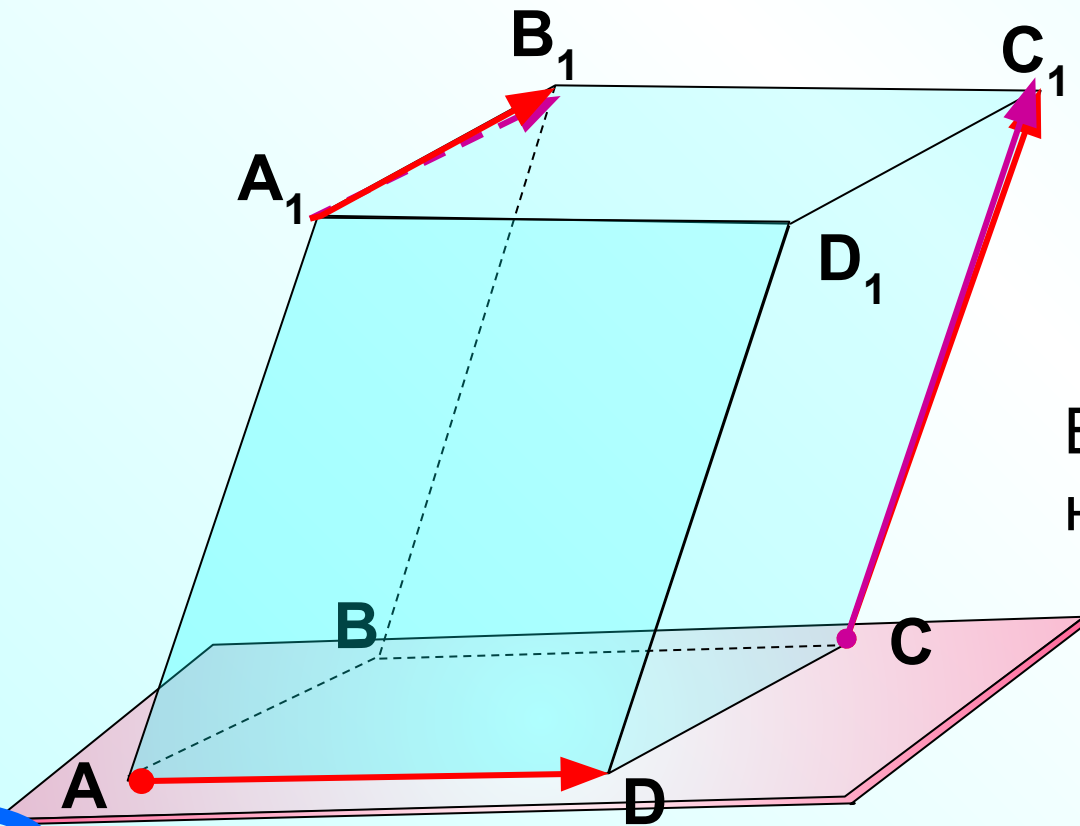
$\vec{B_1B}$, \vec{AC} , $\vec{DD_1}$

**Три вектора, среди которых имеются
два коллинеарных, компланарны.**



№355 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

\vec{AD} , $\vec{CC_1}$, $\vec{A_1B_1}$ Векторы \vec{AB} , \vec{AD} и $\vec{AA_1}$ не компланарны, так как вектор $\vec{AA_1}$ не лежит в плоскости ABC .



Векторы \vec{AD} , $\vec{CC_1}$, $\vec{A_1B_1}$
не компланарны

Любые два вектора компланарны.

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.

Признак компланарности

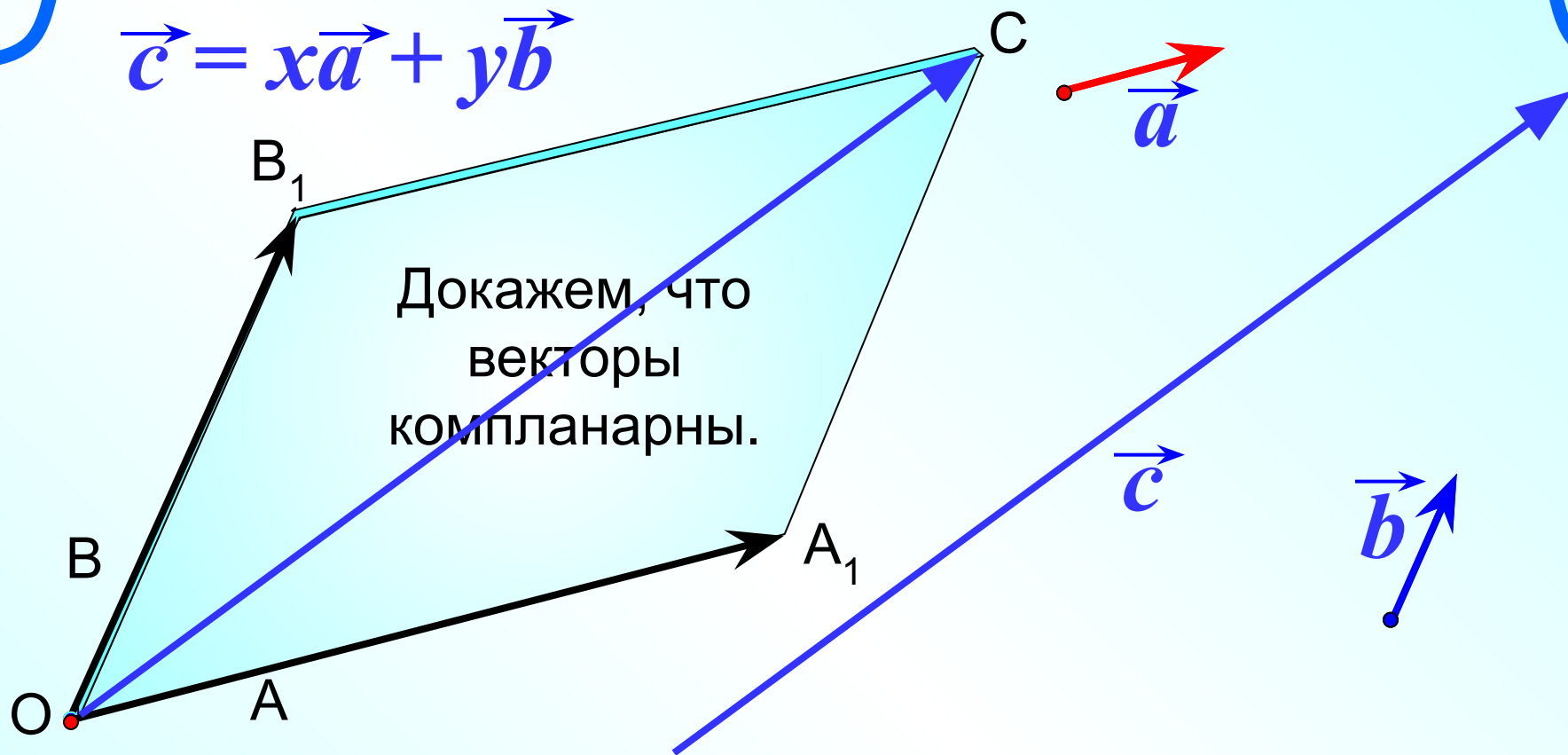
Если вектор \vec{c} можно разложить по векторам

