Введение в асимптотические методы. Лекция 7

Сращивание асимптотических разложения: логарифмы

1. Модельная задача: постановка и возникающие трудности

Модельная задача: $f'' + 2r^{-1}f' + \varepsilon ff' = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(\infty) = 1$

$$r^{-2}\left(r^2 f'\right)'$$

AP: $f = f_0(r) + \varepsilon f_2(r)$

$$\varepsilon^0: \qquad r^{-2}\left(r^2 f_0'\right)' = 0, \quad f_0(1) = 0, \quad f_0(\infty) = 1 \qquad \Rightarrow \quad f_0 = 1 - r^{-1}$$

$$\varepsilon^1: \qquad r^{-2}\left(r^2 f_2'\right)' = -f_0 f_0' = r^{-3} - r^{-2}, \quad f_2(1) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f_2 = -\ln r - r^{-1}\ln r + A_2\left(1 - r^{-1}\right)$$

Невозможно удовлетворить граничному условию $f_2(\infty) = 0$

Трудность – из-за неравномерности асимптотики при больших r

$r \gg 1: \quad f_0'' \sim 2r^{-3}, \varepsilon f_0 f_0' \sim \varepsilon r^{-2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon f_0 f_0'$ не мал при $r \propto \varepsilon^{-1}$

$r \propto \varepsilon^{-1}: \quad f_0 + \varepsilon f_2 = 1 + \left(\propto \varepsilon \ln \varepsilon^{-1}\right) + \left(\propto \varepsilon\right) \quad \Rightarrow$

Разумно испытать асимптотическую последовательность $1, \quad \varepsilon \ln \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon$

2. Внешнее разложение

$$\boxed{f'' + 2r^{-1} f' + \varepsilon f f' = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(\infty) = 1}$$

r фиксировано $\varepsilon \to 0$

АР: $$f \sim f_0 + \varepsilon \ln \varepsilon^{-1} f_1 + \varepsilon f_2$$

ε^0 : $$r^{-2}\left(r^2 f_0'\right)' = 0, \quad f_0(1) = 0, \quad f_0(\infty) = 1 \quad \Rightarrow \boxed{f_0 = 1 - r^{-1}}$$

$\varepsilon \ln \varepsilon^{-1}$: $$r^{-2}\left(r^2 f_1'\right)' = 0, \quad f_1(1) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{f_1 = A_1\left(1 - r^{-1}\right)}$$

ε : $$\boxed{f_2 = -\ln r - r^{-1} \ln r + A_2\left(1 - r^{-1}\right)}$$

Константы A_1, A_2 будут находиться сращиванием с внутренним разложением

3. Внутреннее разложение

$$f'' + 2r^{-1} f' + \varepsilon f f' = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(\infty) = 1$$

ПС координата

$\rho = \varepsilon r$ фиксировано $\varepsilon \to 0$

$$f(r,\varepsilon) = F(\rho,\varepsilon)$$

$$F'' + 2\rho^{-1} F' + FF' = 0$$

$$F = 1 + \varepsilon \ln \varepsilon^{-1} F_1(\rho) + \varepsilon F_2(\rho) + \ldots$$

$$F_i'' + \left(2\rho^{-1} + 1\right) F_i' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\rho^2 e^{\rho} F_i'\right)' = 0, \qquad F_i(\infty) = 0$$

$$F_i(\rho) = B_i \int_{\rho}^{\infty} e^{-\tau} \tau^{-2} d\tau$$

Константы B_1, B_2 будут находиться сращиванием с внешним разложением.
Для сращивания нужно знать поведение интеграла при $\rho \to 0$

