ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Лектор –
доктор технических наук, профессор

Князьков Владимир Сергеевич

Кафедра ЭВМ

Вятский государственный университет

А. Основная литература

Волченская Т.В., Князьков В.С. Компьютерная математика: ч.2. Теория графов: Учеб. пособие. - 2007. – 124 с.-//www.intuit.ru

Харари Ф. Теория графов: учебник для вузов / Ф. Харари. – М.: УРСС, 2006.

Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Расширенный курс. – М: Известия, 2011. – 512 с.

http://www.intuit.ru/studies/courses/1033/241/info

1. **Электронные лекции**
2. **Примеры**
3. **Тесты – в итоге СЕРТИФИКАТ ИНТУИТ**

Б. Дополнительная литература

1. Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Дискретная математика. – М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2001. – 744 с.
2. Оре О. Графы и их применение: Пер. с англ. - Изд.3-е стереотипное. – М.: КомКнига, 2006.
3. Харари Фрэнк Теория графов = Graph theory/Пер. с англ. и предисл. В. П. Козырева. Под ред. Г.П.Гаврилова. Изд. 2-е. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 296 с.
4. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы — НИЦ РХД, 2001. — 288 с.
5. 5. Кормен,Томас Х., Лейзерсон, и др. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. Пер. с англ. — М.:Изд. дом "Вильямс", 2010. — 1296 с.:
6. 6. Дискретная математика, Асеев Г.Г.
7. 7. Комбинаторика и теория графов, Носов В.А.
8. 8. Дискретная математика, Асанов М.О., Графы, Матроиды, Алгоритмы

1. Введение и области применения теории графов
2. Способы представления графов
3. Основные операции на графах

Введение

В последние годы особую важность приобрели те разделы математики, которые имеют отношение к развитию цифровых устройств, цифровой связи и цифровых вычислительных машин. Базой для преподавания этих дисциплин наряду с классическими методами анализа непрерывных физических моделей стали алгебраические, логические и комбинаторные методы исследования различных моделей дискретной математики.

Значительно возросла популярность теории графов - ветви дискретной математики. Графы встречаются во многих областях под разными названиями: “структуры” в гражданском строительстве,”сети” в электронике, ” социограммы” в социологии и экономике, “молекулярные структуры” в химии,”дорожные карты”, электрические или газовые распределительные сети и т.д.

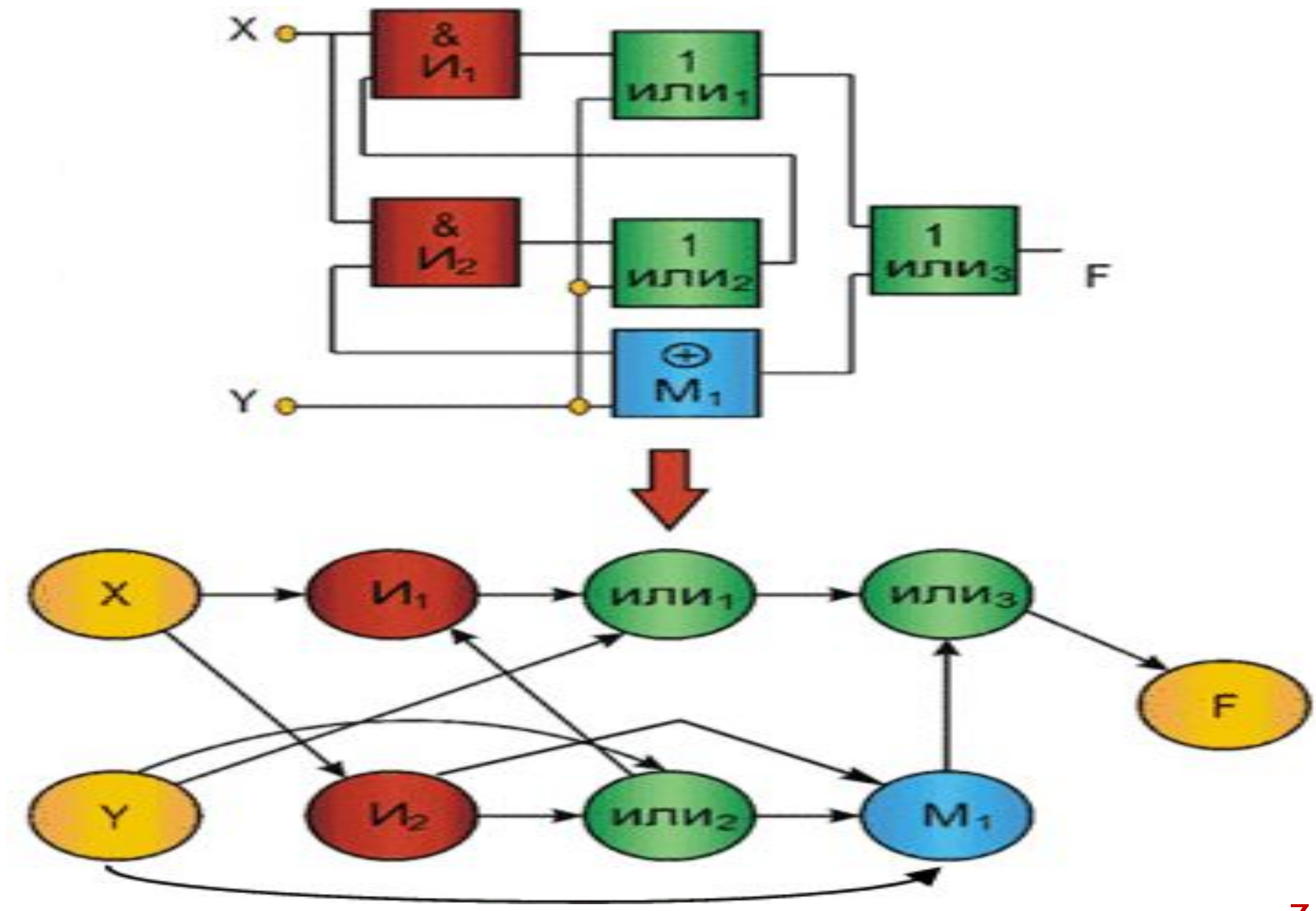
Области применения дискретных моделей

Комбинаторные вычисления находят широкое применение в различных областях :

Производство РЭА и ВТ

- оптимальное размещение элементов и трассировка;
- разбиение схемы на подсхемы для реализации блоками и т.д.

Области применения дискретных моделей



Области применения дискретных моделей

2. Строительство

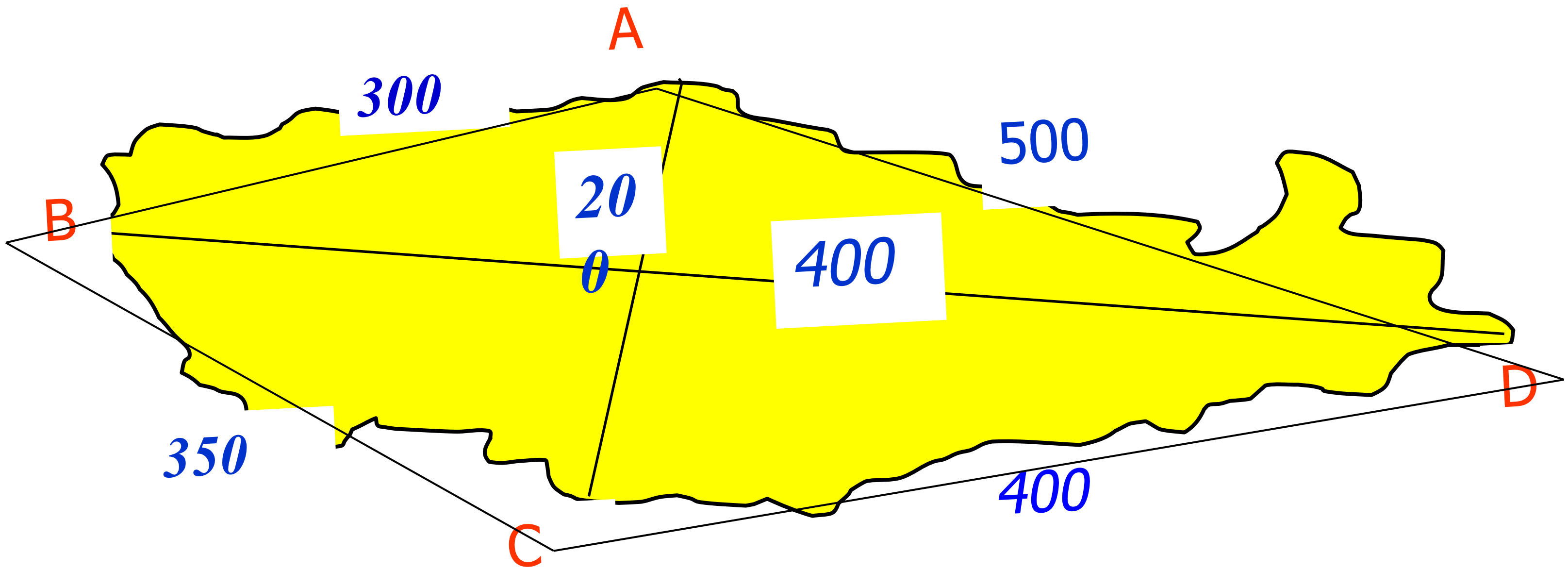
-Как построить транспортную сеть в регионе, чтобы минимизировать затраты на строительство и оптимизировать транспортные перевозки.

- Как соединить мостами острова в пойме большой реки, минимизируя затраты и учитывая параметры сейсмостойкости и прочности.

-Сколько вариантов прокладки трубопроводов между заданными пунктами?

На рис. **изображена схема путей, связывающих эти города. Различные варианты путешествий отличаются друг от друга порядком посещения городов В, С, и .D. Существует шесть вариантов путешествия. В таблице указаны варианты и длин каждого пути:**

Путь	Длина пути	Путь	Длина пути
ABCDA	1555	***ACDBA***	1300
ABDCA	1300	***ADBCA***	1450
ACBDA	1450	***ADCBA***	1550



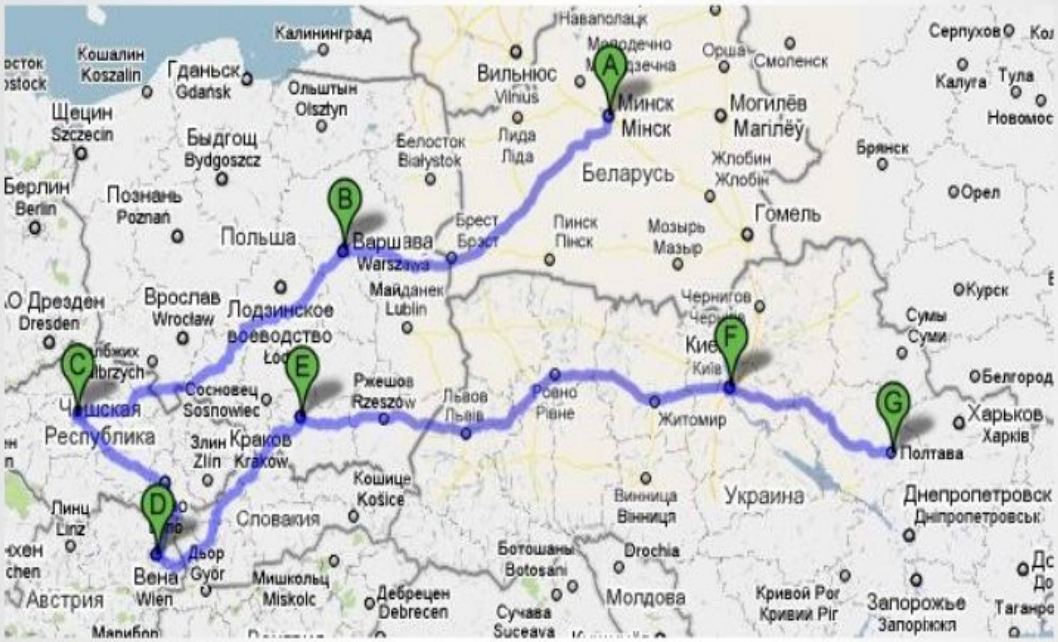
Оптимизационные задачи на больших графах

Однако, при решении оптимизационных задач на графах, изменяющих структуру самого графа, фаза препроцессинга длиною в несколько часов становится бессмысленной.

Пример задачи: есть 1 млрд рублей на развитие дорожной сети. Каким образом можно инвестировать его, чтобы уменьшить среднее время, затрачиваемое на ежедневные межрайонные корреспонденции граждан?

