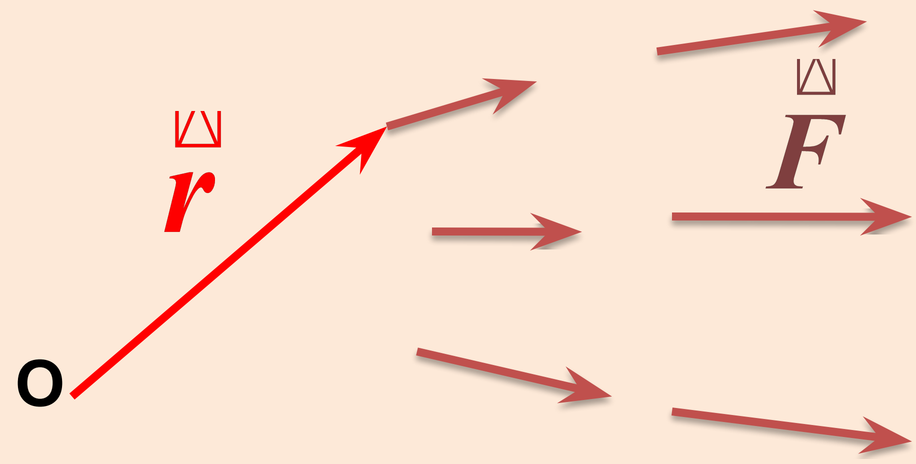
СИЛОВОЕ ПОЛЕ

Силовое поле – форма материи, связывающая частицы вещества в единые системы и передающая действие одних частиц на другие.



Каждой точке пространства сопоставляется вектор силы, который действовал бы на частицу, помещённую в исследуемую точку пространства.

Центральное силовое поле

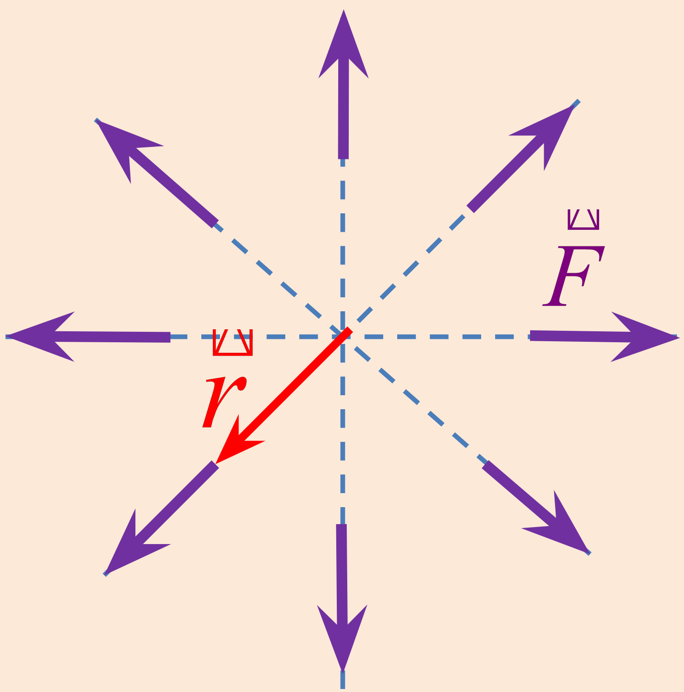
В поле центральных сил на МТ действуют силы, которые направлены вдоль прямых, проходящих через одну и ту же точку – центр сил.

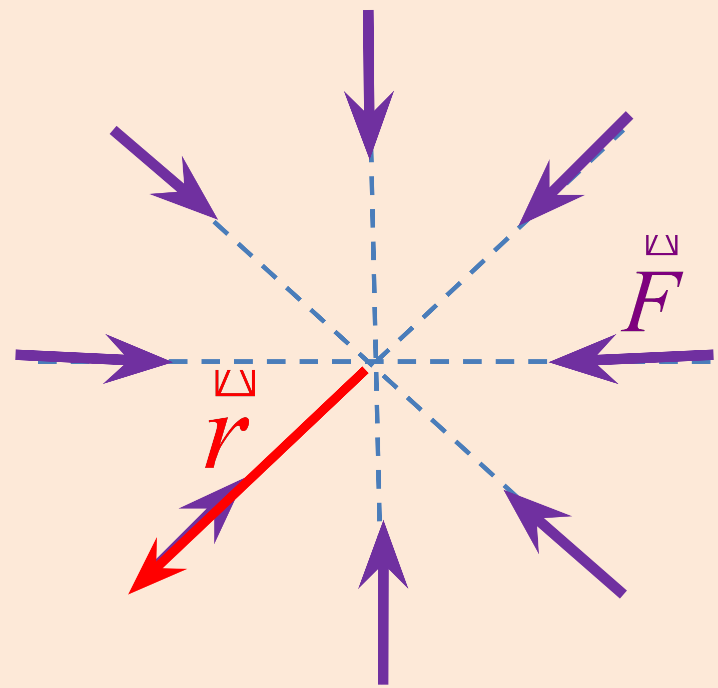
Величина этих сил зависит только от расстояния до центра сил.