4. Внутреннее разложение

$$f'' + 2r^{-1}f' + \varepsilon ff' = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(\infty) = 1$$

$$E_2(\rho) = \int_\rho^\infty e^{-\tau}\tau^{-2}d\tau = -\int_\rho^\infty e^{-\tau}d\tau^{-1} = \frac{1}{\rho} - \int_\rho^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{\rho} - \int_\rho^\infty e^{-\tau}d\ln\tau = \frac{1}{\rho} + \ln\rho + \int_\rho^\infty e^{-\tau}\ln\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\rho} + \ln\rho + \Bigg[\underbrace{-\int_0^\infty e^{-\tau}\ln\tau\, d\tau}_{\text{const}} + \underbrace{\int_0^\rho e^{-\tau}\ln\tau\, d\tau}_{O(\rho\ln\rho^{-1})}\Bigg]$$

$$\rho \to 0: \quad \int_\rho^\infty e^{-\tau}\tau^{-2}d\tau \sim \frac{1}{\rho} + (\ln\rho + \gamma - 1) - \tfrac{1}{2}\rho + o(\rho) \qquad \gamma = 0.57722$$

5. Сращивание

$$\boxed{f'' + 2r^{-1} f' + \varepsilon f f' = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(\infty) = 1}$$

Рассматриваем оба разложения в области их перекрытия: $1 \ll r = \rho / \varepsilon \ll \varepsilon^{-1}$

Вводим промежуточную переменную: $\eta = \varepsilon^{\alpha} r = \rho / \varepsilon^{1-\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1)$

В области перекрытия $\eta \propto 1, \quad r \gg 1, \quad \rho \ll 1$

внешнее разложение:

$$\begin{aligned} f &= 1 - \varepsilon^{\alpha} \eta^{-1} \\ &+ \varepsilon \ln \varepsilon^{-1} A_1 \left(1 - \varepsilon^{\alpha} \eta^{-1}\right) \\ &+ \varepsilon \left[-\alpha \ln \varepsilon^{-1} - \ln \eta + A_2 - \alpha \ln \varepsilon^{-1} \frac{\varepsilon^{\alpha}}{\eta} - \varepsilon^{\alpha} \frac{\ln \eta + A_2}{\eta} \right] + \ldots \end{aligned}$$

внутреннее разложение:

$$\begin{aligned} f &= 1 \\ &+ \varepsilon \ln \varepsilon^{-1} B_1 \left(\varepsilon^{\alpha-1} \eta^{-1} + (\alpha - 1) \ln \varepsilon^{-1} + \ln \eta + \gamma - 1 + \ldots \right) \\ &+ \varepsilon B_2 \left(\varepsilon^{\alpha-1} \eta^{-1} + (\alpha - 1) \ln \varepsilon^{-1} + \ln \eta + \gamma - 1 + \ldots \right) + \ldots \end{aligned}$$

сравнение разложений:

$\varepsilon^0 : \quad 1 = 1$

$\varepsilon^{\alpha} \ln \varepsilon^{-1} : \quad 0 = B_1 \eta^{-1} \Rightarrow \boxed{B_1 = 0}$

$\varepsilon^{\alpha} : \quad -\eta^{-1} = B_2 \eta^{-1} \Rightarrow \boxed{B_2 = -1}$

$\varepsilon \ln \varepsilon^{-1} : \quad A_1 - \alpha = B_2 (\alpha - 1) \Rightarrow \boxed{A_1 = 1}$

$\varepsilon : \quad A_2 - \ln \eta = B_2 (\ln \eta + \gamma - 1) \Rightarrow \boxed{A_2 = 1 - \gamma}$

6. Следующие члены

$$f'' + 2r^{-1} f' + \varepsilon f f' = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(\infty) = 1$$

внутреннее
разложение: $f \sim 1 + 0 \cdot \varepsilon \ln \varepsilon^{-1} - \varepsilon \int\limits_{\rho}^{\infty} e^{-\tau} \tau^{-2} d\tau$

внешнее
разложение: $f \sim \left(1 - r^{-1}\right) + \varepsilon \ln \varepsilon^{-1} \left(1 - r^{-1}\right) + \varepsilon \left[-\ln r - r^{-1} \ln r + (1-\gamma)\left(1 - r^{-1}\right) \right]$