\vec{a} и \vec{b} , т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

где x и y – некоторые числа, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c}

компланарны.

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



Векторы \vec{OA} и \vec{OB} лежат в одной плоскости OAB .

$$\vec{OA}_1 = x \vec{OA} \quad \vec{OB}_1 = y \vec{OB}$$

Векторы \vec{OA}_1 и \vec{OB}_1 также лежат плоскости OAB .

А следовательно, и их сумма – вектор $\vec{OC} = x \vec{OA} + y \vec{OB}$,
равный вектору \vec{c} .

Справедливо и обратное утверждение.

Признак компланарности

Если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны, а векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то вектор \vec{c} можно разложить по векторам

\vec{a} и \vec{b} , т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} , где x и y – некоторые числа, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c}

компланарны. $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, причем

коэффициенты разложения определяются

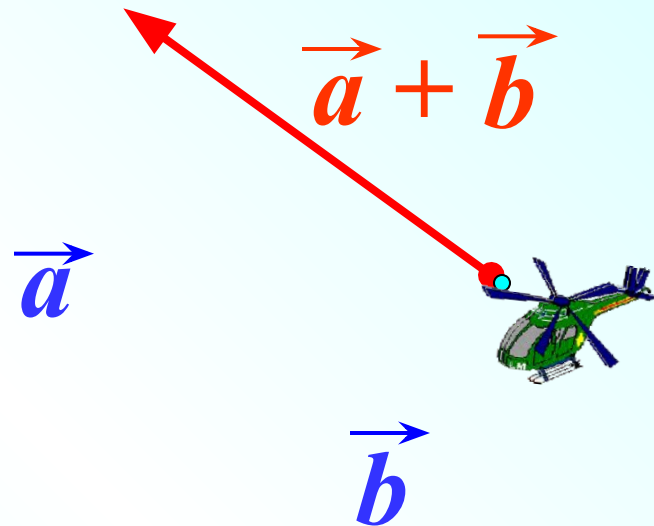
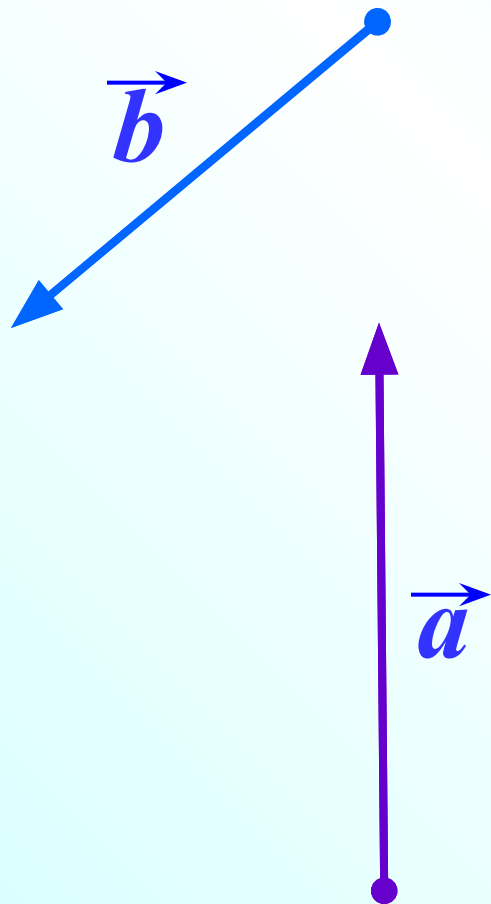
единственным образом.

Сложение векторов.

Правило треугольника.