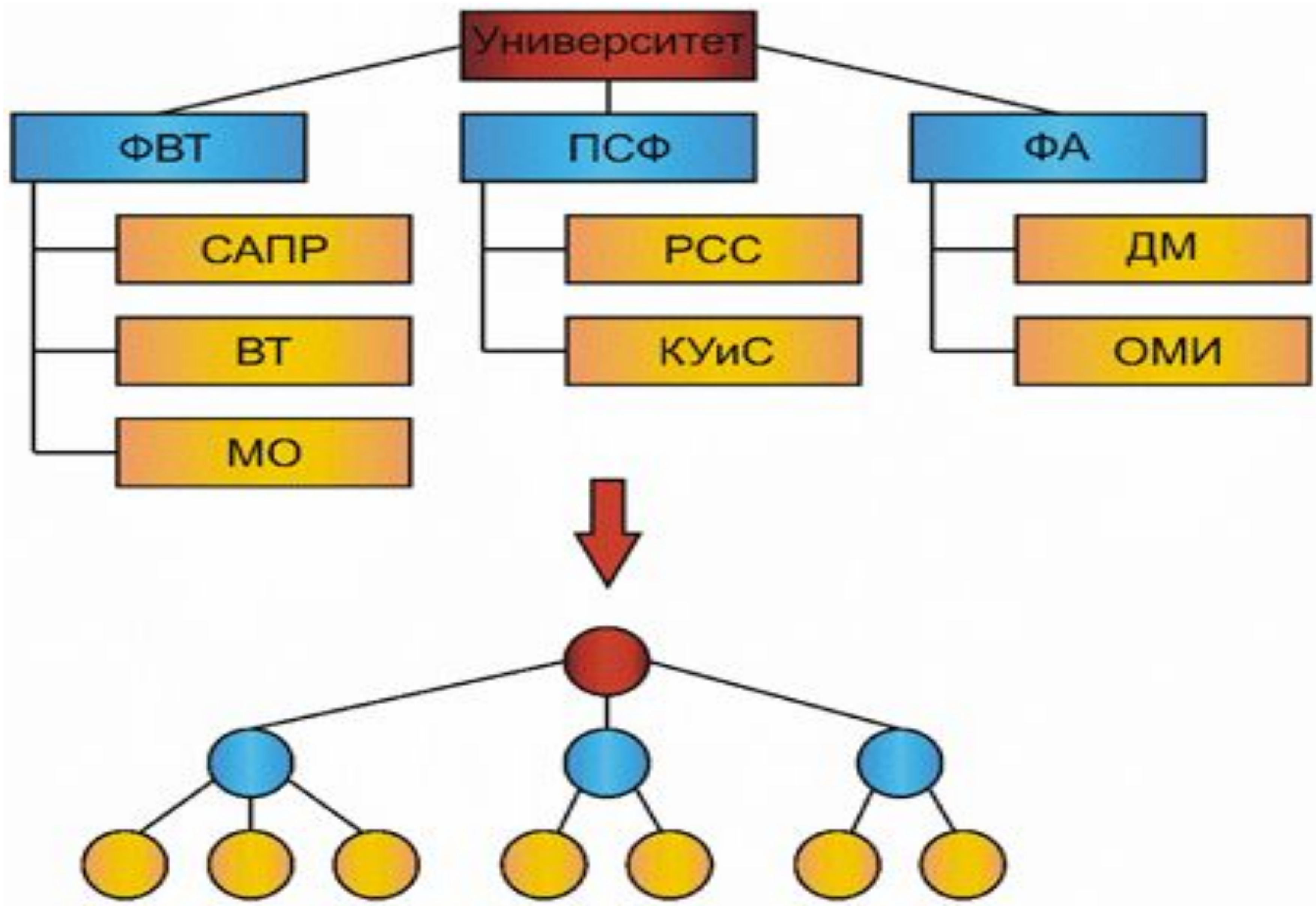
Еще пример: дорожная сеть подверглась воздействию стихии, ожидается еще один удар. Где проложить новые дороги, чтобы система была максимально устойчивой?

Кратчайшее расстояние на графе Европы



Поиск кратчайшего расстояния на графе - одна из важнейших задач оптимизации, причем классические подходы в данной области не оправдывают себя на больших графах.

Области применения дискретных моделей



Области применения дискретных моделей

-при исследовании так называемой проблемы оптимизации, возникающей при конструировании больших систем как технических, так и программных, например, таких как компиляторы;

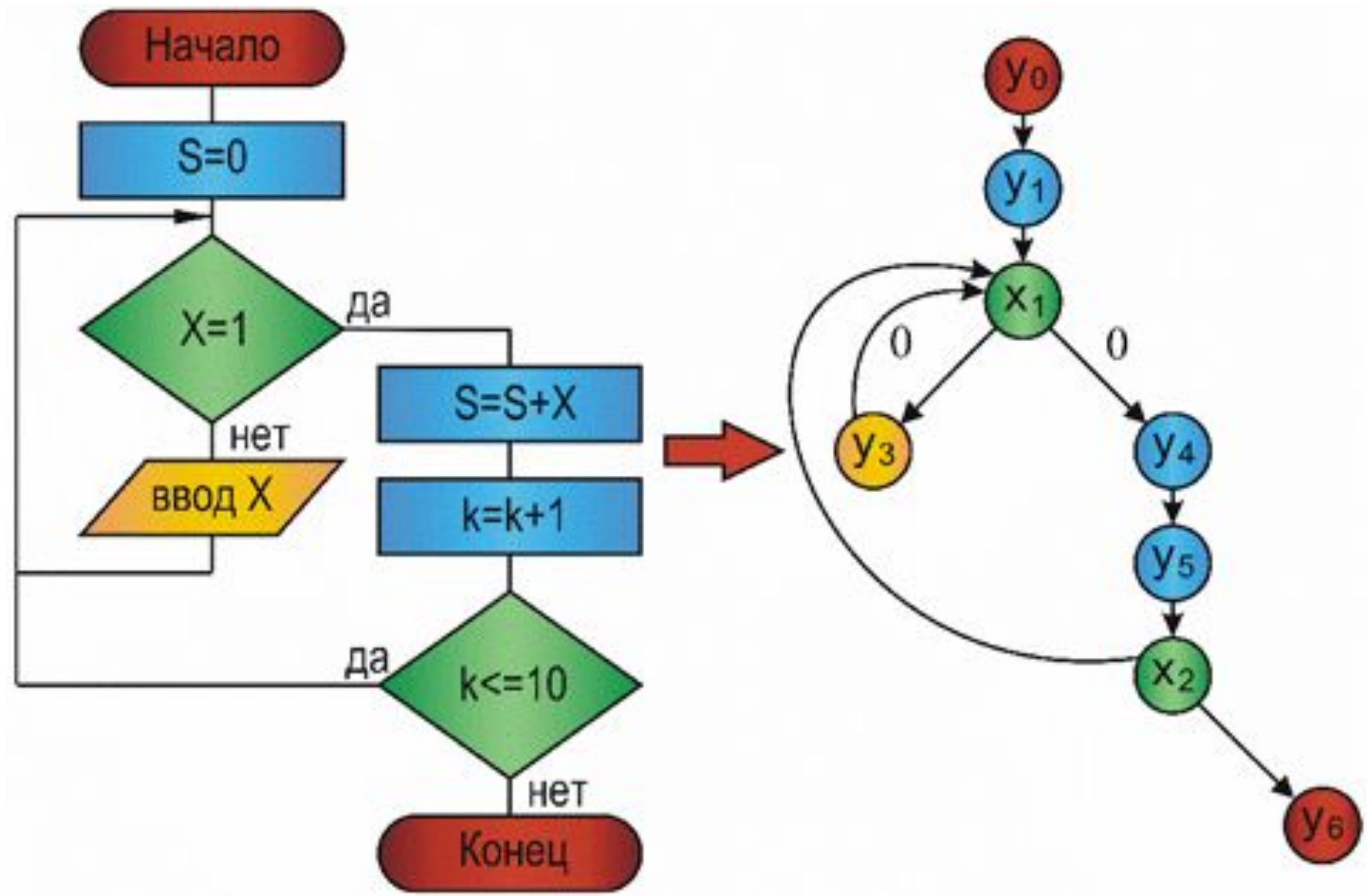
-в области проектирования для построения эффективных алгоритмов и анализа их сложности.;

-при разработке алгоритмов конструкторского проектирования схем;

-В психологии при анализе совместимости;

-В системах управления…

Области применения дискретных моделей



Графы
и способы их представления

Основные определения

Формальное определение графа может быть дано следующим образом: графом называется двойка вида

$$G = (X, A),$$

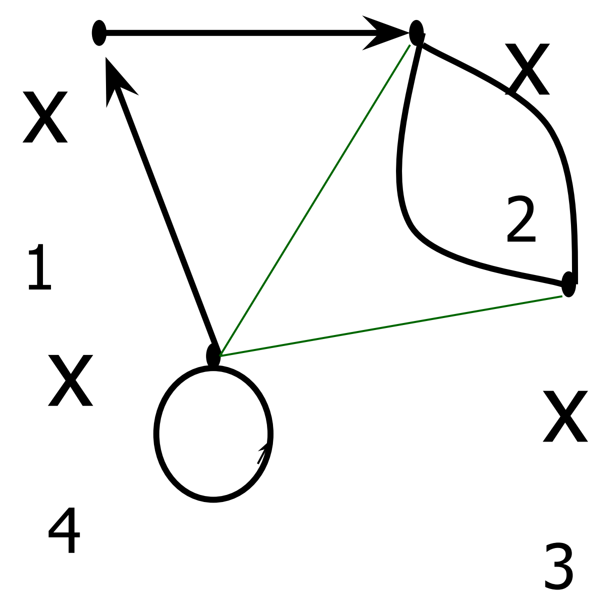
где $X=\{x_i\}, i=1,2,\ldots,n$ - множество вершин графа, $A=\{a_i\}, i=1,2, \ldots ,m$ –множество дуг или ребер графа.

Граф задается множеством точек или вершин

$\boldsymbol{x_1, x_2}, \ldots, x_n$

и множеством линий -дуг или ребер $a_1, a_2, \ldots, a_m$,

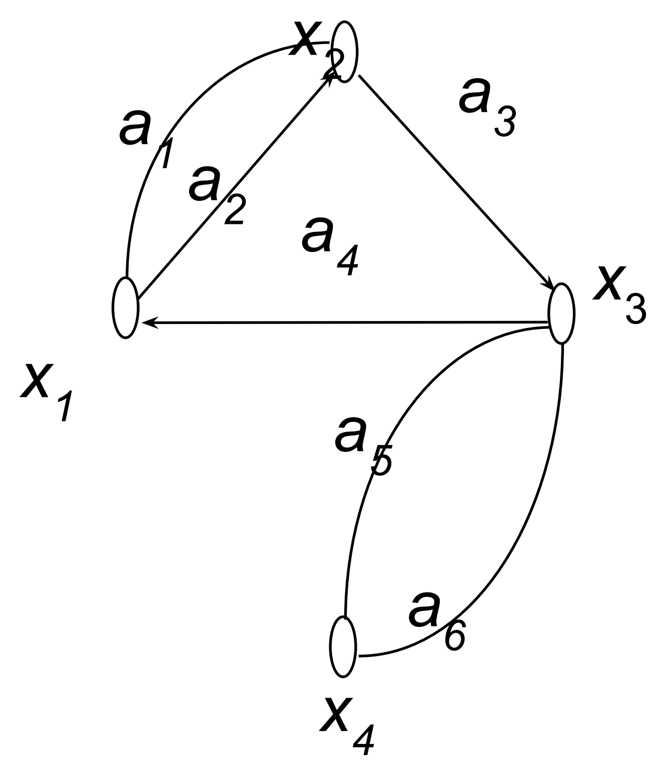
соединяющих между собой все или часть точек.