Из-за члена $\varepsilon f f'$

$(r):\ \varepsilon \ln r \Rightarrow$
$(\rho):\ \varepsilon \ln \rho \Rightarrow$
$(r):\ \varepsilon \ln \varepsilon^{-1}$

$$(r):\ \varepsilon \ln \varepsilon \ \Rightarrow\ (r):\ \varepsilon^2 \ln \varepsilon \ln r \ \Rightarrow\ (\rho):\ \varepsilon^2 \ln \varepsilon \ln \rho \ \Rightarrow\ (r):\ \varepsilon^2 (\ln \varepsilon)^2$$

асимптотическая
последовательность $1,\quad \varepsilon \ln \varepsilon^{-1},\quad \varepsilon,\quad \varepsilon^2 \left[\ln \varepsilon^{-1}\right]^2,\quad \varepsilon^2 \ln \varepsilon^{-1},\quad \varepsilon^2, \ldots$

7. Правило Ван Дайка и равномерно пригодное АР

$$E_P H_Q f = H_Q E_P f$$

Правило Ван Дайка работает для P=Q=0 и для P=Q=2

$$C_{00} f = 1 - r^{-1}$$

$$C_{22} f = 1 - \varepsilon \left[\int_{\varepsilon r}^{\infty} e^{-\tau} \tau^{-2} d\tau + \frac{1}{r} \left(\ln \varepsilon^{-1} + 1 - \gamma + \ln r \right) \right]$$

Правило Ван Дайка не работает для P=Q=1

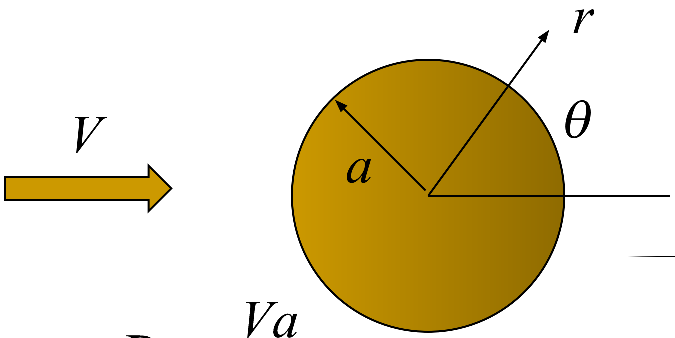
$$H_1 E_1 f = H_1 \left\{ \left(1 - r^{-1}\right) + \varepsilon \ln \varepsilon^{-1} \left(1 - r^{-1}\right) \right\} = H_1 \left\{ \left(1 - \varepsilon\rho^{-1}\right) + \varepsilon \ln \varepsilon^{-1} \left(1 - \varepsilon\rho^{-1}\right) \right\} =$$

$$E_1 H_1 f = H_1 \left\{ 1 + 0 \cdot \varepsilon \ln \varepsilon^{-1} \right\} = 1 \qquad = 1 + \varepsilon \ln \varepsilon^{-1}$$

Сращивать надо там, где меняется степень ε

$$1, \quad \varepsilon \ln \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2 \left[\ln \varepsilon^{-1} \right]^2, \quad \varepsilon^2 \ln \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon^2, \ldots$$

8. Медленное обтекание сферы: постановка задачи



$$\varepsilon = \mathrm{Re} = \frac{Va}{\nu}$$

$$\psi(r,\theta): \qquad u_r = \psi_\theta / r^2 \sin\theta, \quad u_\theta = -\psi_r / r\sin\theta$$

$$\begin{cases} D^4\psi = \varepsilon L\psi \\ \psi(1,\theta) = \psi_r(1,\theta) = 0 \\ \psi(r,\theta) \to \tfrac{1}{2} r^2 \sin^2\theta \qquad (r \to \infty) \end{cases}$$

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$L = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\psi_\theta\frac{\partial}{\partial r} - \psi_r\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\,\mathrm{ctg}\,\theta\,\psi_r - \frac{2\psi_\theta}{r}\right)D^2$$