$$\vec{F} = F_r \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$F_r -$ проекция силы $\vec{F}$ на радиус - вектор $\vec{r}$





$F_r > 0$ **(отталкивание)**

$F_r < 0$ **(притяжение)**

Примеры центральных сил:

•Силы тяготения в гравитационном поле Земли

$$\vec{F}_T = -G\frac{Mm}{r^2}\cdot\vec{e}_r$$

•Упругие силы

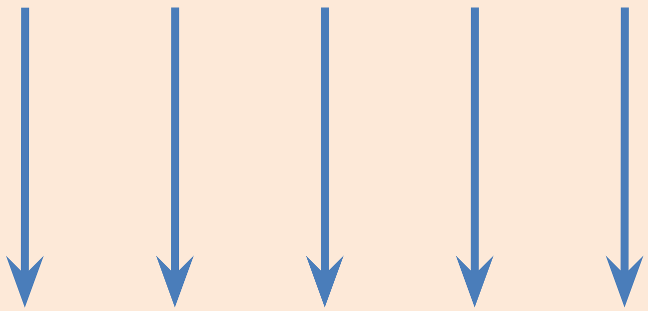
$$\vec{F}_{упр} = -k\cdot\Delta\left|\vec{r}\right|\cdot\vec{e}_r$$

•Кулоновские силы, создаваемые точечными зарядами

Однородное силовое поле

В однородном силовом поле вектор силы одинаков в каждой точке поля.

Пример: поле силы тяжести вблизи поверхности Земли.



$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Однородное поле – предельный случай центрального поля при $r \to \infty$.

ЭНЕРГ ИЯ

Энергия – общая мера различных форм движения материи.

В механике это перемещение тел в пространстве и силовое взаимодействие между телами.

Им соответствуют кинетическая и потенциальная энергии.

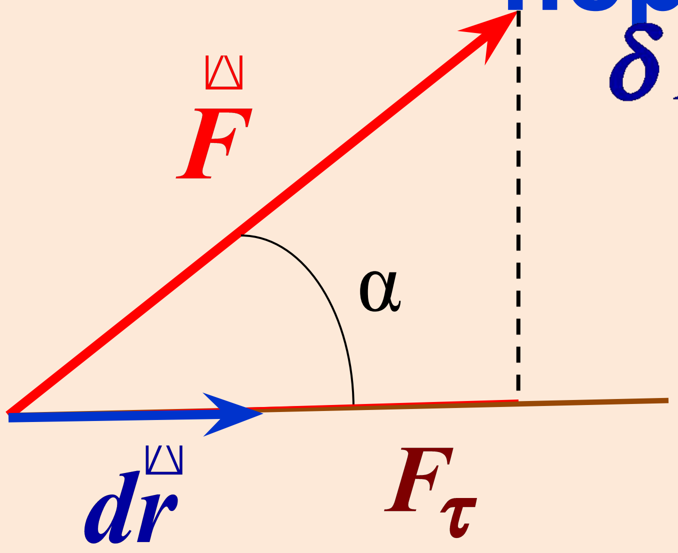
РАБОТА СИЛ ПОЛЯ

При превращении одной формы движения в другую совершается работа, равная величине перехода энергии от одного вида к другому.

$$[W]=[A]=[\text{Дж}]$$

Механическая работа

Элементарная работа равна скалярному произведению векторов силы и элементарного перемещения.



$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = F \cdot dr \cdot \cos\alpha$$

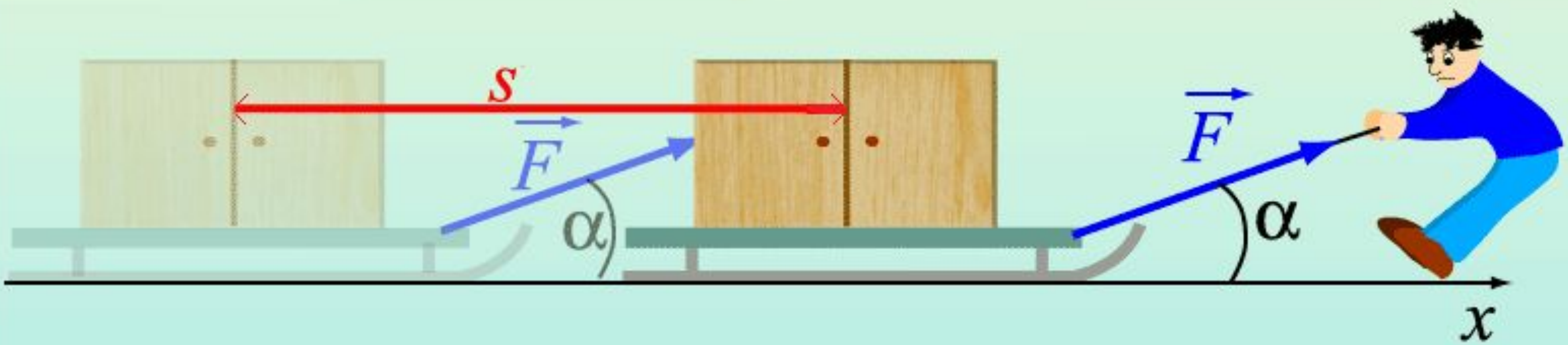
$$\delta A = F \cdot ds \cdot \cos\alpha$$