Орграф

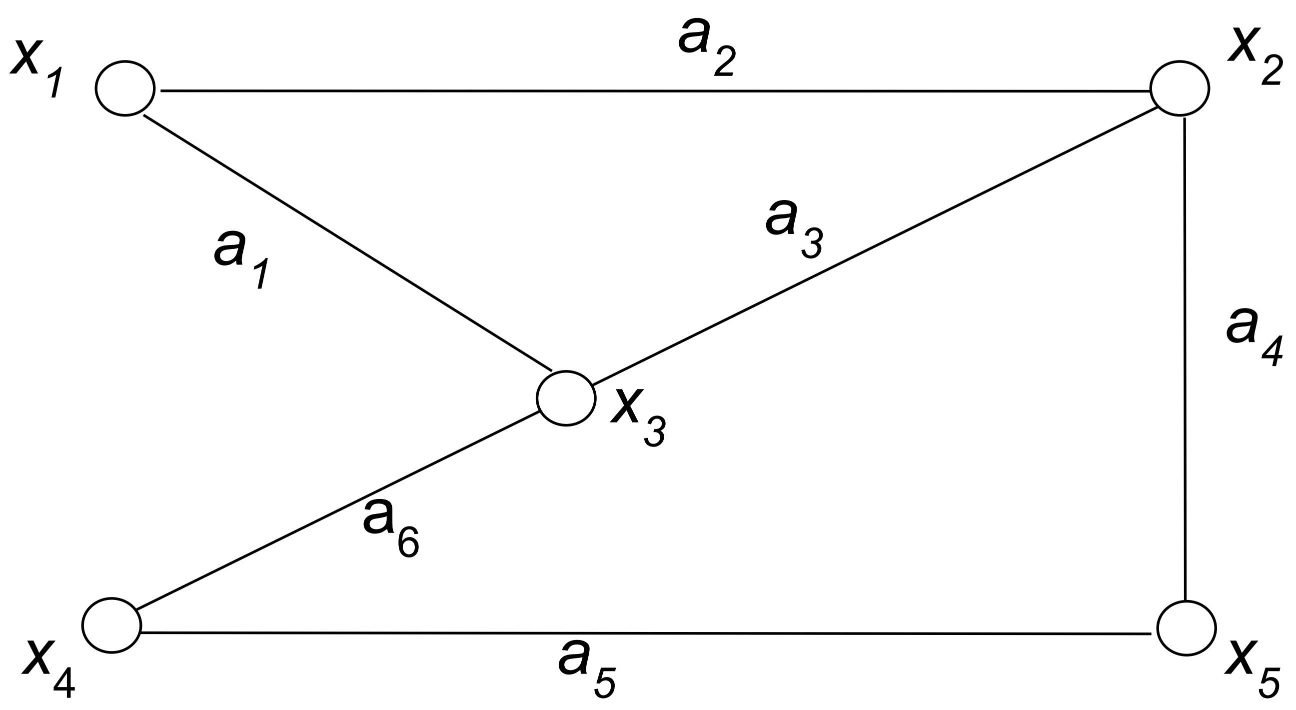
Графы могут быть ориентированными, неориентированными и смешанными

Если ребра ориентированы, что обычно показывается стрелкой, то они называются дугами, и граф с такими ребрами называется ***ориентированным*** графом или ***орграфом***



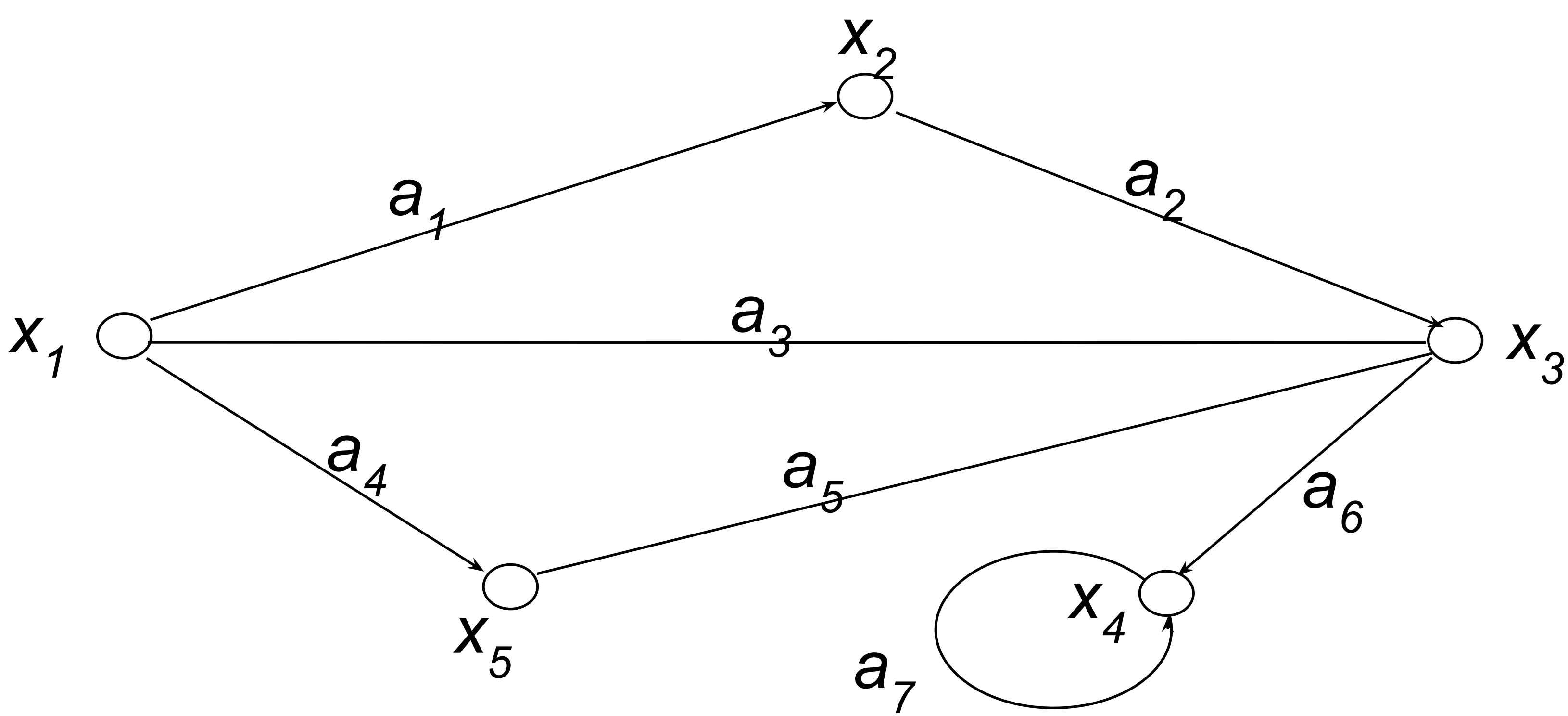
Неориентированный граф

Если ребра не имеют ориентации, то граф называется ***неориентированным***



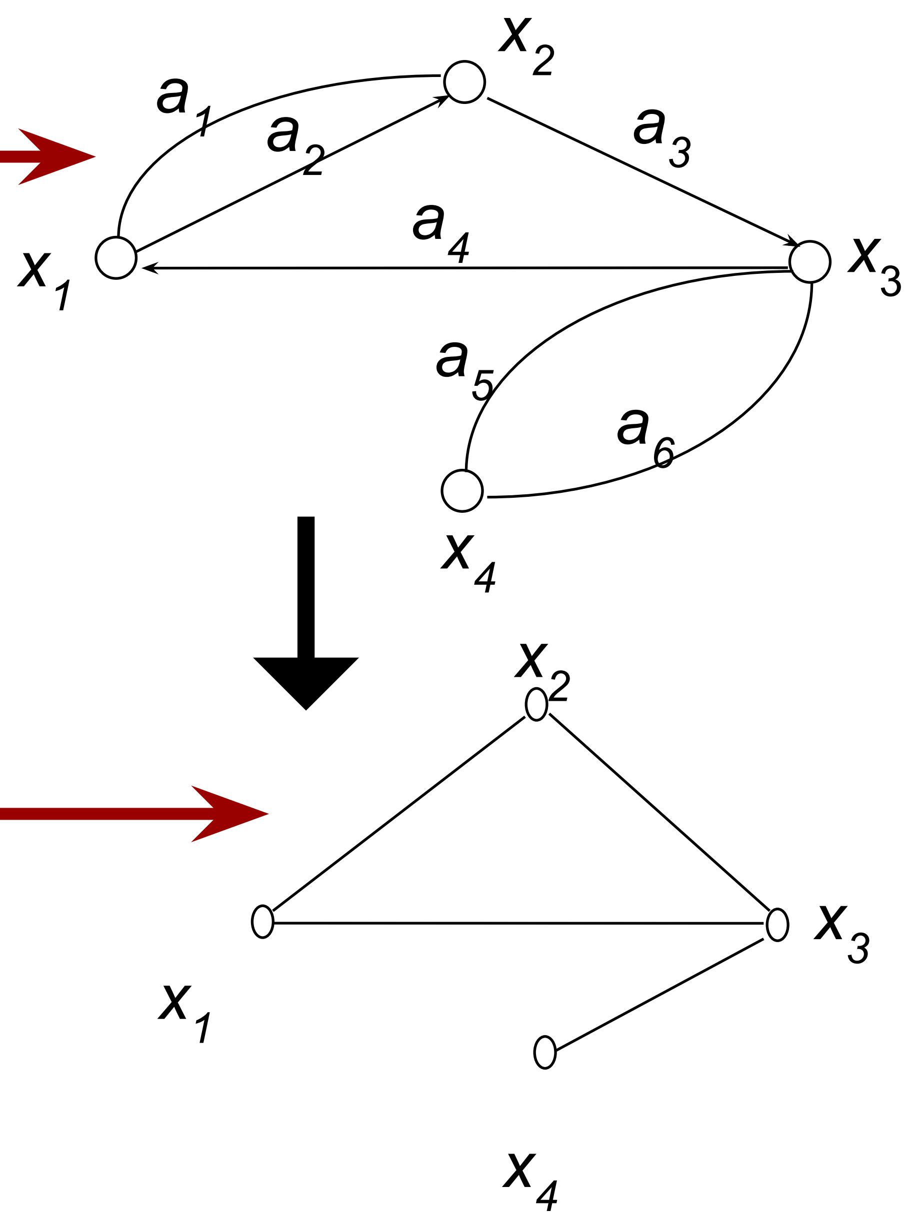
Смешанный граф

Граф, в котором присутствуют и ребра, и дуги называется ***смешанным***



Дубликат или неориентированный двойник

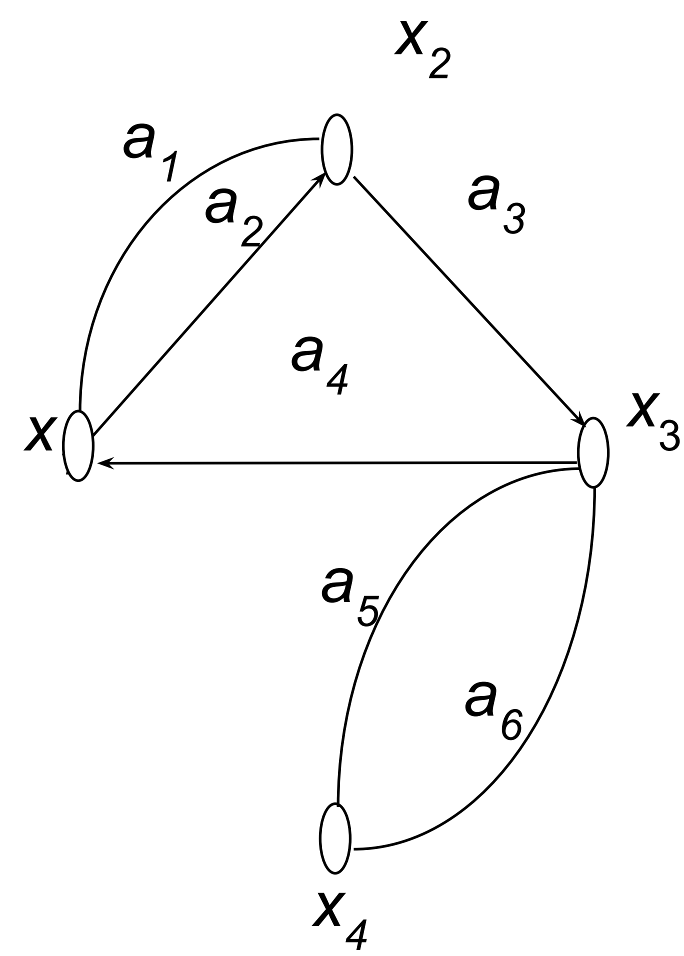
В случае когда мы хотим пренебречь направленностью дуг, то неориентированный граф, соответствующий G, будет обозначаться □G и называться **неориентированным дубликатом** или **неориентированным двойником**



Инцидентность вершин и дуг

Дуга a_i может быть представлена упорядоченной парой вершин (x_n, x_k), состоящей из начальной x_n и конечной x_k вершин.

Например, дуга a_1 задается парой вершин (x_2, x_1).