$$\vec{AB} + \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AC}$$

П
О
В
Т
О
Р
И
М

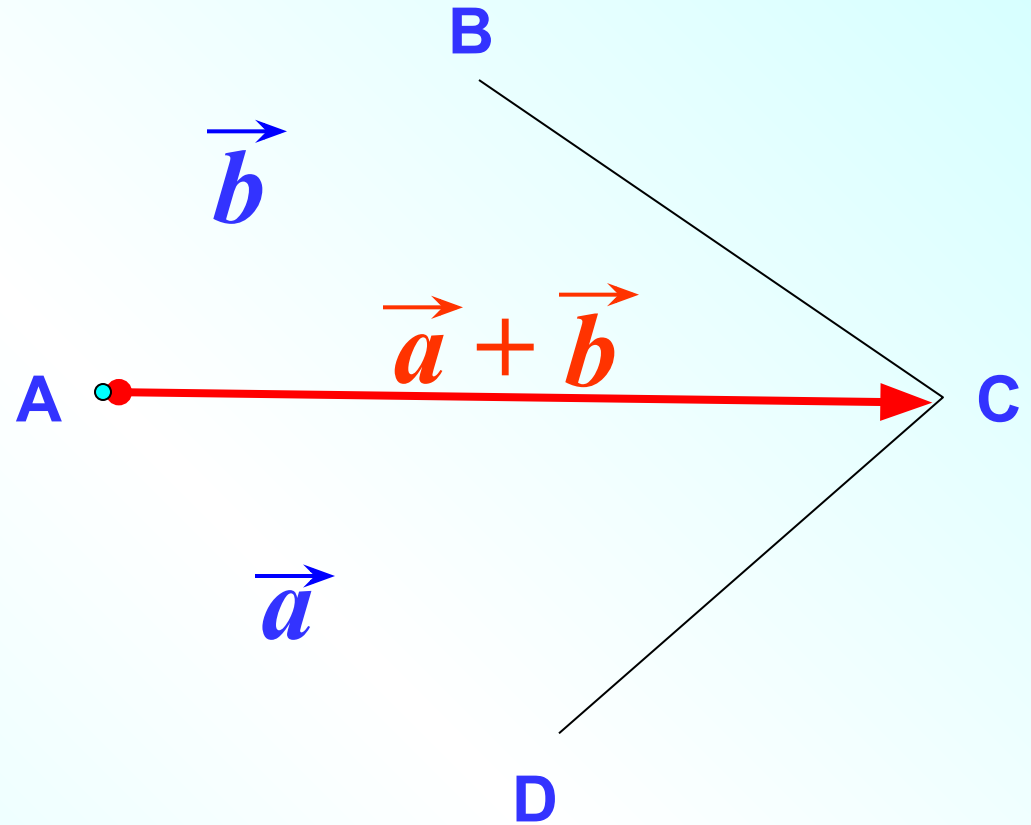
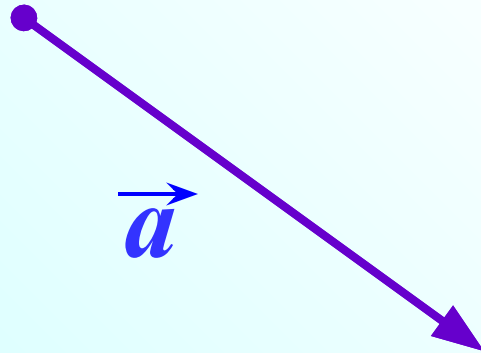
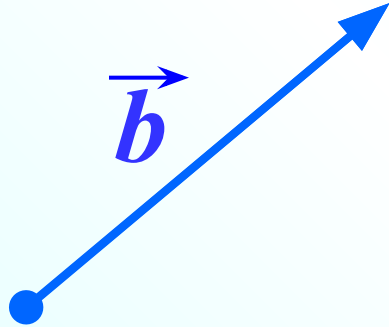


Сложение векторов. Правило параллелограмма.

$$\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{AB} + \vec{AD} \Leftrightarrow \vec{AC}$$

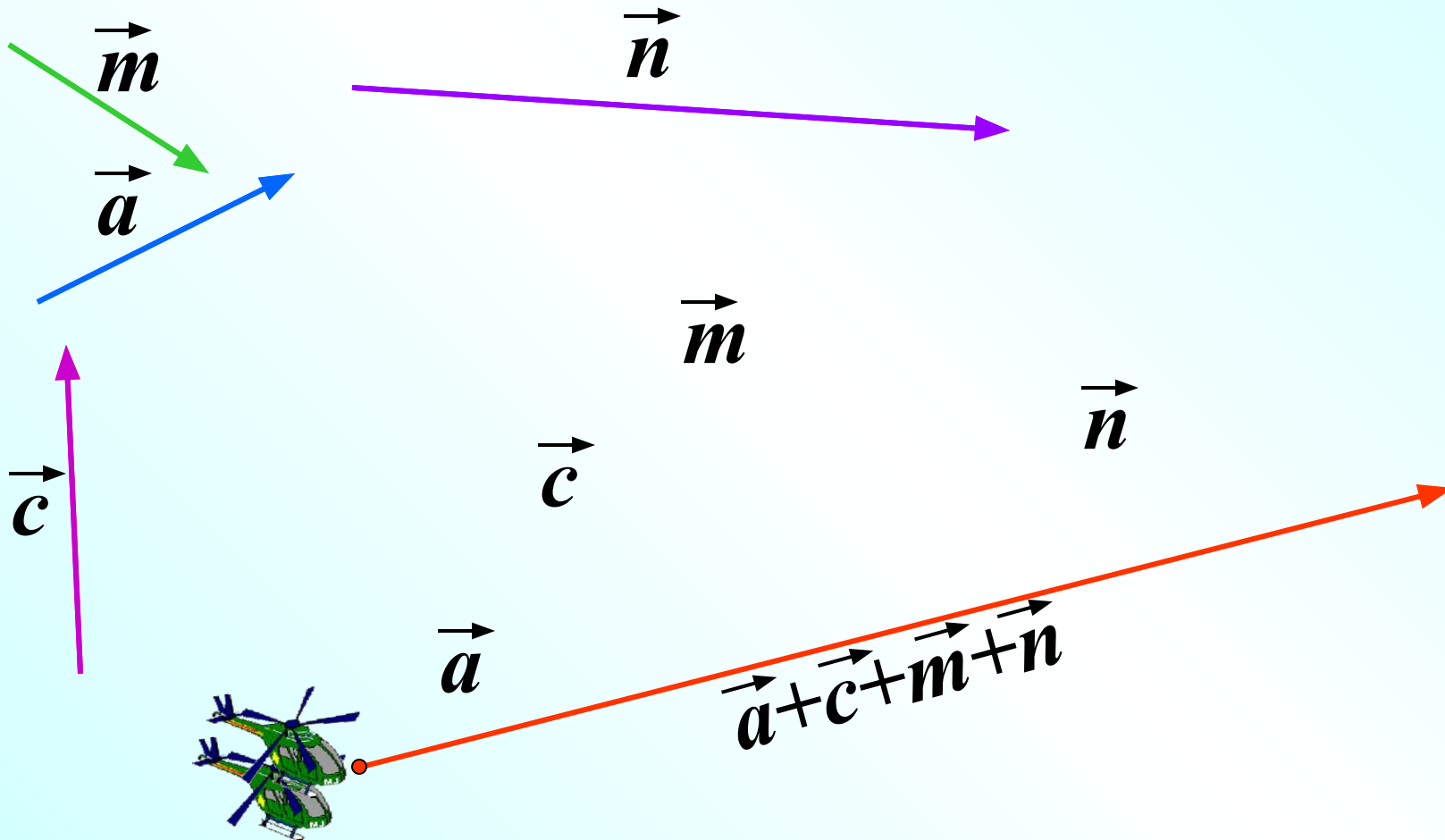
П
О
В
Т
О
Р
И
М



Сложение векторов.