$$\delta A = F_\tau \cdot ds$$

Работа может быть как положительной, так и отрицательной. Знак работы зависит от угла между векторами силы и перемещения

$$A = F s \cos\alpha$$

Здесь $\vec{F} = const.$, $\alpha = const.$



$\alpha > 90^0$

$A < 0$

$\alpha = 90^0$

$A = 0$

$\alpha < 90^0$

$A > 0$

Полная работа переменной силы:

$$A = \int dA \qquad A = \int F\, ds \cos\alpha$$

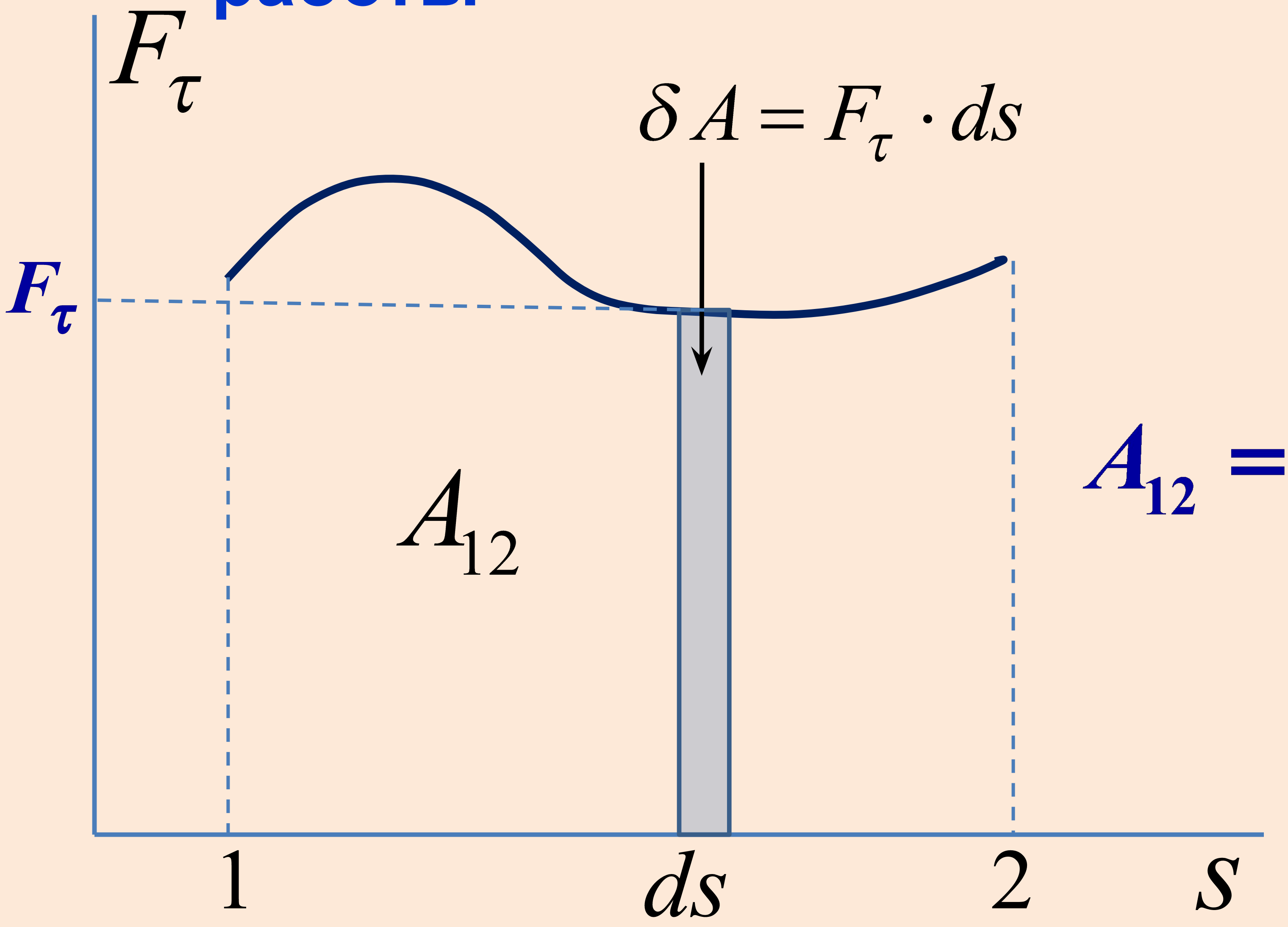
$$A = \int F_\tau ds \qquad A = \int \left(\vec{F}, d\vec{r}\right)$$