9. Решение Стокса

$$\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D^4\psi_0 = 0 \\ \psi_0(1,\theta) = \psi_{0r}(1,\theta) = 0 \\ \psi_0(r,\theta) \to \frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta \qquad (r \to \infty) \end{cases}$$

$$\psi_0 = f(r)\sin^2\theta$$

$$f^{(4)} - \frac{4f''}{r^2} + \frac{8f'}{r^3} - \frac{8f}{r^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = c_4 r^4 + c_2 r^2 + c_1 r + c_{-1} r^{-1}$$

$$c_4 = 0,\ c_2 = 1/2,\ c_1 = -3/4,\ c_{-1} = 1/4$$

$$\boxed{\psi_0 = \frac{1}{4}\left(2r^2 - 3r + r^{-1}\right)\sin^2\theta}$$

Стокс [1851]

Коэффициент сопротивления

$$C = \frac{W}{aV\mu} = 6\pi$$

10. Формальная поправка к решению Стокса

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1$$

$$D^4 \psi_1 = -\frac{9}{4}\left(\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^5}\right)\sin^2\theta\cos\theta \qquad \begin{array}{l} \psi_1(1,\theta) = \psi_{1r}(1,\theta) = 0 \\ \psi_1 = o(r^2) \quad (r \to \infty) \end{array}$$

$$\psi_1 = g(r)\sin^2\theta\cos\theta$$

$$g^{(4)} - \frac{12g''}{r^2} + \frac{24g'}{r^3} = -\frac{9}{4}\left(\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^5}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g = b_{-2}r^{-2} + b_0 + b_3 r^3 + b_5 r^5 - \tfrac{3}{16}r^2 + \tfrac{9}{32}r + \tfrac{3}{32}r^{-1}$$

$$b_3 = b_5 = 0, \quad b_0 = b_{-2} = -3/32$$

Уайтхед [1889]

$$\boxed{\psi_1 = -\frac{3}{32}\left(2r^2 - 3r + 1 - r^{-1} + r^{-2}\right)\cos\theta\sin^2\theta} + A\left(2r^2 - 3r + r^{-1}\right)\sin^2\theta$$

11. Толщина ПС

$$\psi - \tfrac{1}{2} r^2 \sin^2\theta \sim -\frac{1}{4}\left(3r - r^{-1}\right)\sin^2\theta - \frac{3\varepsilon}{32}\left(2r^2 - 3r + 1 - r^{-1} + r^{-2}\right)\cos\theta\sin^2\theta$$

причина неравномерности

Разложение Стокса пригодно пока мал по сравнению с

Оно становится непригодным если они одного порядка, т.е. если $\varepsilon r \propto 1$

ПС координата $\boxed{\rho = \varepsilon r}$

Другие соображения: Озеен [1910]

Инерция = вязкость

$$\varepsilon \mathbf{V}\nabla\mathbf{V} = \Delta\mathbf{V} - \nabla p \qquad V \propto 1$$

$$\propto \frac{\varepsilon V^2}{L} \qquad \propto \frac{V}{L^2}$$

L – характерный масштаб

Инерция и вязкость соизмеримы при $L \propto \varepsilon^{-1}$

12. Внутреннее разложение

$\rho = \varepsilon r$ фиксировано $\quad \varepsilon \to 0$

$$\psi(r,\varepsilon) = \Psi(\rho,\varepsilon)$$

$$\psi_0 = \frac{1}{4}\left(2r^2 - 3r + r^{-1}\right)\sin^2\theta = \frac{1}{2\varepsilon^2}\rho^2\sin^2\theta - \frac{3}{4\varepsilon}\rho\sin^2\theta + O(\varepsilon)$$

$$\Psi \sim \frac{1}{2\varepsilon^2}\rho^2\sin^2\theta + \frac{1}{\varepsilon}\Psi_1(\rho,\theta)$$

$$\begin{cases} \left(D^2 - \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)D^2\Psi_1 = 0 \\ \rho \to 0: \quad \Psi_1 \sim -\dfrac{3}{4}\rho\sin^2\theta \end{cases}$$

Уравнение Озеена

$$\boxed{\Psi_1 = -\frac{3}{2}\left(1+\cos\theta\right)\left(1 - e^{-(1/2)\rho(1-\cos\theta)}\right)}$$