Правило многоугольника.

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DO} = \vec{AO}$$



П
О
В
Т
О
Р
И
М

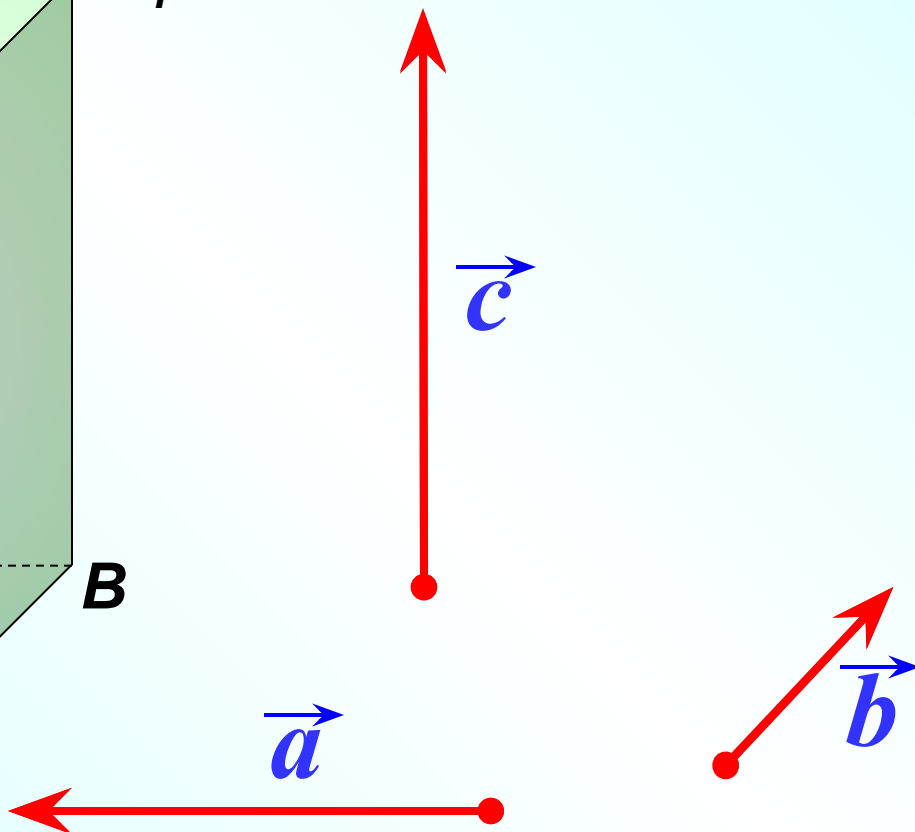
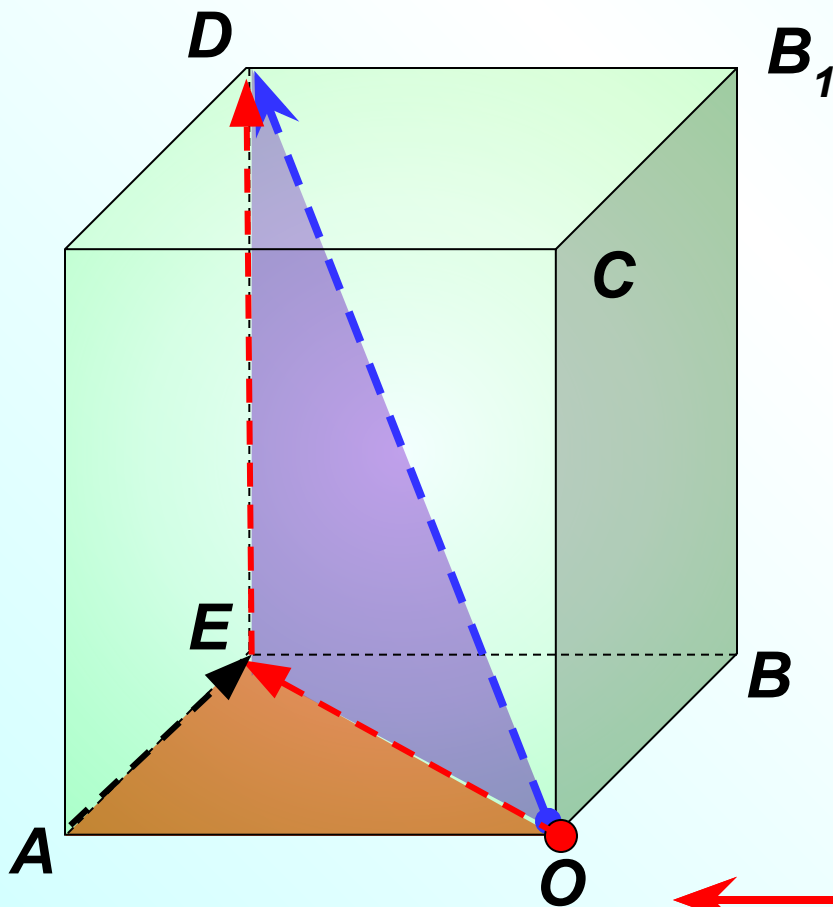
Правило параллелепипеда. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \Leftrightarrow \vec{OD}$

из $\triangle OED$

из $\triangle OAE$

$$\vec{OD} = \vec{OE} + \vec{ED} = (\vec{OA} + \vec{AE}) + \vec{ED} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} =$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



Разложение вектора по трем некопланарным векторам. Если вектор представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где x , y и z - некоторые числа, то говорят, что вектор \vec{p} разложен по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Числа x , y и z называются коэффициентами разложения.

Теорема о разложении вектора по трем некопланарным векторам.