Если x_n, x_k — концевые вершины дуги a_i, то говорят, что вершины x_n и x_k ***инцидентны* дуге a_i**

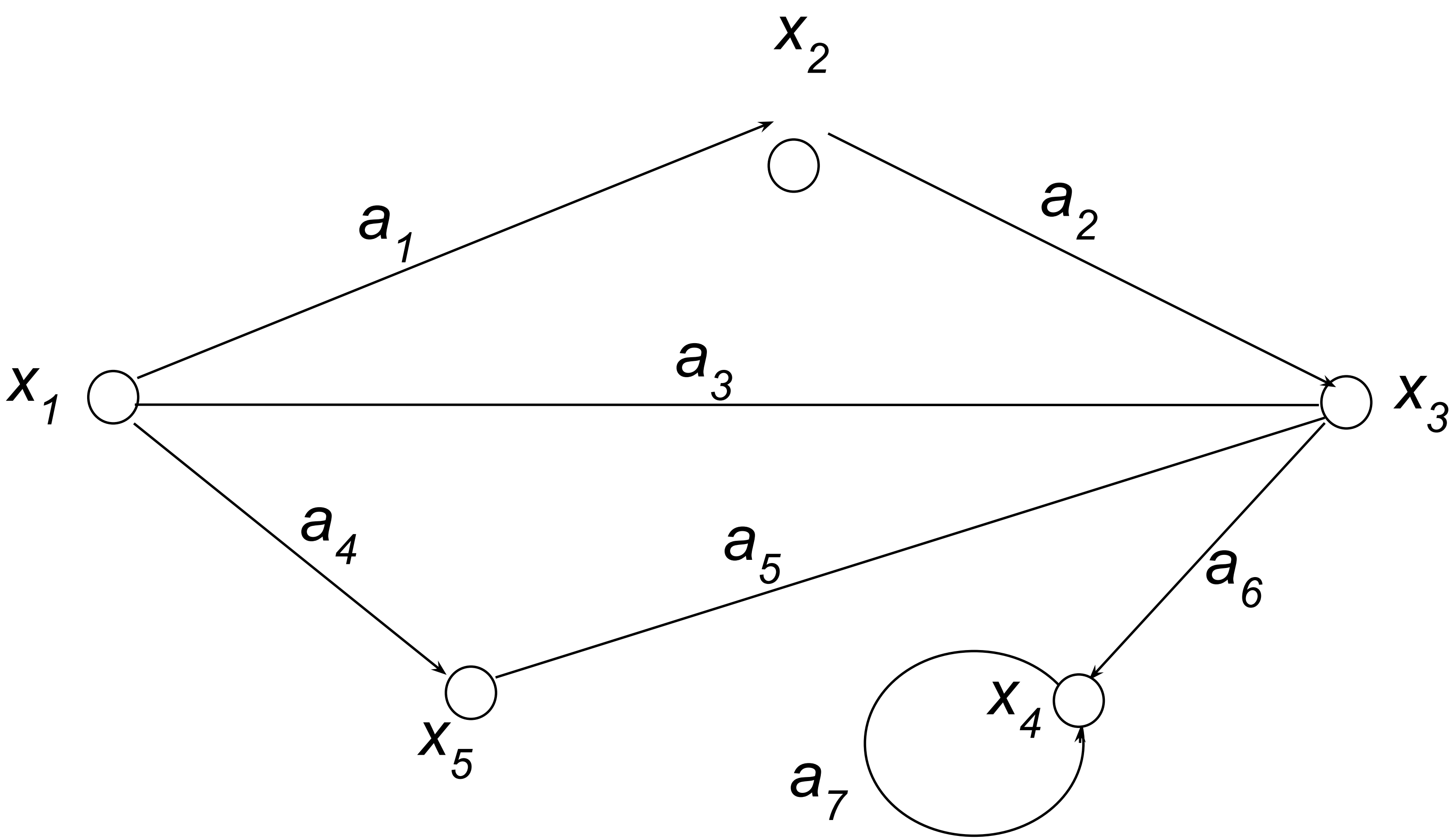
или

дуга a_i **инцидентна вершинам** x_n и x_k.

Петля

Дуга, у которой начальная и конечная вершины совпадают, называется *петлей*.

В графе G_3 дуга a_7 является петлей.



Характеристики вершин

Полустепенью исхода вершины $\boldsymbol{x_i}$ — $\boldsymbol{d_0(x_i)}$ называется количество дуг, исходящих из этой вершины.

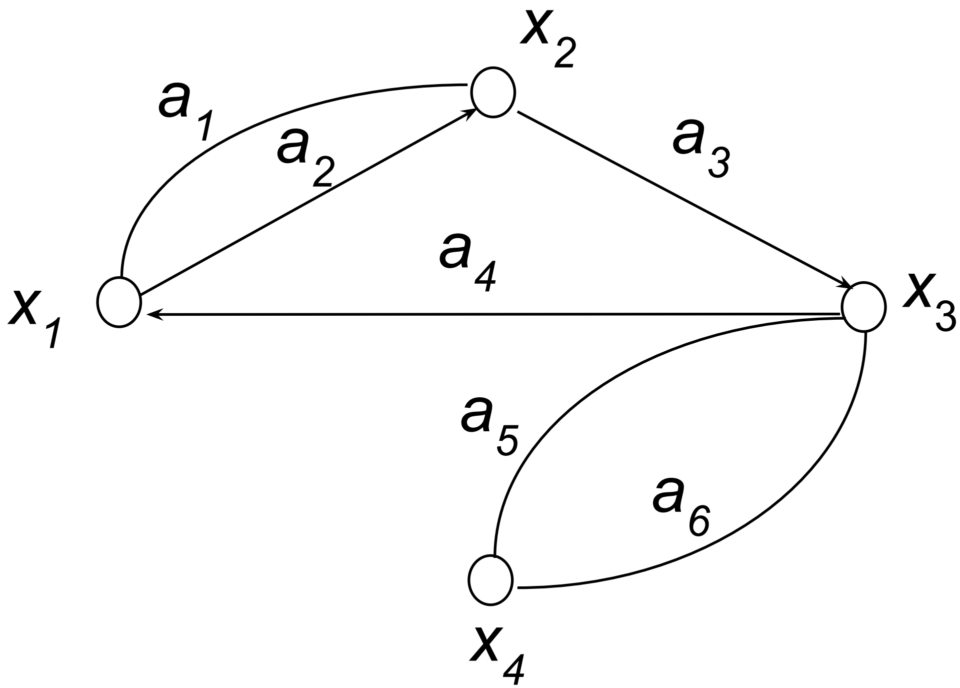


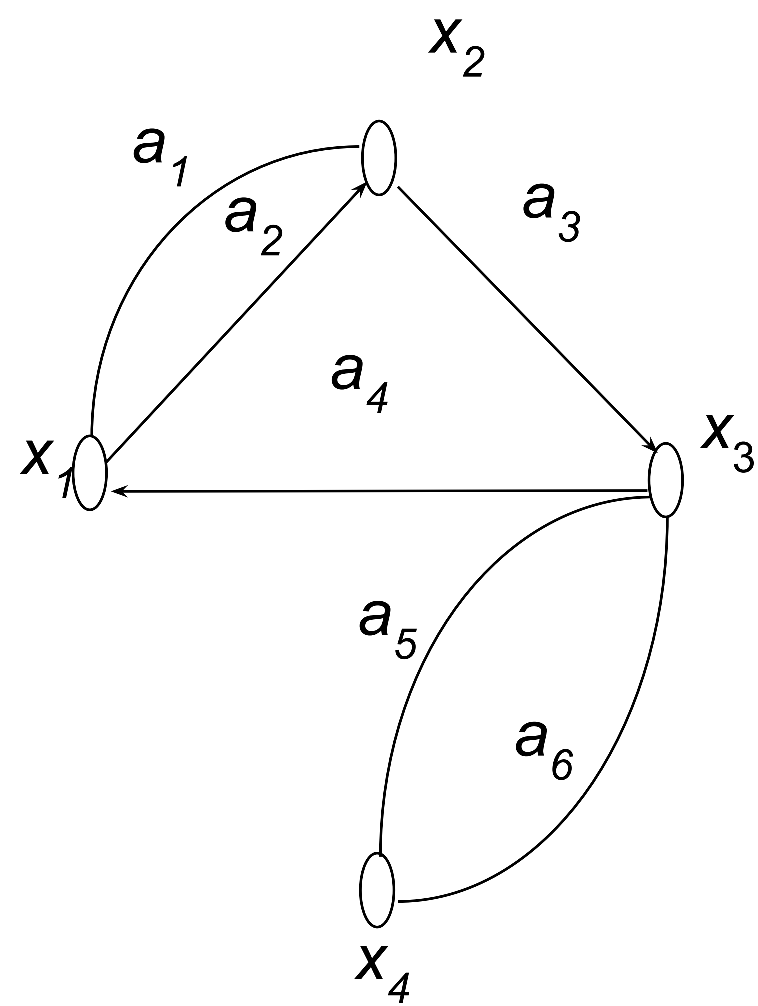
Рис. 2,а

Например для орграфа G_1(рис.2,а) характеристики полустепеней исхода следующие:

$d_0(x_1)=1$, $d_0(x_2)=2$, $d_0(x_3)=2$, $d_0(x_4)=1$.

Характеристики вершин

Полустепенью захода **вершины** x_i — $d_t(x_i)$ **называется количество дуг, входящих в эту вершину.**



Например для орграфа G_1**:**

$d_t(x_1)=2$, $d_t(x_2)=1$, $d_t(x_3)=2$, $d_t(x_4)=1$.

Характеристики вершин

Очевидно, что сумма полустепеней исхода всех вершин графа,

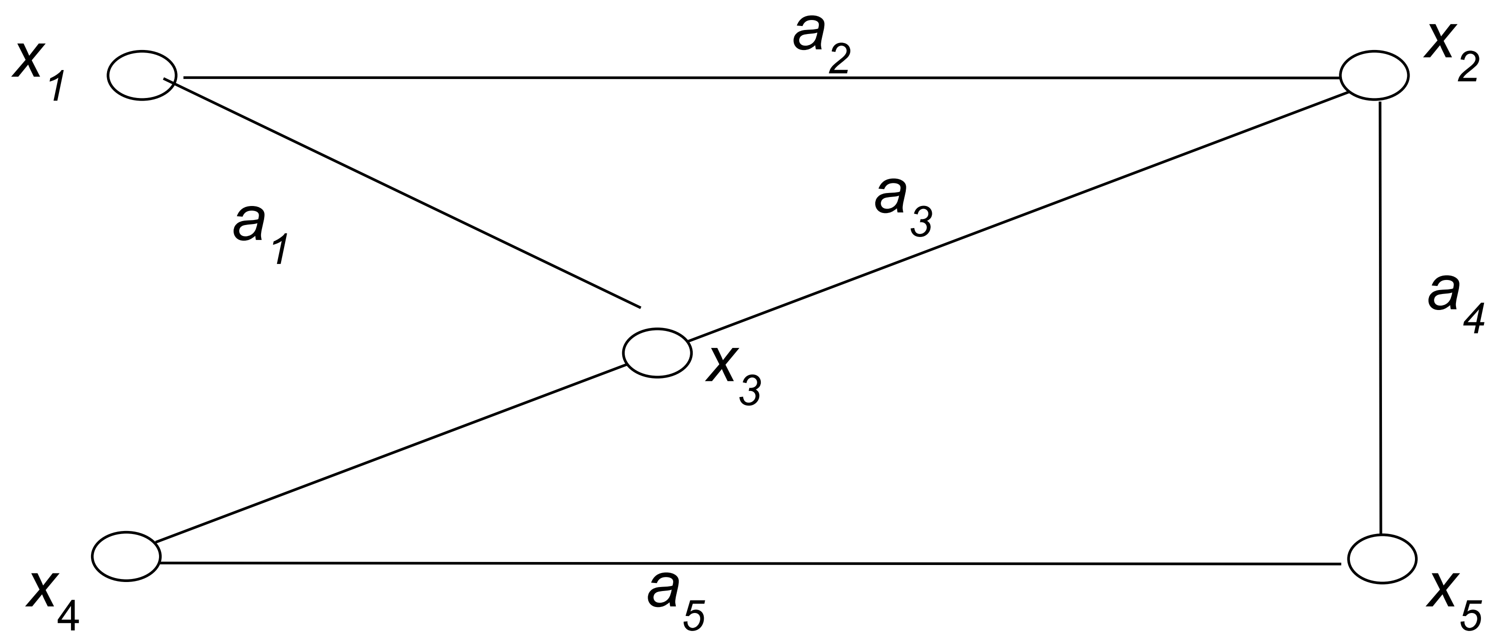
а также сумма полустепеней захода всех вершин графа равна общему числу дуг графа, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} d_o(x_i) = \sum_{i=1}^{n} d_t(x_i) = m$$

где n-число вершин графа, m-число дуг.

Характеристики вершин

Для неориентированного графа – степень вершины d (x_i)– это количество инцидентных ребер вершины x_i



Например, d (x_1)=2, d (x_2)=3, d (x_3)=3…

Способы описания графов

Теоретико-множественное описание

Описание отображениями

Графическое

Матричное

Теоретико-множественное представление графов

Граф описывается явным перечислением элементов множеств вершин и дуг.

Примеры описания приведены для орграфов на рис.3 и рис. 4.

$G_4=(X, A)$, где $X = \{ x_i \}$, i=1,2,3,4 - множество вершин;

$A = \{ a_i \}$, i=1,2,...,6 - множество дуг, причем $A=\{(x_1, x_2), (x_4, x_2), (x_2, x_4), (x_2, x_3), (x_3, x_3), (x_4, x_1)\}$.