13. Поправка во внешнем разложении

$$\Psi \approx \frac{1}{2\varepsilon^2}\rho^2\sin^2\theta - \frac{3}{2\varepsilon}(1+\cos\theta)\left(1-e^{-(1/2)\rho(1-\cos\theta)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta - \frac{3}{2\varepsilon}(1+\cos\theta)\left(1-e^{-\varepsilon(1/2)r(1-\cos\theta)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta - \frac{3}{4}r\sin^2\theta + \frac{3\varepsilon}{16}r^2\sin^2\theta(1-\cos\theta) + \ldots$$

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{4}\left(2r^2 - 3r + r^{-1}\right)\sin^2\theta + \varepsilon\psi_1$$

$$\begin{cases} D^4\psi_1 = -\frac{9}{4}\left(\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^5}\right)\sin^2\theta\cos\theta \\ \psi_1(1,\theta) = \psi_{1r}(1,\theta) = 0 \\ \psi_1 \approx \frac{3\varepsilon}{16}r^2\sin^2\theta(1-\cos\theta) \quad (r\to\infty) \end{cases}$$

$$\boxed{C = 6\pi\left(1+\tfrac{3}{8}\varepsilon\right)}$$

$$\boxed{\psi_1 = -\frac{3}{32}\left(2r^2 - 3r + 1 - r^{-1} + r^{-2}\right)\cos\theta\sin^2\theta + \frac{3}{32}\left(2r^2 - 3r + r^{-1}\right)\sin^2\theta}$$

14. Метод Озеена: модельная задача

$$\boxed{f'' + 2r^{-1} f' + \varepsilon f f' = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(\infty) = 1}$$

$$\boxed{f'' + 2r^{-1} f' + \varepsilon f' = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(\infty) = 1}$$

$$f = 1 - \left(\int_{r\varepsilon}^{\infty} e^{-\tau} \tau^{-2} dt \Big/ \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\tau} \tau^{-2} dt \right)$$

$$f = 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon r} + (\ln \varepsilon r + \gamma - 1) + O(\varepsilon \ln \varepsilon) \right) \Big/ \left(\frac{1}{\varepsilon} + (\ln \varepsilon + \gamma - 1) + O(\varepsilon \ln \varepsilon) \right) \approx$$

$$\approx 1 - r^{-1} \frac{1 + \varepsilon r (\ln \varepsilon r + \gamma - 1) + \ldots}{1 + \varepsilon (\ln \varepsilon + \gamma - 1) + \ldots} =$$

$$= (1 - r^{-1}) - \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} (1 - r^{-1}) + \varepsilon \left(-\ln r - r^{-1} \ln r + (1 - \gamma)(1 - r^{-1}) \right) + \ldots$$

В области конечных r мы вносим в задачу малую погрешность, а в области больших r, там где нелинейный член важен, погрешность тоже мала из-за того, что здесь f близка к единице.

15. Метод Озеена: обтекание сферы

$$\varepsilon \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \Delta \mathbf{V} = -\nabla p,$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$
$$\mathbf{V}\big|_{r=1} = 0, \quad \mathbf{V}(\infty) = \mathbf{e}_z$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} - \Delta \mathbf{V} = -\nabla p,$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$
$$\mathbf{V}\big|_{r=1} = 0, \quad \mathbf{V}(\infty) = \mathbf{e}_z$$

В области конечных r мы вносим в задачу малую погрешность, а в области больших r, там где нелинейный член важен, погрешность тоже мала из-за того, что здесь $\boldsymbol{V}$ близка к $\mathbf{e}_z$.

16. Теплообмен при медленном обтекании цилиндра

$$\varepsilon \vec{V} \cdot \nabla T = \Delta T, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} > 1$$

ε -критерий Пекле, характеризующий отношение конвекции к кондуции

$$r \to \infty \qquad T = 0,$$
$$r = 1 \qquad T = 1.$$

Поле скоростей потенциально $\quad V_x - iV_y = \dfrac{dw}{dz}, \quad w = z + \dfrac{1}{z}, \qquad z = x + iy$

На бесконечности $\quad V_x = 1, V_y = 0$

На поверхности цилиндра $\quad V_n = 0$

Физика данной задачи полностью отвечает подходу Озеена. При $r \propto 1$ важен лишь кондуктивный теплоперенос; при больших r , там, где , $V_x = 1, V_y = 0$ превалирует конвекция.