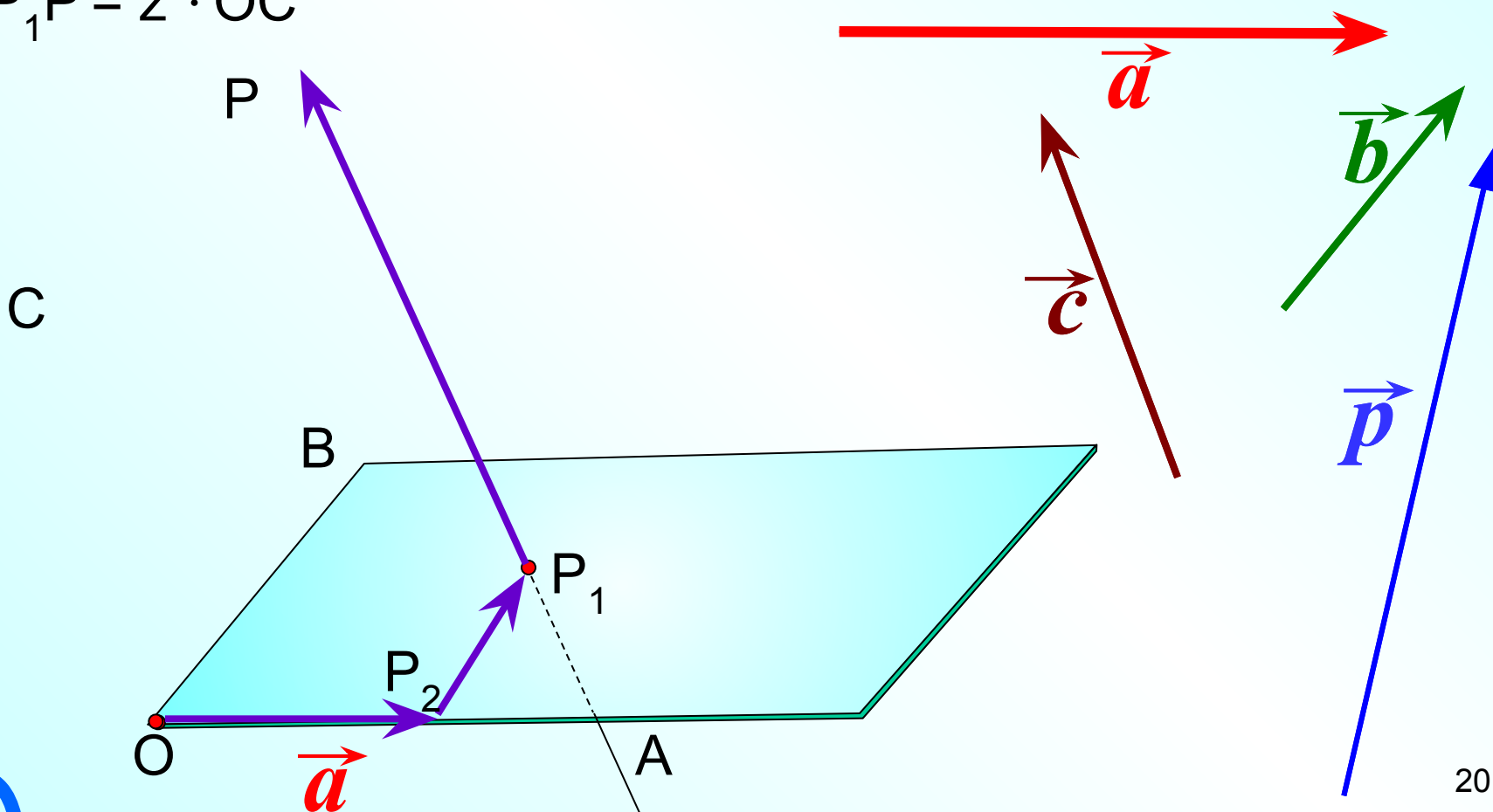
Любой вектор можно разложить по трем данным некопланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

По правилу многоугольника $\vec{OP} = \vec{OP}_2 + \vec{P}_2\vec{P}_1 + \vec{P}_1\vec{P}$
 Докажем, что любой вектор \vec{p} можно представить в виде
 $\vec{OP} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC}$

$$\vec{OP}_2 = x \cdot \vec{OA}$$

$$\vec{P}_2\vec{P}_1 = y \cdot \vec{OB}$$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$



Докажем теперь, что коэффициенты разложения определяются единственным образом. Допустим, что это не так и существует другое разложение вектора

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

Это равенство выполняется

только тогда,

когда

$$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}$$

Если предположить, например, что $z - z_1 \neq 0$, то из этого

равенства можно найти

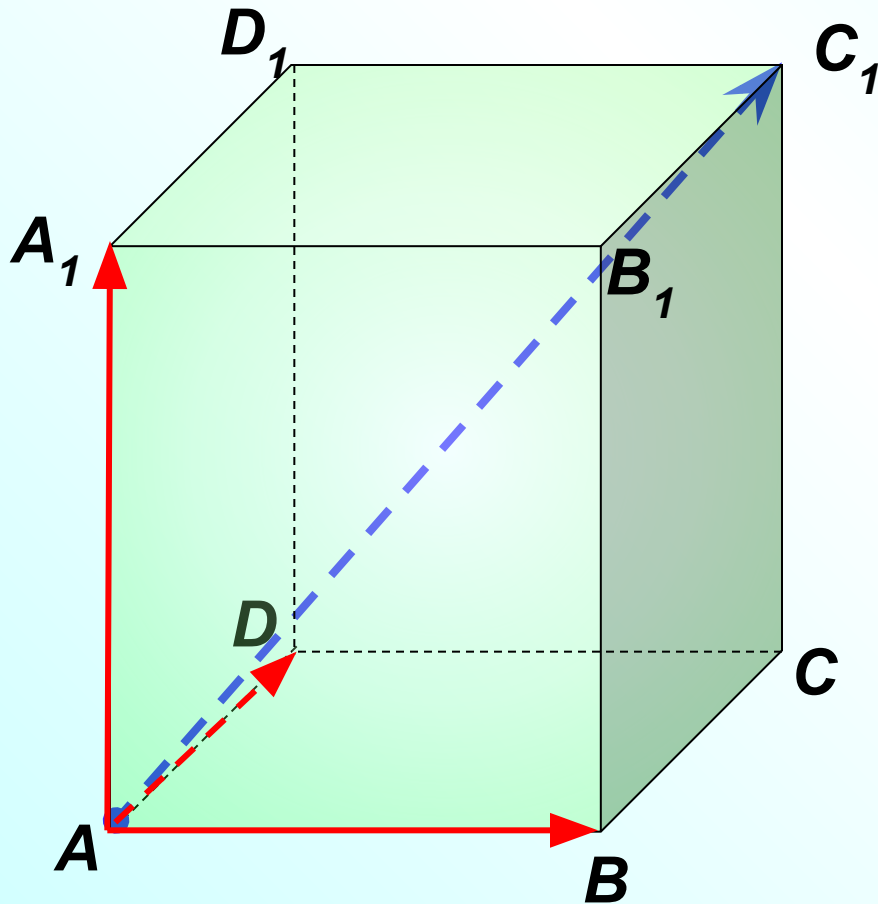
$$\vec{c} = -\frac{x - x_1}{z - z_1}\vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1}\vec{b}$$