Полная работа **постоянной** силы:

$$A = \int F_\tau ds = F_\tau \int ds$$

$$A = F_\tau \cdot s$$

Графическое представление работы



$$A_{12} = \int_1^2 F_\tau ds$$

Мощность

Мощность равна работе, совершаемой в единицу времени.

$$N = \frac{dA}{dt}$$

$$N = \frac{F_\tau ds}{dt}$$

$$N = F_\tau v = \left(\vec{F}, \vec{v}\right)$$

$$[N] = [\text{Вт}]$$

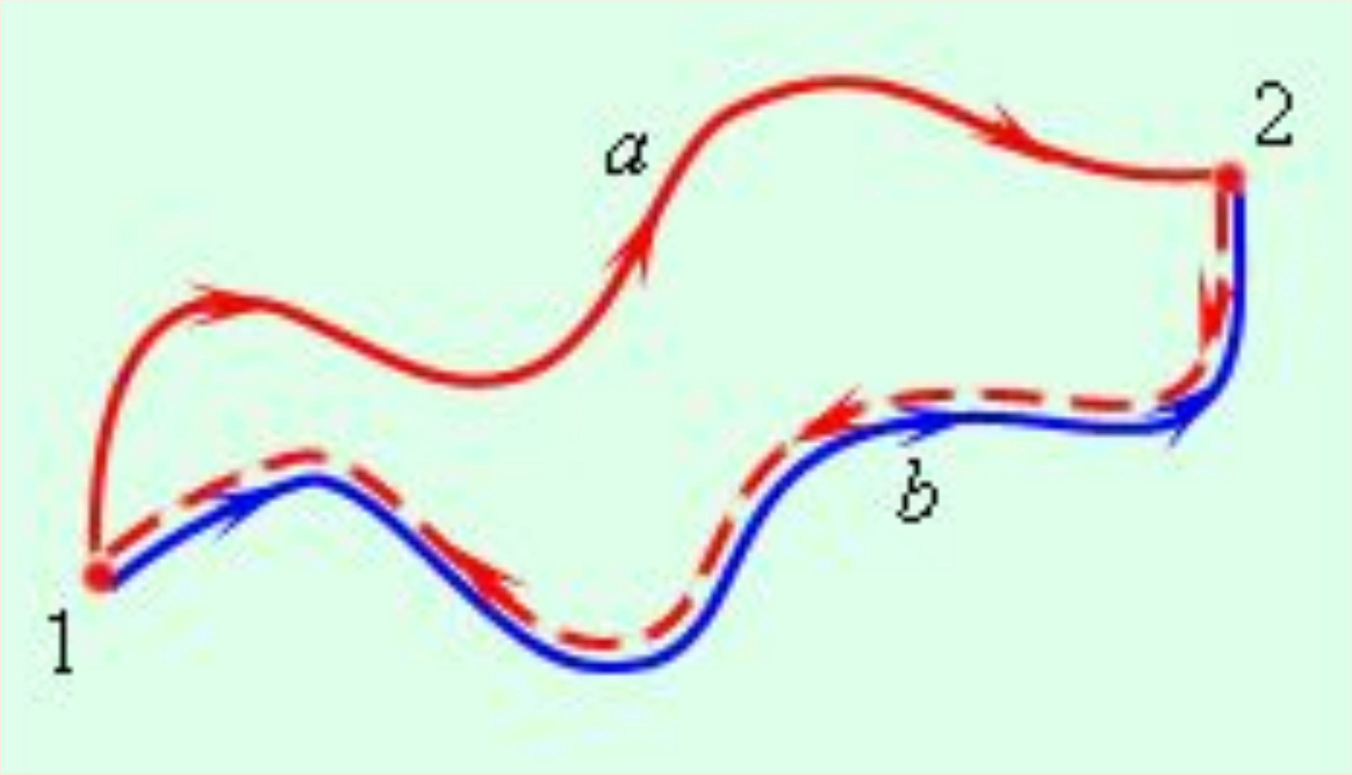
Средняя мощность : $\langle N \rangle = \dfrac{A}{t}$

Потенциальные силовые поля

Силовое поле называют потенциальным, а силы, действующие в нём, консервативными, если работа сил поля не зависит от вида траектории, а зависит только от положений тела в исходном и конечном состояниях.

Работа консервативных сил по замкнутой траектории равна нулю.

$$\oint\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=0$$



Примеры консервативных сил:

- Силы тяготения
- Упругие силы
- Кулоновские силы

Все центральные силовые поля потенциальны.

Диссипативные силы

Силы, работа которых зависит от траектории движения, не являются консервативными.

Если при действии таких сил энергия переходит в немеханические формы, то эти силы называют диссипативными.

Работа диссипативных сил **отрицательна**.