Подход Озеена

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial T}{\partial x} = \Delta T, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} > 1 \\ r \to \infty \qquad T = 0, \\ r = 1 \qquad T = 1. \end{cases}$$

17. Теплообмен при медленном обтекании цилиндра

$$X = \varepsilon x, \quad Y = \varepsilon y,$$

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = \varepsilon r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial X} = \Delta T, & \rho > \varepsilon \\ \rho \to \infty & T = 0, \\ \rho = \varepsilon & T = 1. \end{cases}$$

Естественно искать решение этой задачи во всей плоскости, разместив в начале координат источник неизвестной заранее мощности

$$\frac{\partial T}{\partial X} - \Delta T = Q\delta(x)\delta(y)$$

$$T = e^{X/2}u \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial X} = e^{X/2}\left(\frac{1}{2}u + \frac{\partial u}{\partial X}\right), \quad \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = e^{X/2}\left(\frac{1}{4}u + \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\right), \quad \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = e^{X/2}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$$

$$\frac{1}{4}u - \Delta u = Q\delta(x)\delta(y)$$

u есть функция только ρ !

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4}u - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dr}\rho\dfrac{du}{d\rho} = 0 \\ \lim\limits_{\rho \to 0} \rho\dfrac{du}{d\rho} = Q \end{cases} \Rightarrow$$

$$u = QK_0\left(\tfrac{1}{2}\rho\right)$$

$$T = Q\,e^{X/2}K_0\left(\tfrac{1}{2}\rho\right)$$

19. Теплообмен при медленном обтекании цилиндра

$$T = Q\,e^{X/2} K_0\left(\tfrac{1}{2}\rho\right) = Q\left(\ln\rho^{-1} - \gamma + O(\rho)\right)$$

$$Q = \frac{1}{\ln\varepsilon^{-1} - \gamma}$$

$$T = \frac{e^{X/2}}{\ln\varepsilon^{-1} - \gamma} K_0\left(\tfrac{1}{2}\rho\right) = \frac{e^{\varepsilon x/2}}{\ln\varepsilon^{-1} - \gamma} K_0\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon r\right)$$

Суммарный тепловой поток

$$\int_0^{2\pi} \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=1} d\varphi = \frac{2\pi}{\ln\varepsilon^{-1} - \gamma}$$

20. Упражнение к лекции 7

1. Рассмотреть задачу

$$f'' + 2r^{-1}f' + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(1 - f^2\right) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(\infty) = 1$$

Получить внешнее АР по АП $1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2 \ln\varepsilon, \quad \varepsilon^2$

и внутреннее АР ($\rho = \varepsilon r$)

Срастить разложения.

Затухающее на бесконечности решение уравнения

$$y'' + 2x^{-1}y' - y = x^{-2}e^{-2x}$$

есть $y = Ax^{-1}e^{-x} + \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_x^\infty \left(e^{-x-t} - e^{x-3t}\right)t^{-1}dt$ где A - произвольная константа

$$x \to 0: \qquad y \sim \frac{2A + \ln 3}{2x} + \ln x - A + \gamma + \frac{\ln 3}{2} - 1$$

21. Упражнение к лекции 7

2. Рассмотреть задачу

$$\varepsilon f'' + \frac{3r}{2} f' + \varepsilon f f' = 0, \quad r > 1$$

$$f(1) = 0, \quad f(\infty) = 1$$

Подсказка : АП

$$1, \varepsilon^{1/2}, \varepsilon \ln \varepsilon^{-1}, \varepsilon$$

3. Заменить цилиндр на сферу в задаче о теплообмене тела с медленным потенциальным потоком обтекающей его жидкости.