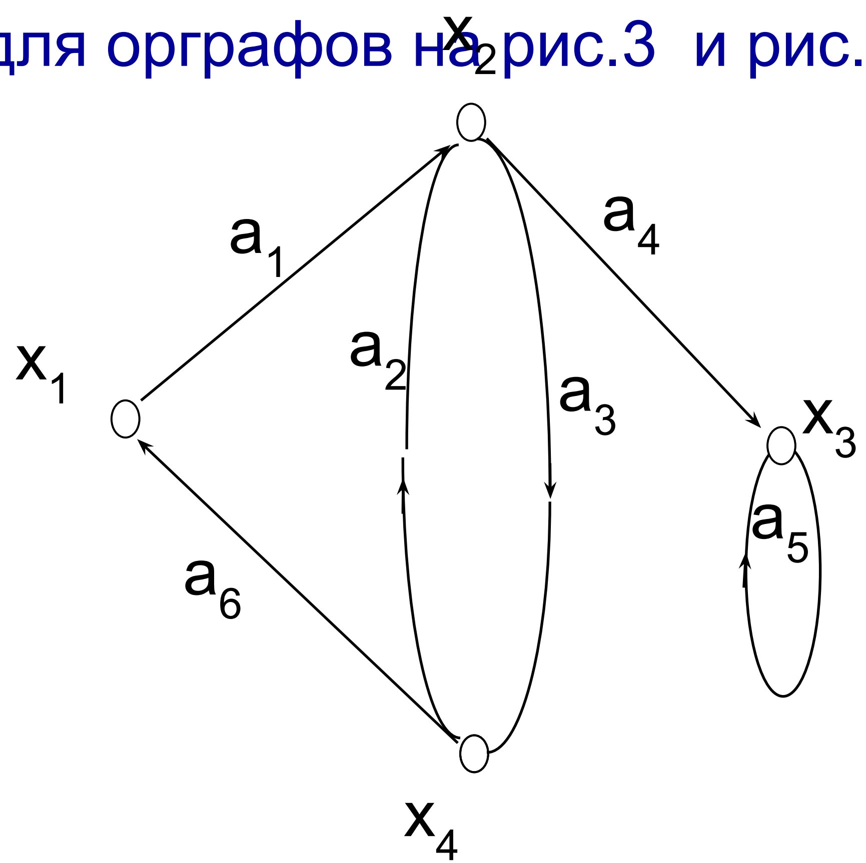


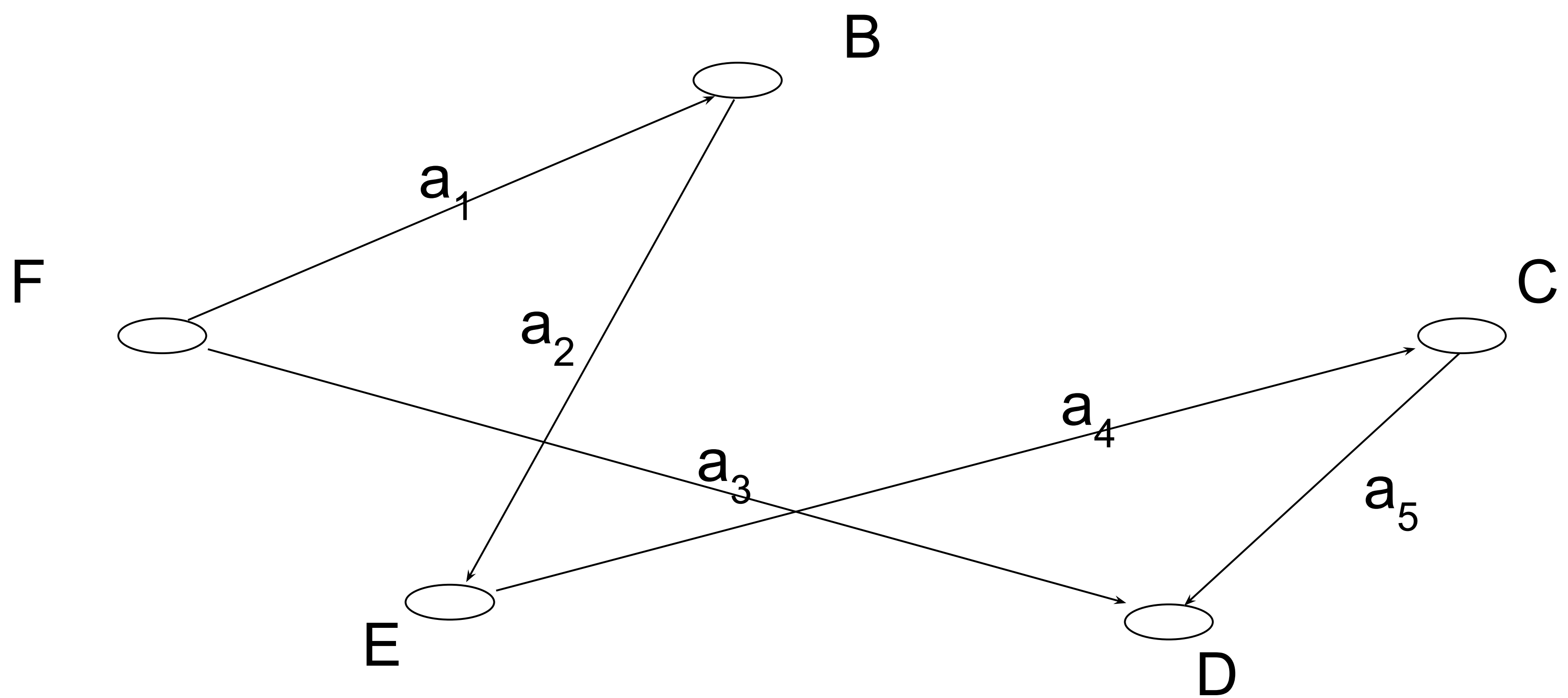
Рис. 3

Орграф G_5

G_5=(X, A), где X={B, C, D, E, F} - множество вершин графа,

A={a_i}, i=1,2,...,5 - множество дуг графа,

причем a_1=(F, B), a_2=(B, E), a_3=(F, D), a_4=(E, C), a_5=(C, D).



Задание графов отображениями

Описание графов состоит в задании множества вершин X и соответствий **Г** или отображений для каждой вершины.

Соответствием **Г** называется отображение множества X в X,

Отображением вершины $\boldsymbol{x_i}$ — **Г**(x_i) является множество вершин, в которые существуют дуги из вершины x_i, то есть

$$Г(x_i)=\{\, x_j : \exists \text{ дуга } (x_i,)\; x_j \in A\}$$

.

Задание графов соответствием

Так для орграфа на рис. такое описание :

G =(X, Г),

где $X=\{x_i\}$, $i=1,2,...,4$ - множество вершин,

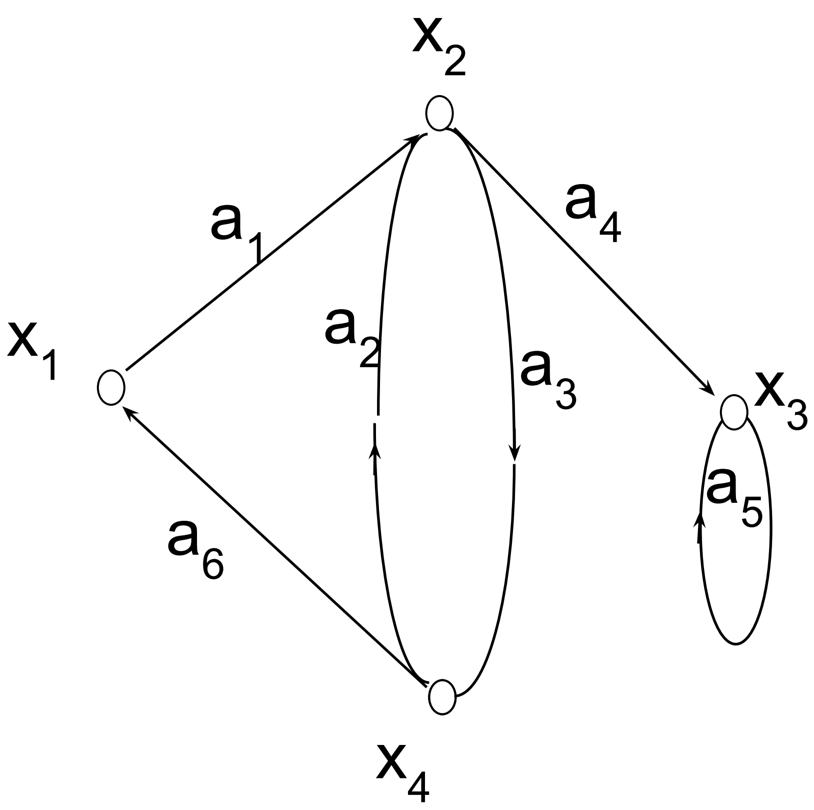
$\mathbf{Г}(x_1)=\{ x_2 \}$,

$\mathbf{Г}(x_2)=\{ x_3, x_4 \}$,

$\mathbf{Г}(x_3)=\{ x_3 \}$,

$\mathbf{Г}(x_4)=\{ x_1, x_2 \}$

- отображения.



Задание графов соответствием

Для неориентированного

или

смешанного графов предполагается,

что каждое ребро как бы заменяется двумя противоположно направленными дугами.

Например, для графа на рис.2,б : **Г** $(x_2)=\{ x_1, x_3, x_5 \}$,

Г$(x_4)=\{ x_3, x_5\}$ и т.д.

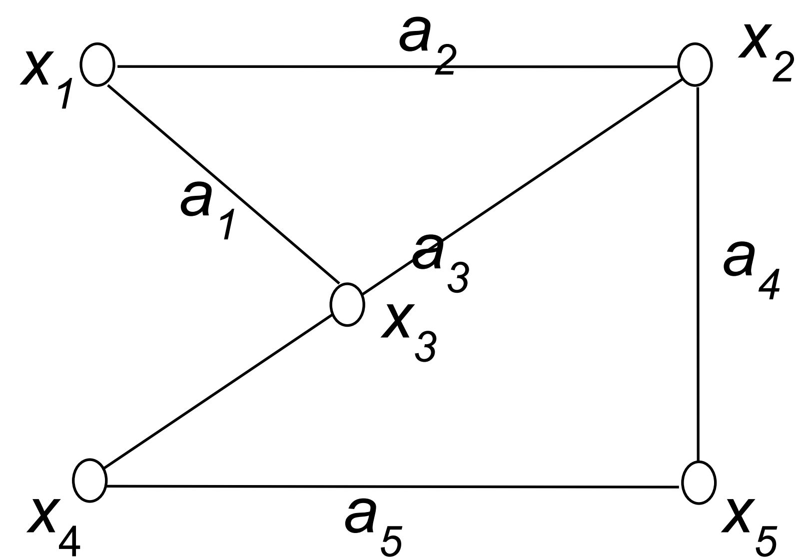


Рис. 2,б

Матричное представление графов

Для обработки на ЭВМ графы удобно представлять в виде **матриц смежности и инциденций**.

Матрица смежности - это квадратная матрица размерностью $n \times n$,

где n - число вершин графа, однозначно представляющая его структуру.

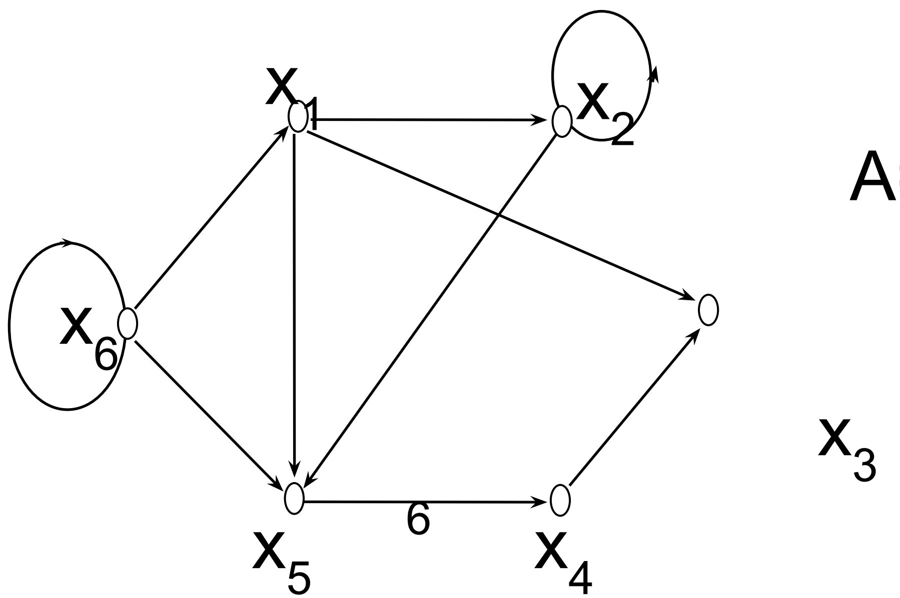
$A=\{a_{ij}\}$, $i,j = 1,2,...,n$, причем

$a_{ij}=1$, если $\exists$ дуга (x_i, x_j),

$a_{ij}=0$, если нет дуги (x_i, x_j).

Матрица смежности

Так для графа на рис. матрица смежности выглядит так:



а)

A=

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	1	0
x_2	0	1	0	0	1	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	0
x_6	1	0	0	0	1	1

б)

Матрица смежности

По матрице смежности можно найти характеристики вершин. **Так сумма элементов i-ой строки матрицы дает полустепень исхода вершины x_i,** а сумма элементов i-го столбца дает полустепень захода вершины x_i.

A=

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	1	0
x_2	0	1	0	0	1	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	0
x_6	1	0	0	0	1	1

б)

Сумма единиц главной диагонали – это количество петель.

Матрица смежности

По матрице смежности можно найти прямые и обратные отображения.

Рассмотрим i-ю строку матрицы.

Если элемент

aij=1, то элемент графа

xj входит в отображение **Г**(xi).

Например, в 2-й строке матрицы А единицы стоят в 2-м и 5-м столбцах, следовательно,

Г(x2)={ x2, x5}.

A=

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	1	0
x_2	0	1	0	0	1	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	0
x_6	1	0	0	0	1	1

б)

Матрица инциденций

Матрица инциденций - это прямоугольная матрица размером $n \times m$,

где n- количество вершин графа, а m - количество дуг графа.