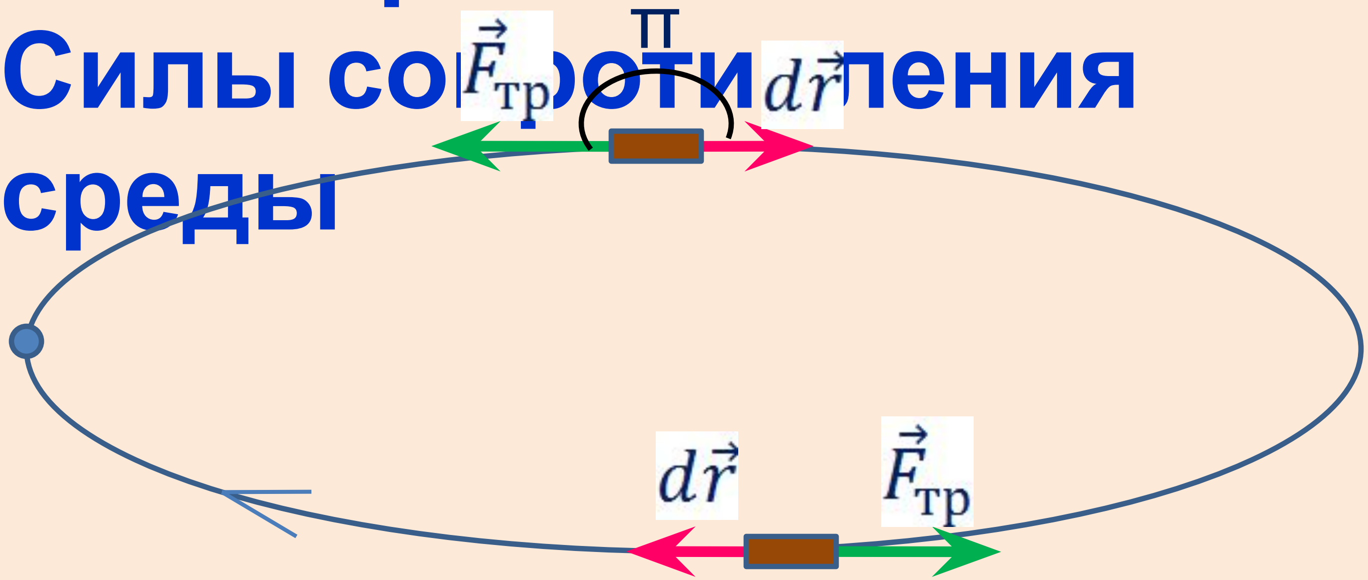
$$A_{дисс} < 0$$

Работа этих сил по замкнутой траектории **не равна нулю**.

$$\oint \left(\vec{F}_{дисс}, d\vec{r} \right) \neq 0$$

Примеры диссипативных сил:

- Силы трения скольжения
- Силы сопротивления среды



$$A = \oint \left(\vec{F}_{\text{тр}}, d\vec{r} \right) < 0$$

Кинетическая энергия

Энергию, которой обладают движущиеся тела, называют кинетической .

Обозначим: W_k.

Пусть на МТ действует сила. Найдем ее работу.

$$\delta A = F_\tau ds = \left(m \cdot a_\tau\right)\left(\mathrm{v} \cdot dt\right)$$

$$\delta A = \left(m \cdot \frac{d\mathrm{v}}{dt}\right)\left(\mathrm{v} \cdot dt\right)$$

$$\delta A = m\mathrm{v} \cdot d\mathrm{v} = d\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2}\right)$$

Работа равна приращению величины в скобках. Это кинетическая энергия.

$$\delta A = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dW_k$$

$$W_k = \frac{mv^2}{2}$$

Изменение кинетической энергии тела равно работе равнодействующей силы.

$$W_{k2} - W_{k1} = A_{12}$$

Потенциальная энергия

Потенциальная энергия – это энергия взаимодействия тел.

Обозначим: *W*п.

Потенциальная энергия тела в силовом поле

Силы поля, перемещая тело, совершают работу, равную убыли потенциальной энергии:

$$dW_{П} = -\delta A$$

$$dW_{П} = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

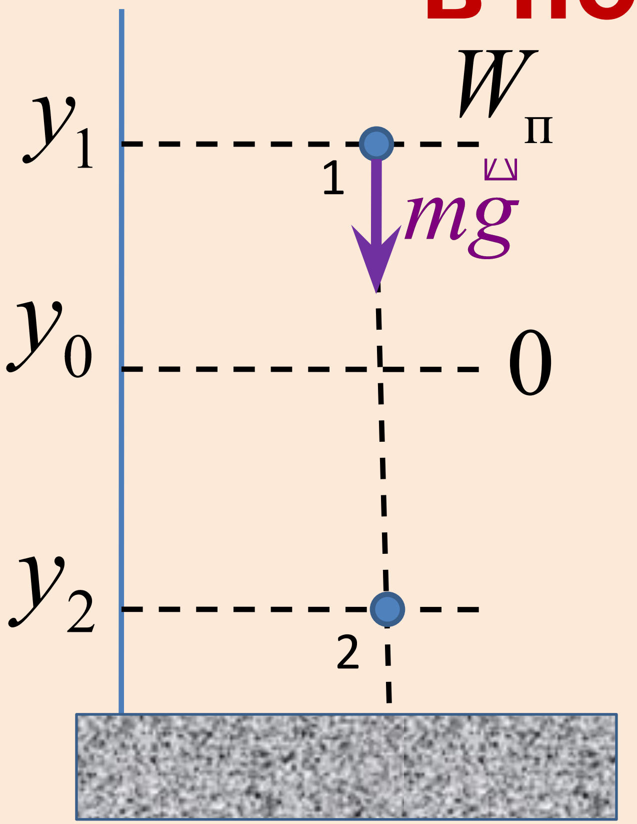
При перемещении из точки 1 в точку 2

$$W_{П2} - W_{П1} = -A_{12}$$

Формула $W_{П}$ определяется видом силового взаимодействия

$$W_{П} = -\int \left(\vec{F}, d\vec{r} \right)$$

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести



$$A = F_\tau s = mg(y_1 - y_2)$$

$$A = W_{п1} - W_{п2}$$

$$W_п = mgy + C$$

Выбере
м

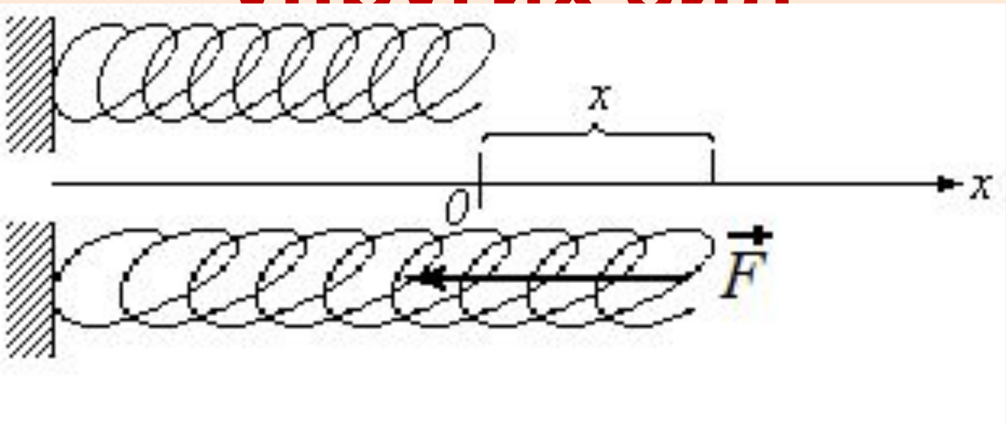
$$W_{\text{п}}(y_0) = 0$$

Тогда

$$C = -mgy_0$$

$$W_{\text{п}} = mg\left(y - y_0\right)$$

Потенциальная энергия упругих сил



$$W_{\text{п}} = -\int\left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = -\int F_x dx$$

По закону Гука

$$F_x = -kx$$

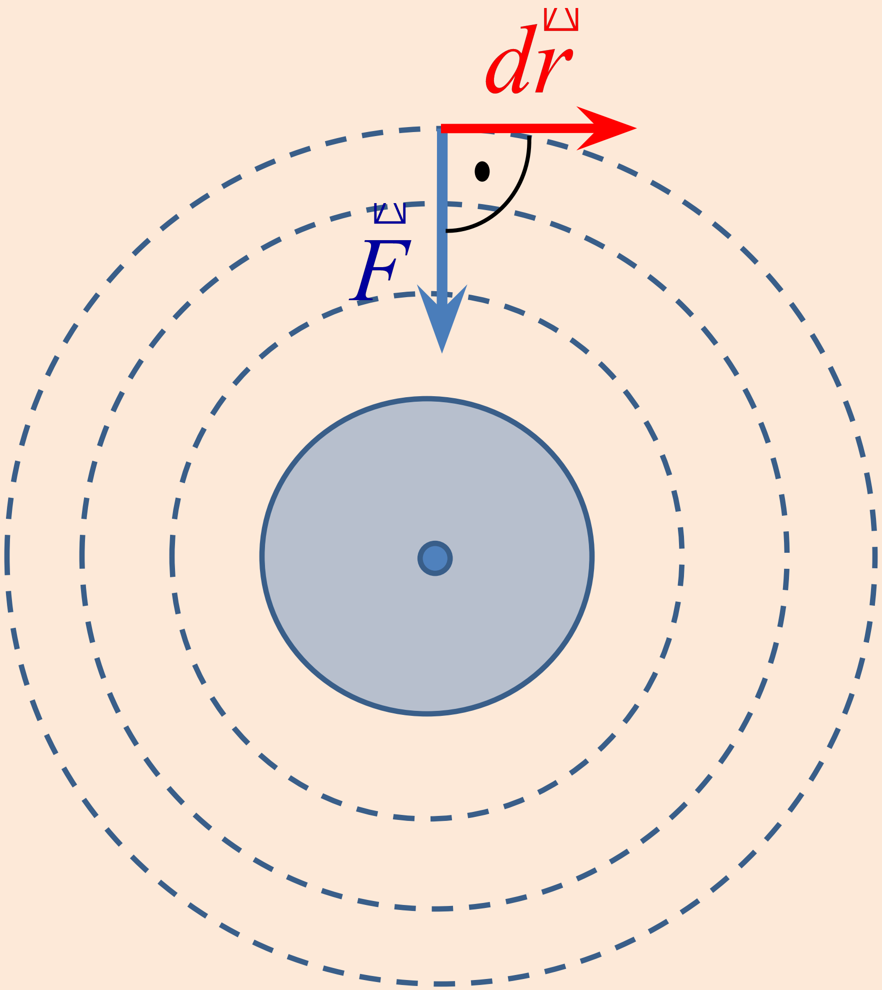
$$W_{\text{п}} = \int kx\,dx = \frac{kx^2}{2} + C$$