Тогда векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны. Это противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение не верно, и $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$.

Следовательно, коэффициенты разложения $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ определяются единственным образом.

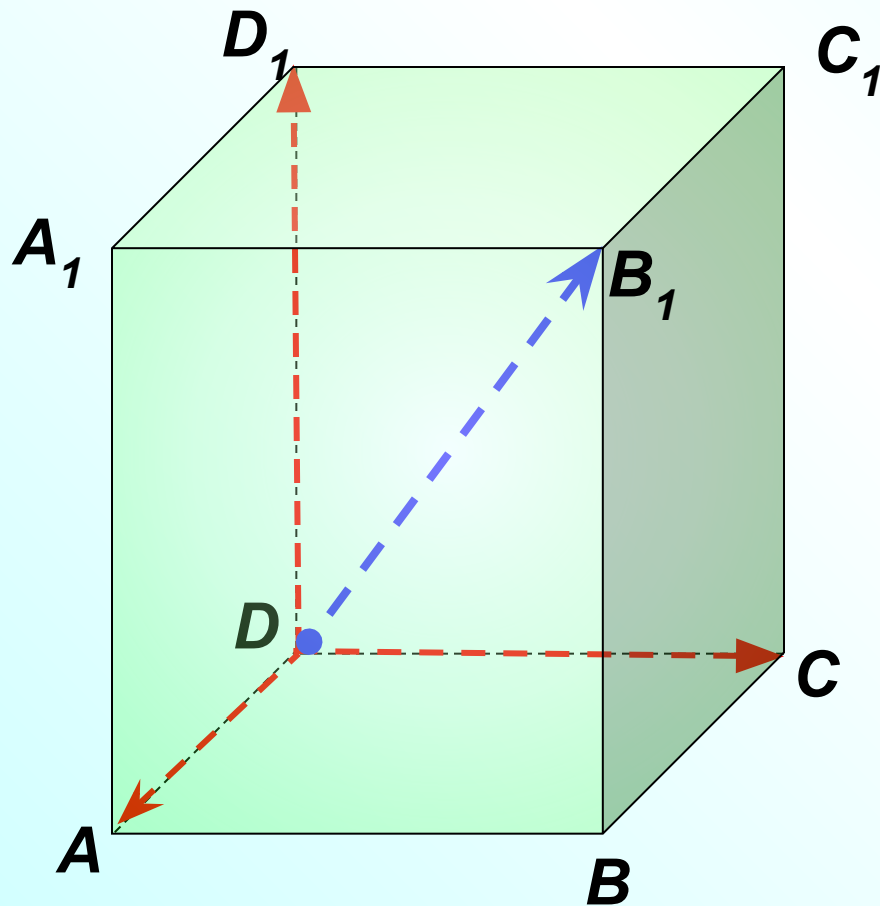
№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1} = \vec{AC_1}$$