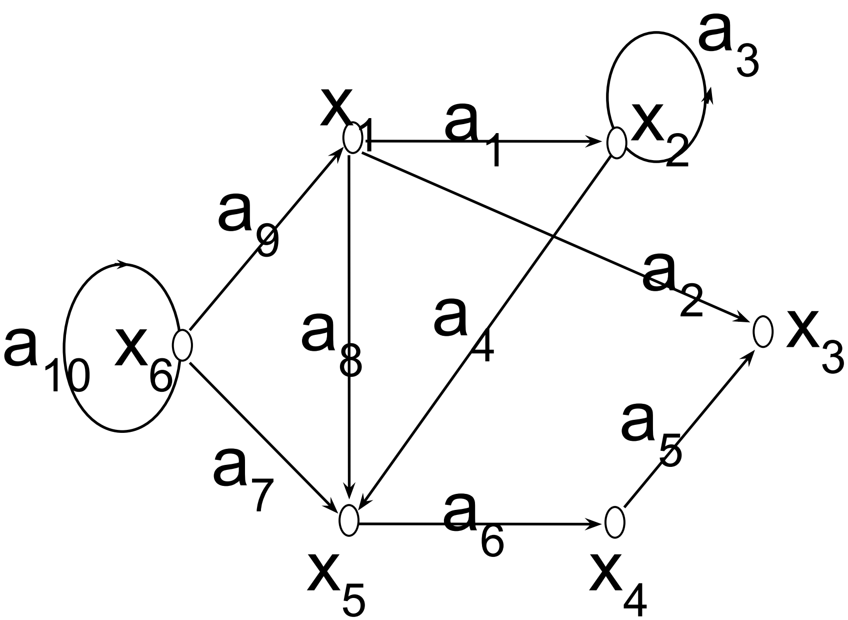
Обозначается матрица инциденций

$$B=\{ b_{ij} \}, i=1,2,...,n, \; j=1,2,...,m.$$

Каждый элемент матрицы :

b_{ij}= 1, если x_i является начальной вершиной дуги a_j,
b_{ij}= -1, если x_i является конечной вершиной дуги a_j,
b_{ij}= 0, если x_i не является концевой вершиной дуги a_j или если a_j является петлей.

Матрица инцидeнций



Для того, чтобы пометить вершину, содержащую петлю, можно в этом столбце поставить * или любой другой символ.

B =

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0
x_2	-1	0	*0	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	-1	0	1	-1	-1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	*0

в)

Матрица инциденций

По матрице инциденций можно найти характеристики графа:

Число 1 в i-ой строке– это $d_0(x_i)$

- Число -1 в i-ой строке– это $d_t(x_i)$

- Число нулевых столбцов – это число петель в графе.

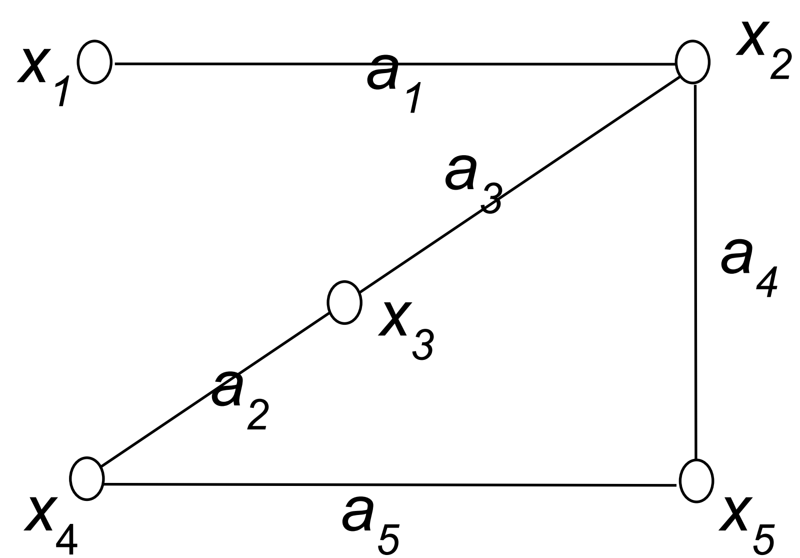
B =

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0
x_2	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	-1	0	1	-1	-1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Матрица инциденций

Для неориентированного графа, матрица инциденций определяется так же, за исключением того ,что все элементы, равные -1, заменяются на 1.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	1	0	0	0	0
x_2	1	0	1	1	0
X_3	0	1	1	0	0
X_4	0	1	0	0	1
x_5	0	0	0	1	1



Операции над графами

Рассмотрим семь операций над графами,

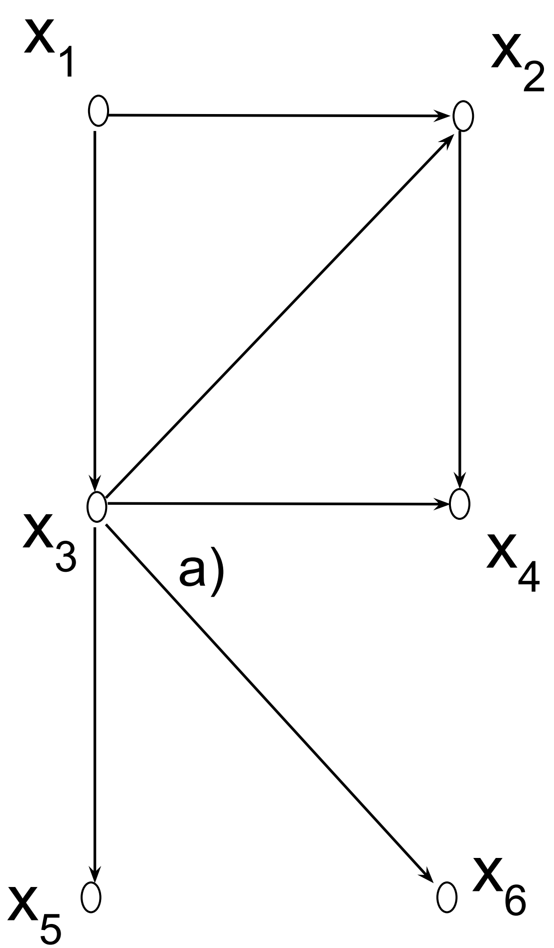
три из которых являются бинарными, включающими два графа,

а остальные четыре - унарные, то есть определены на одном графе.

Исходные графы G_1 и G_2 показаны на рис. 6, а,б. $G_1=(X_1, A_1)$, где $X_1=\{x_i\}$, $i=1,2,...,6$, $A=\{a_i\}$, $i=1,2,...,7$. и $G_2=(X_2, A_2)$, где $X_2=\{x_i\}$, $i=1,2,...,6$, $A=\{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{10}\}$.

Матрицы смежности графов показаны на рис.6,в и 6,г соответственно. (Чтобы не загромождать рисунок , нули не показаны).

Операции над графами Исходные графы

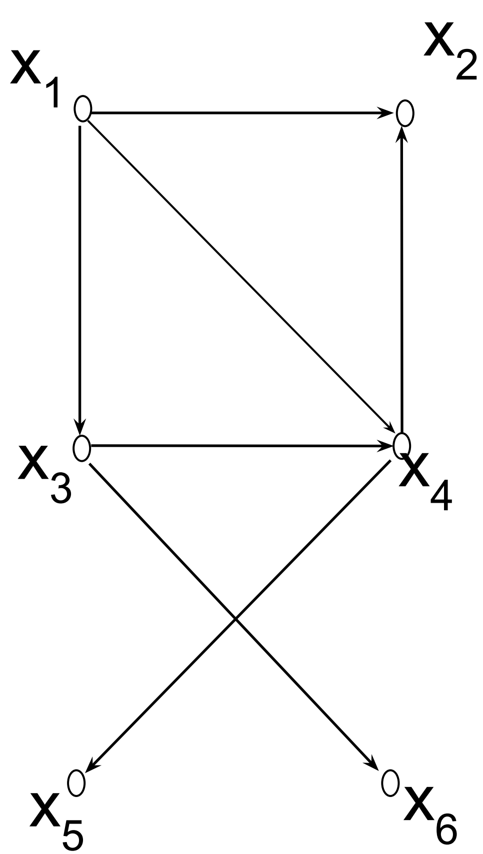


$A_1=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1			
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4						
x_5						
x_6						

в)

Операции над графами.Исходные графы



б)

$A_2=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2						
x_3				1		1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

г)

Операции над графами. Объединение

Объединение графов G_1 и G_2, обозначаемое как

$$G_1 \cup G_2,$$

представляет такой граф

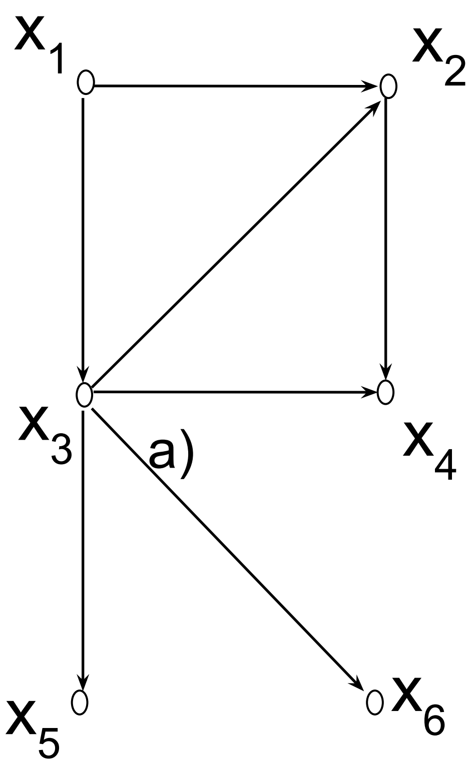
$$G_3=(X_1 \cup X_2,\ A_1 \cup A_2),$$

что множество его вершин является объединением X_1 и X_2,

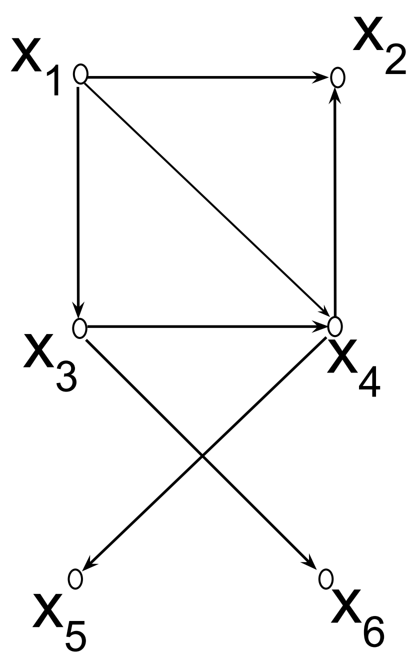
а множество ребер - объединением A_1 и A_2.

Граф G_3, полученный операцией объединения графов G_1 и G_2, показан на рис. 7а, а его матрица смежности - на рис. 7б.

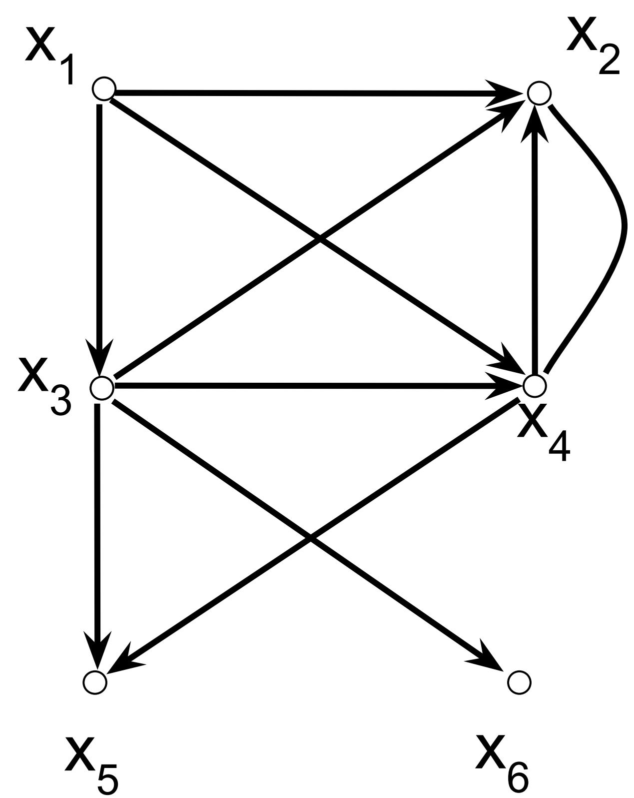
Объединение



G_1



G_2



$G_1 \cup G_2$

Объединение

$A_1=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1			
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4						
x_5						
x_6						

$A_2=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2						
x_3				1		1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

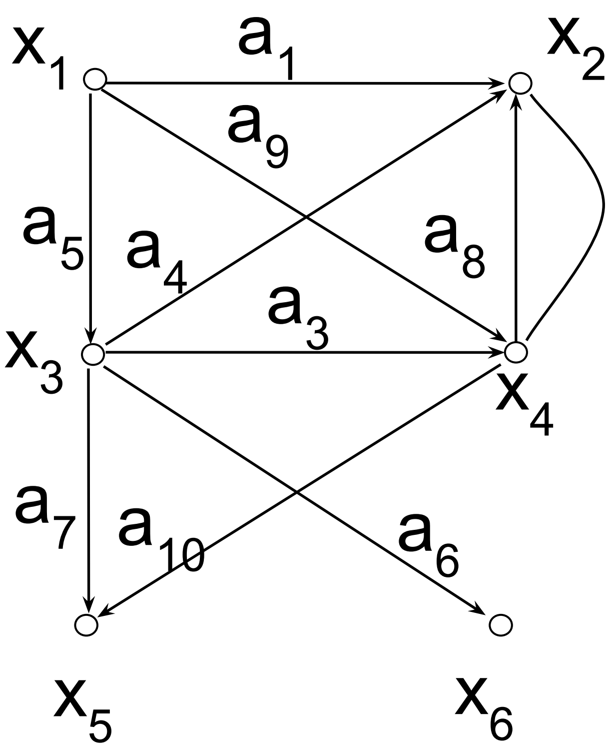
Объединение

A_3=

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

г)

Объединение



G1 ∪ G2

$A_3 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

б)

Рис. 7

Пересечение G1 ∩G2

Пересечение **графов G_1 и G_2**, обозначаемое как

$$G_1 \cap G_2,$$

представляет собой граф

$$G_4=(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2).$$

Таким образом, множество вершин графа G_4 состоит из вершин, присутствующих одновременно в G_1 и G_2.