Выберем $W_{\text{п}}(0)=0$, тогда $C=0$ и

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}$$

Связь силы и потенциальной энергии
Градиент скалярного поля

Скалярным полем называют область пространства, каждая точка которого характеризуется некоторой скалярной величиной, например, потенциальной энергией.



<u>Поверхностью уровня</u> **скалярного поля называют совокупность точек пространства, в которых скалярная величина имеет одно и то же значение.**

Силы поля перпендикулярны к поверхности уровня Wп.

Вектор градиента скалярного поля:

$$grad\,W_П = \frac{dW_П}{dn}\vec{n}$$

$\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности уровня, направленный в сторону роста скалярной величины

Градиент скалярного поля – это вектор, по модулю равный изменению скалярной величины на единицу длины в направлении нормали к поверхности уровня. **Направлен вектор градиента перпендикулярно поверхности уровня в сторону возрастания этой скалярной величины.**

В координатной форме

$$gradW_{п} = \frac{\partial W_{п}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_{п}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_{п}}{\partial z}\vec{k}$$

Оператор набла

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Связь консервативной силы и потенциальной энергии

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}W_П$$

или

$$\vec{F} = -\nabla W_П$$

В проекциях на оси

$$F_x = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x}$$

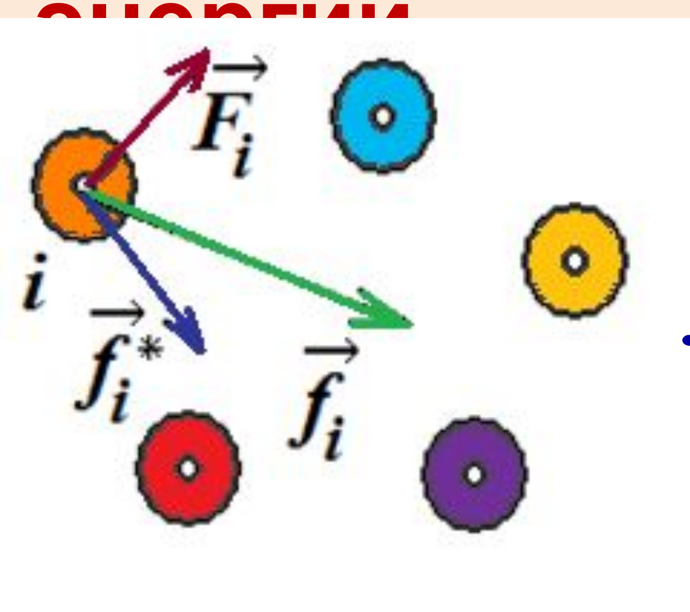
$$F_y = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z}$$

Потенциальная энергия взаимодействия системы тел

Потенциальная энергия взаимодействия – это величина, равная работе, совершаемой силами взаимодействия тел при изменении расположения тел из данного состояния в состояние, в котором потенциальная энергия взаимодействия условно принимается равной нулю.

Закон сохранения механической энергии



$\vec{f}_i$ - внутренняя консервативная сила

$\vec{f}_i^{\,*}$ - внутренняя диссипативная сила

$\vec{F}_i$ - внешняя консервативная сила

Запишем второй закон Ньютона для *i*-го тела

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i + \vec{f}_i^{\,*} = m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt}$$

Умножим скалярно обе части равенства на перемещение тела.