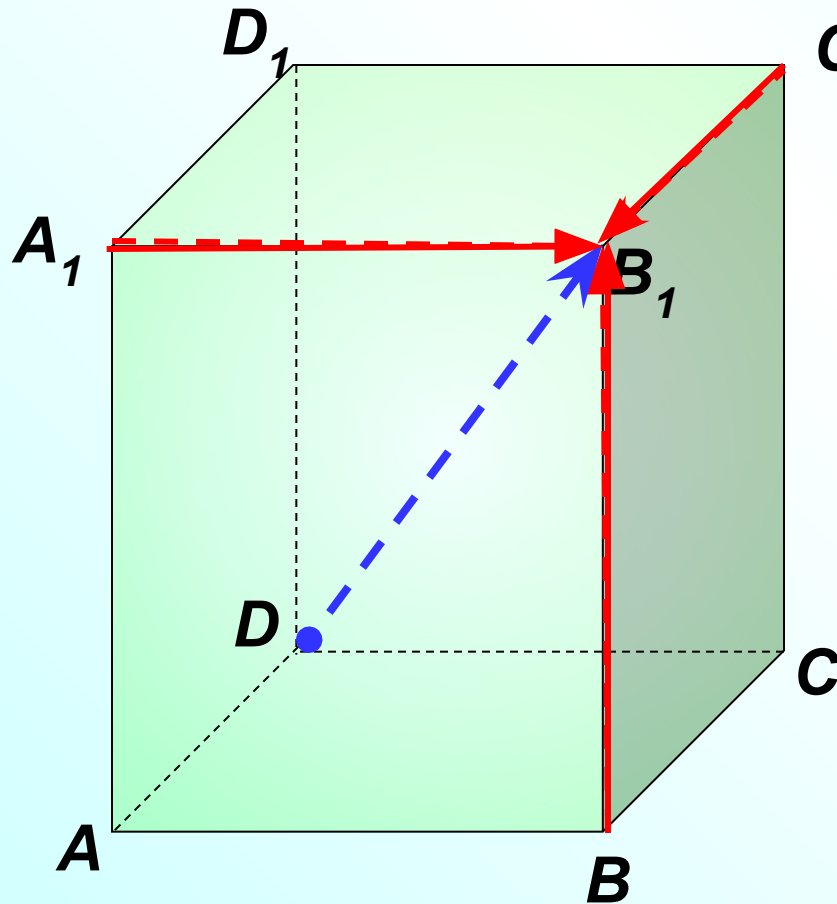


№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DD_1} = \vec{DB_1}$$

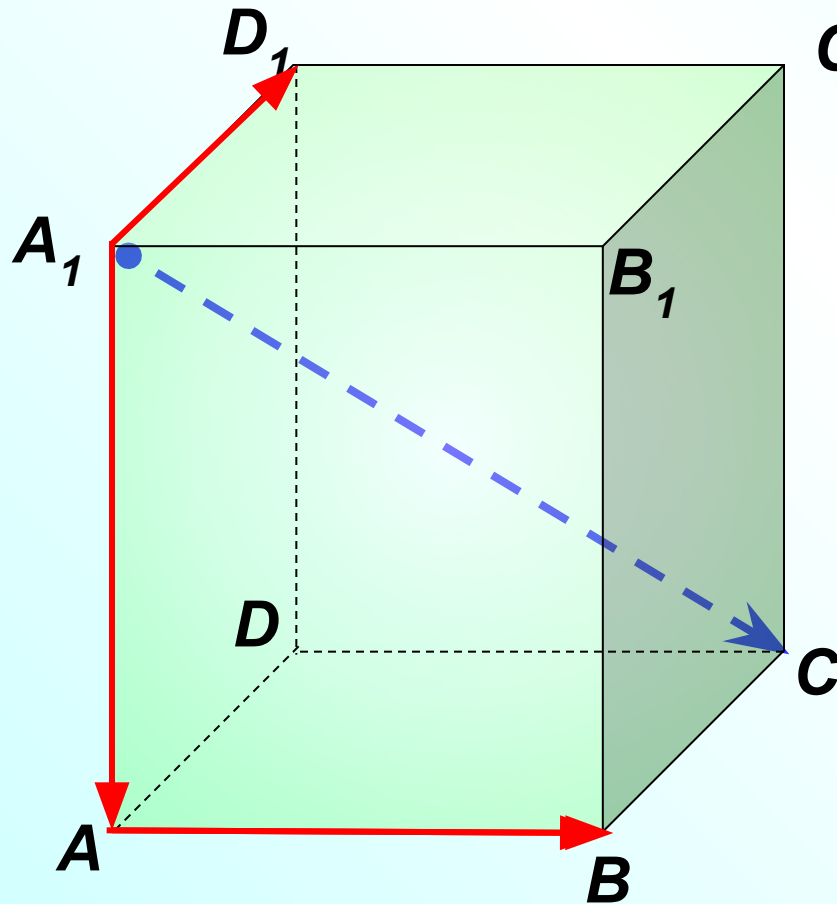


№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:



$$\begin{aligned} \vec{A_1B_1} + \vec{C_1B_1} + \vec{BB_1} \\ \vec{DC} + \vec{DA} + \vec{DD_1} = \vec{DB_1} \end{aligned}$$

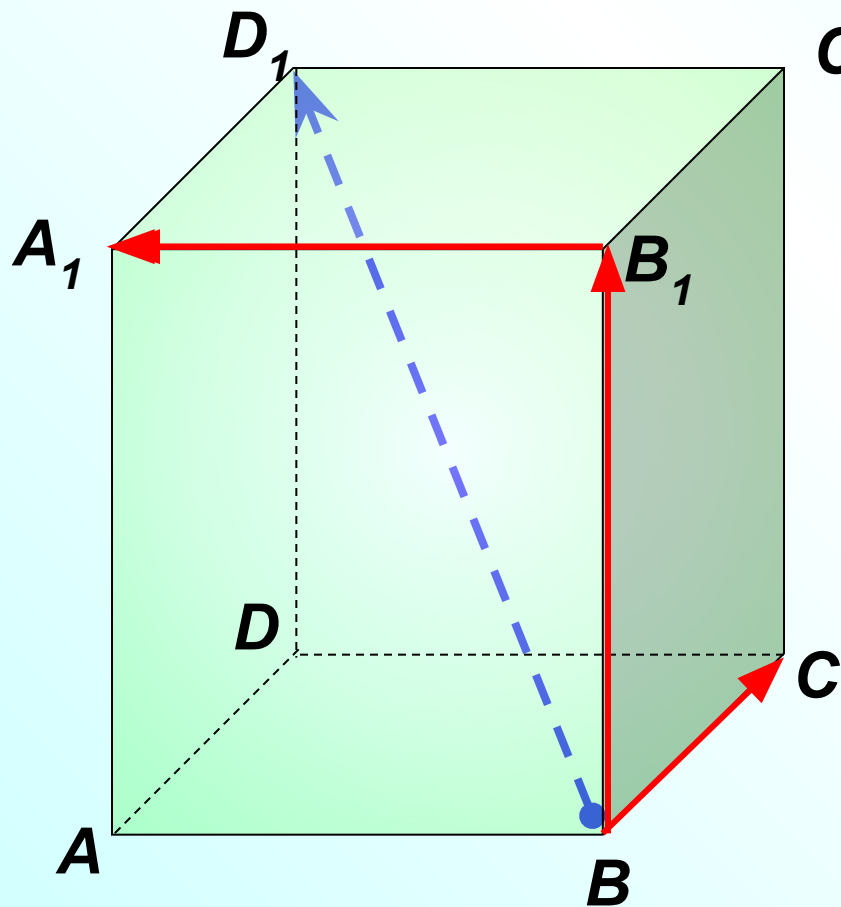
№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:



$$\vec{A_1A} + \vec{A_1D_1} + \vec{AB}$$

$$\vec{A_1A} + \vec{A_1D_1} + \vec{A_1B_1} = \vec{A_1C}$$

№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

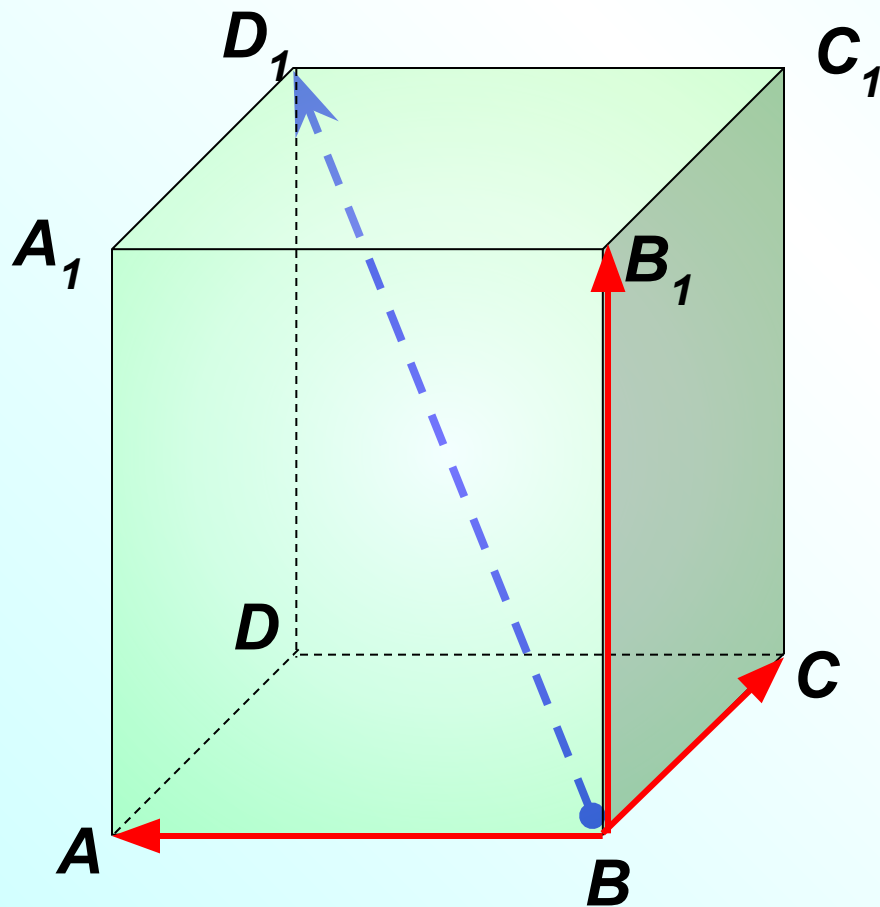


$$\begin{array}{l}
 \vec{B_1A_1} + \vec{BB_1} + \vec{BC} \\
 \vec{BA} + \vec{BB_1} + \vec{BC} = \vec{BD_1}
 \end{array}$$

№359 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.

Разложите вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} и $\overrightarrow{BB_1}$.

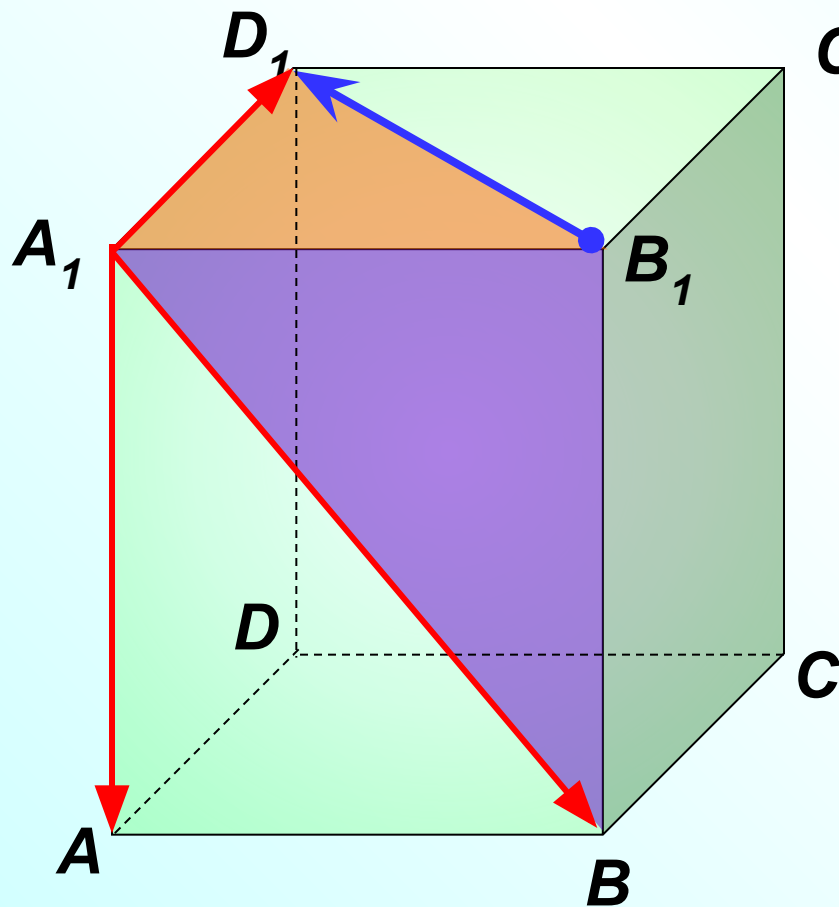
По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$



№359 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.

Разложите вектор $\vec{B_1D_1}$ по векторам $\vec{A_1A}$, $\vec{A_1B}$ и $\vec{A_1D_1}$.

По правилу треугольника из $\triangle A_1B_1D_1$:



$$\begin{aligned} \vec{B_1D_1} &= \vec{B_1A_1} + \vec{A_1D_1} = \\ &\text{из } \triangle A_1B_1B \\ &= (\vec{B_1B} + \vec{BA_1}) + \vec{A_1D_1} = \\ &= (\vec{A_1A} - \vec{A_1B}) + \vec{A_1D_1} = \\ &= \vec{A_1A} - \vec{A_1B} + \vec{A_1D_1} \end{aligned}$$