Операция пересечения графов $G_1 \cap G_2$ показана на рис. 8.

Пересечение G1 ∩G2

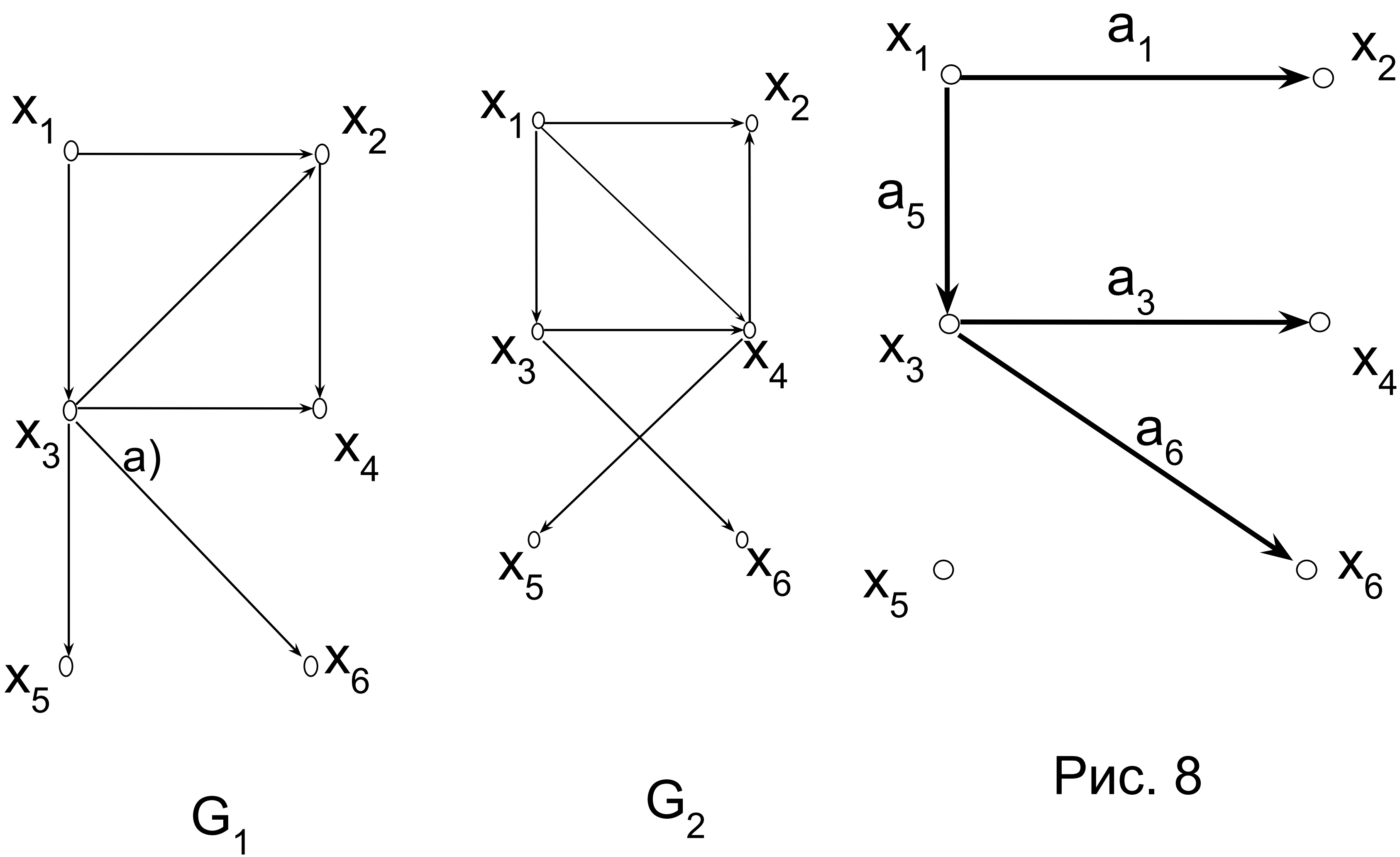


Рис. 8

Пересечение G1 ∩G2

$A_1 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1			
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4						
x_5						
x_6						

$A_2 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2						
x_3				1		1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

Пересечение G1 ∩G2

A_3=

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1			
x_2						
x_3				1		1
x_4						
x_5						
x_6						

г
)

Кольцевая сумма $G_1 \oplus G_2$

***Кольцевая** сумма* двух графов G_1 и G_2, обозначаемая как

$$G_1 \oplus G_2,$$

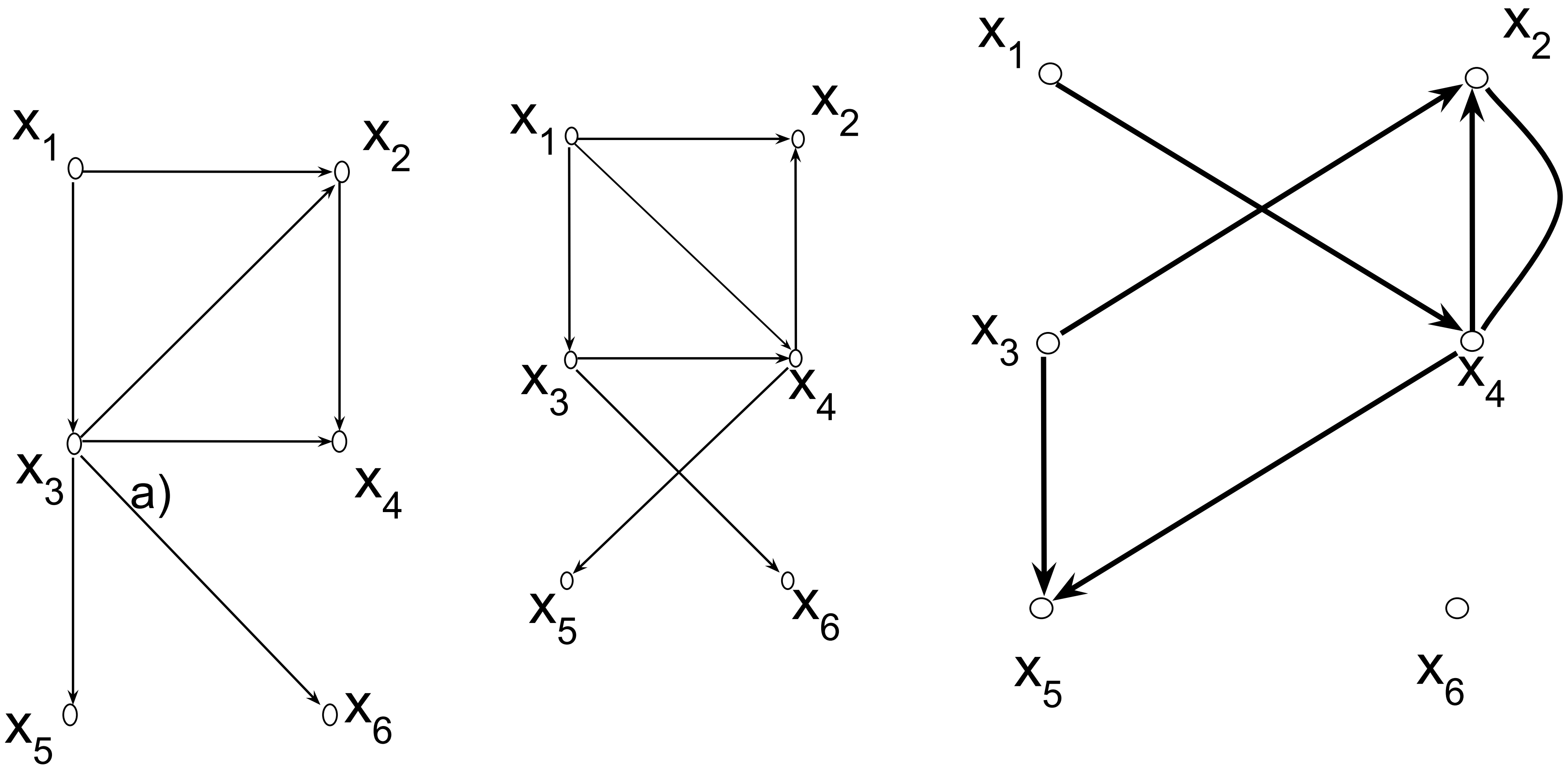
представляет собой граф G_5, порожденный на множестве ребер

$$A_1 \oplus A_2.$$

Другими словами, граф G_5 не имеет изолированных вершин и состоит только из ребер, присутствующих либо в G_1, либо в G_2, но не в обоих одновременно.

Кольцевая сумма графов G_1 и G_2 показана на рис. 9.

Кольцевая сумма $G_1 \oplus G_2$



G_1 G_2 Рис. 9

Операции над графами

Три рассмотренные операции коммутативны т.е.

$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1,$$
$$G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G1,$$
$$G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1,$$

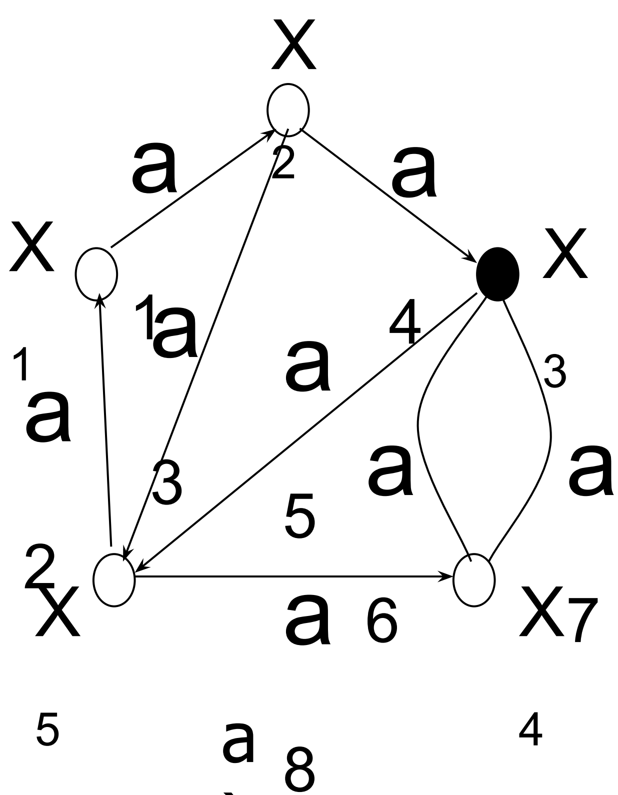
и многоместны ,

т.е. G1 ∩ G2 ∩ G3 ∩ G4∩ ... , G1 ∪ G2 ∪ G3 ∪ G4 ∪ ... и так далее.

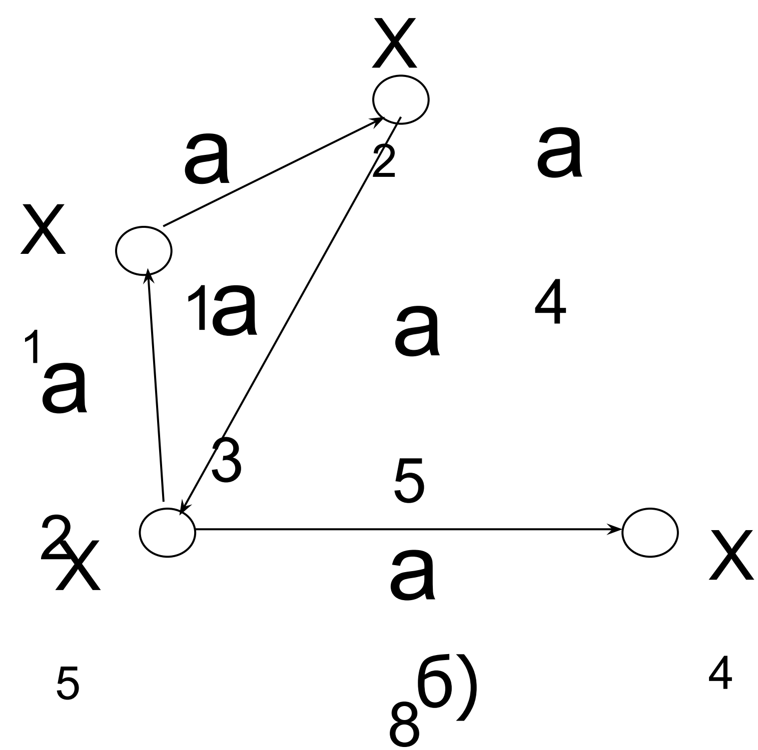
Унарные операции

Удаление вершины

Если x_i-вершина графа G=(X,A), то $G\text{-}x_i$- порожденный подграф графа G на множестве вершин $X\text{-}x_i$, т.е. $G\text{-}x_i$ является графом , получившимся после удаления из графа G вершины x_i и всех ребер, инцидентных этой вершине.



а)



б)

Удаление ребра или дуги

Если a_i-дуга графа $G=(X,A)$, то

$G-a_i$ - подграф графа G, получающийся после удаления из G дуги a_i.

Заметим, что концевые вершины дуги a_i не удаляются. Удаление из графа множества вершин или дуг определяются как последовательное удаление определенных вершин или дуг.

Удаление ребра или дуги

Удаление дуг a_4 и a_7 показано на рис.11 б.

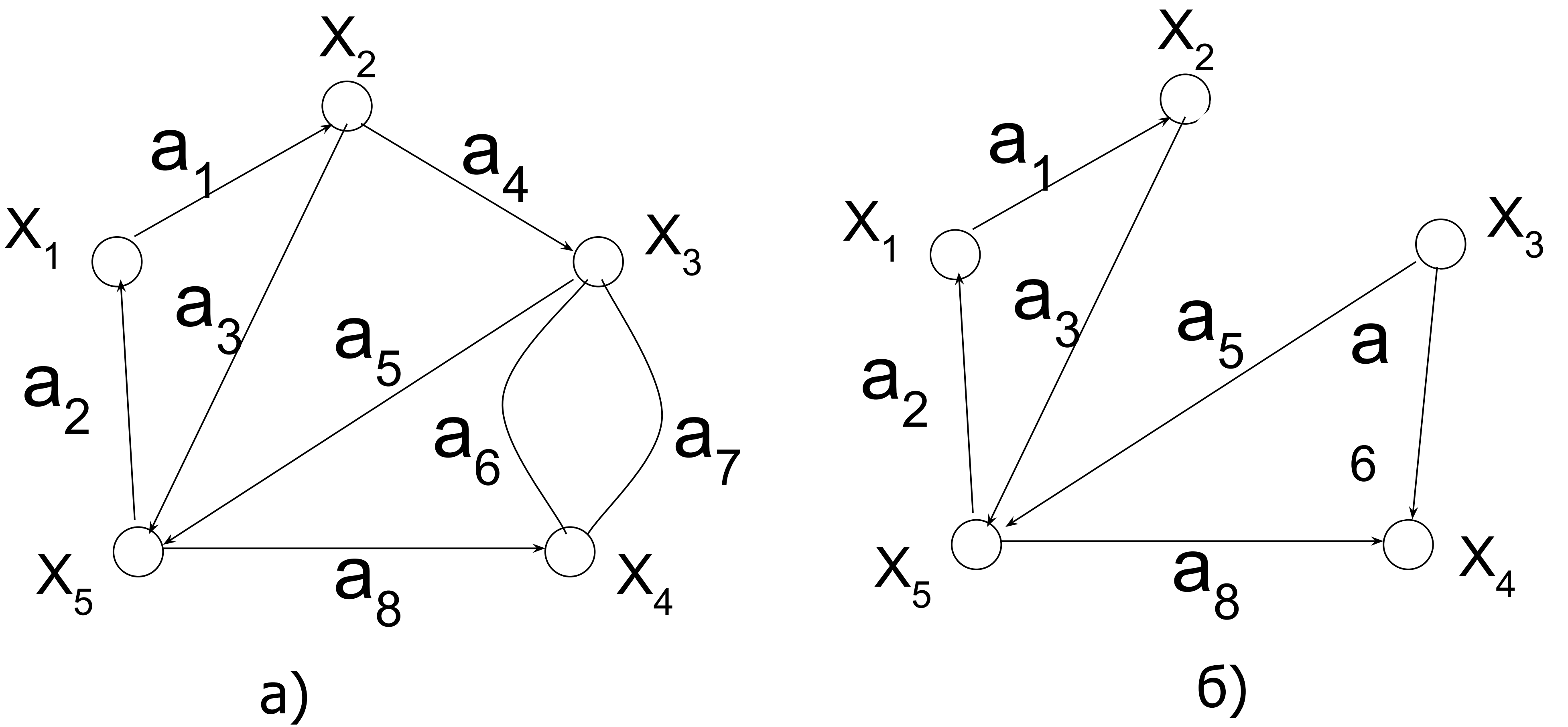


Рис. 11

Замыкание или отождествление

Говорят, что пара вершин x_i и x_j в графе G замыкается (или отождествляется), если они заменяются такой новой вершиной, что все дуги в графе G, инцидентные вершинам x_i и x_j, становятся инцидентными новой вершине.

Замыкание или отождествление

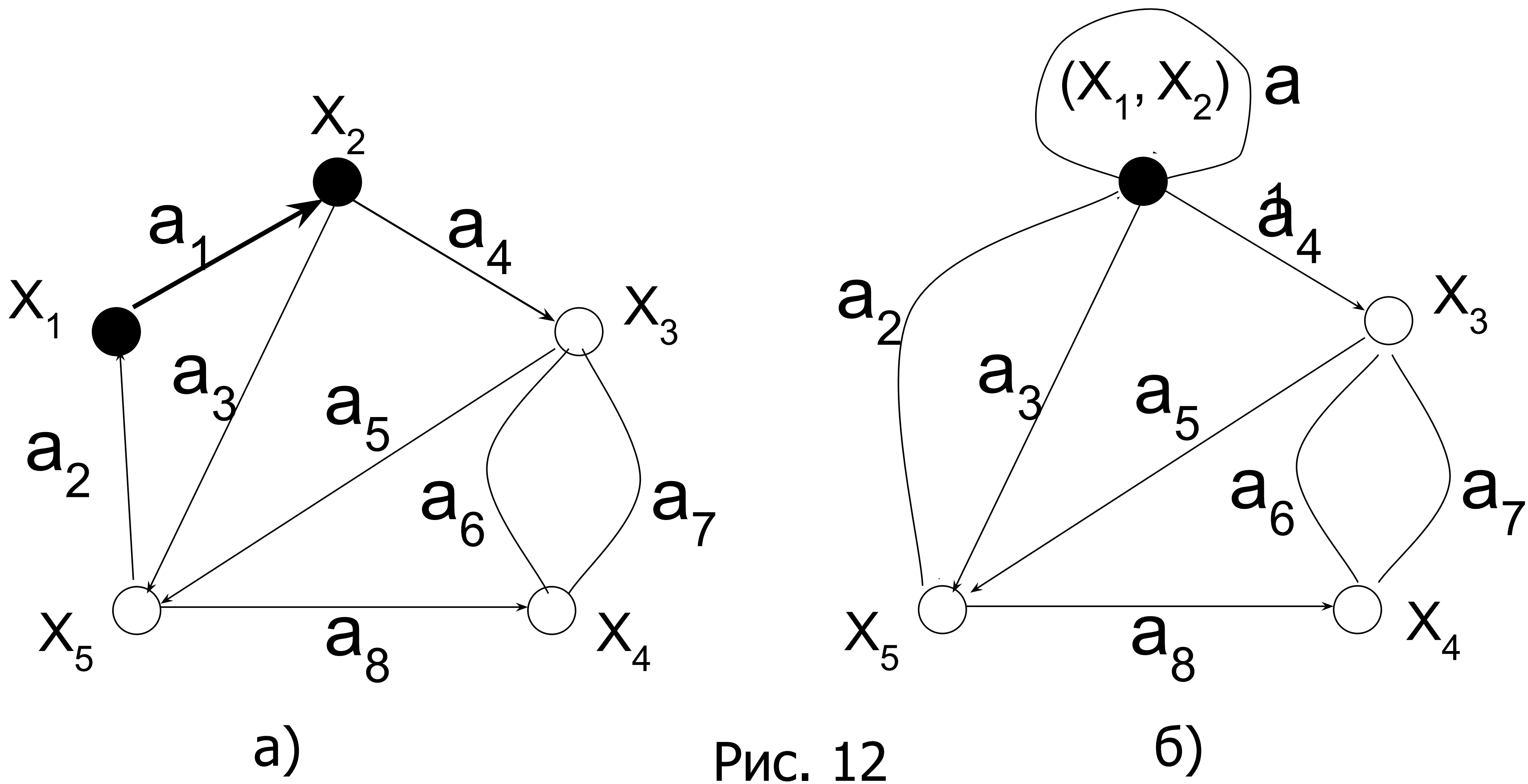


Рис. 12

Стягивание

Под стягиванием подразумевают операцию удаления дуги или ребра и отождествление его концевых вершин.

Граф, изображенный на рис.6,д получен стягиванием дуги a_1, а на рис.8,е - стягиванием дуг a_1, a_6 и a_7.

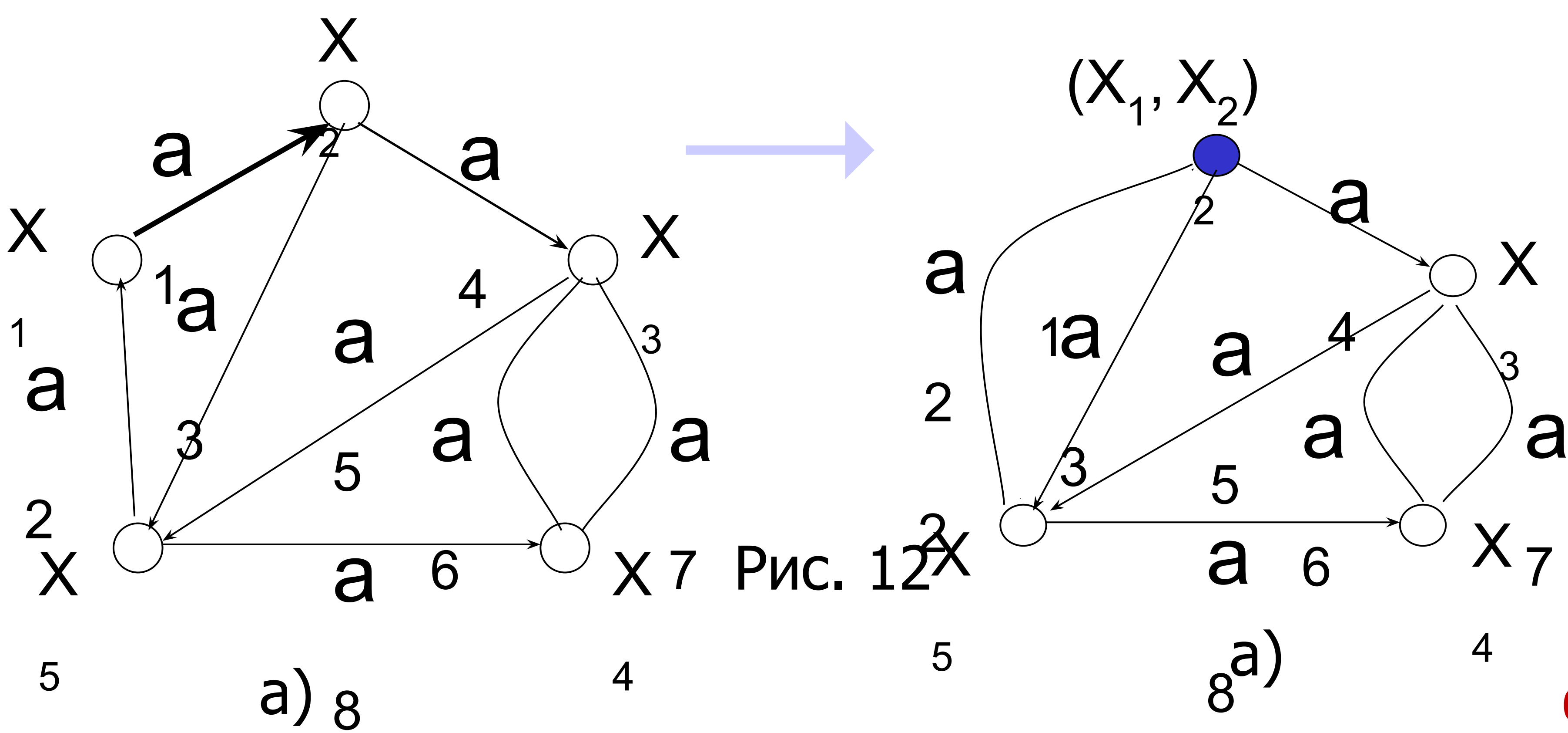


Рис. 12

Стягивание