Учитывая, что $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ получим:

$$\left(\vec{F}_i, d\vec{r}\right)_i + \left(\vec{f}_i, d\vec{r}\right)_i + \left(\vec{f}_i^{\,*}, d\vec{r}\right)_i = m_i \left(\vec{v}_i, d\vec{v}_i\right)$$

$$\left(\vec{F}_i, d\vec{r}_i\right) + \left(\vec{f}_i, d\vec{r}_i\right) + \left(\vec{f}_i^{\,*}, d\vec{r}_i\right) = d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)$$

Сложим для всех тел:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i, d\vec{r}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{f}_i, d\vec{r}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{f}_i^{\,*}, d\vec{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i, d\vec{r}\right)_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{f}_i, d\vec{r}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{f}_i^{\,*}, d\vec{r}\right)_i = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)$$

Работа сил внешнего потенциального поля

Работа сил взаимодействия

Работа дисси-пативных сил

Изменение кинетической энергии

$$-dW_{\text{П,внеш}} - dW_{\text{П,взаим}} + \delta A^* = dW_k$$

$$\delta A^* = d\left(W_k + W_{\text{П внеш}}, + W_{\text{П взаим}},\right)$$

Полная механическая энергия системы тел:

$$W = W_к + W_{П\ внеш} + W_{П\ взаим},$$

или

$$W = W_к + W_П$$

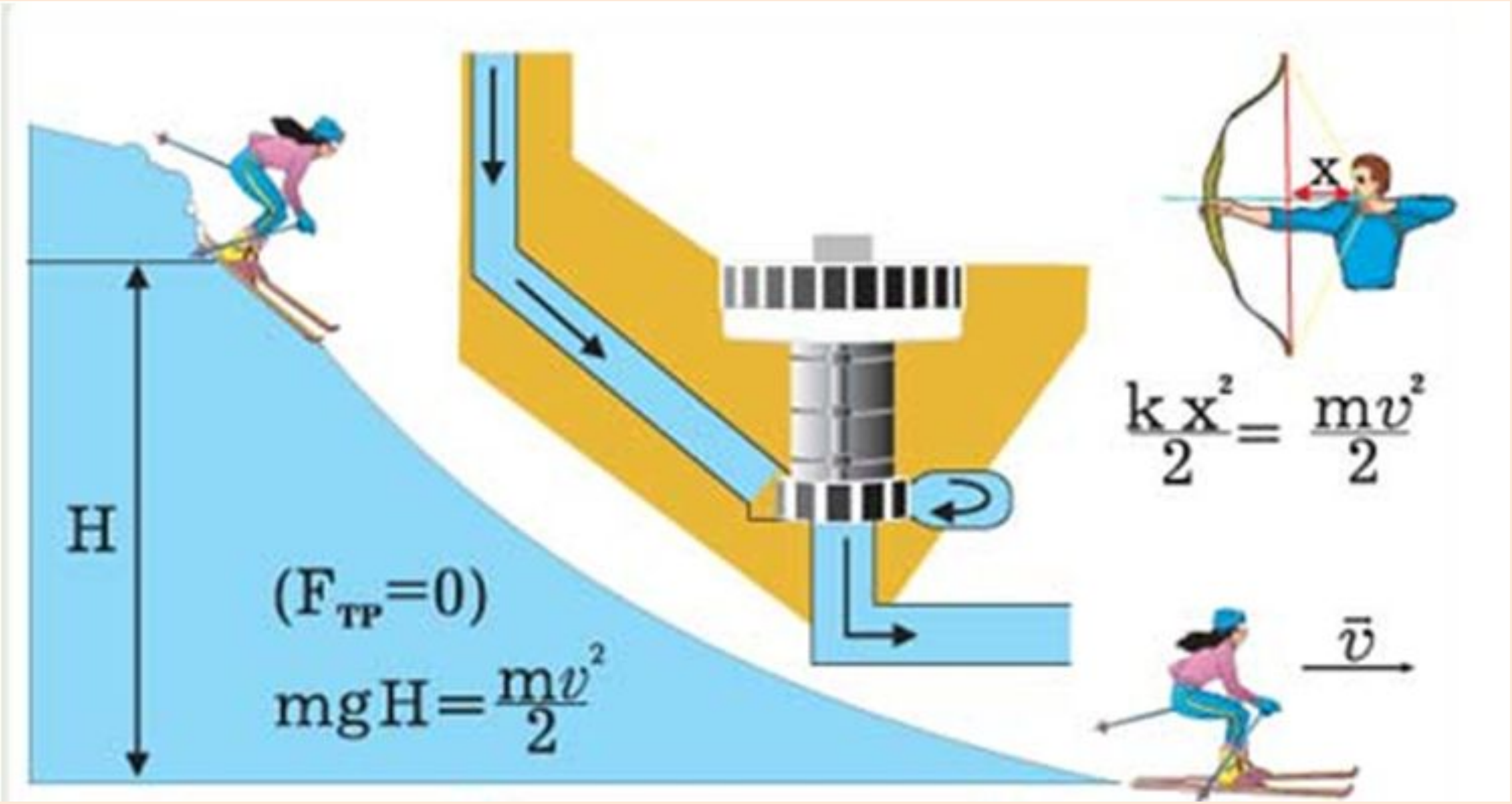
Закон изменения механической энергии системы тел

Изменение механической энергии системы тел равно работе диссипативных сил.

$$dW = \delta A^*$$

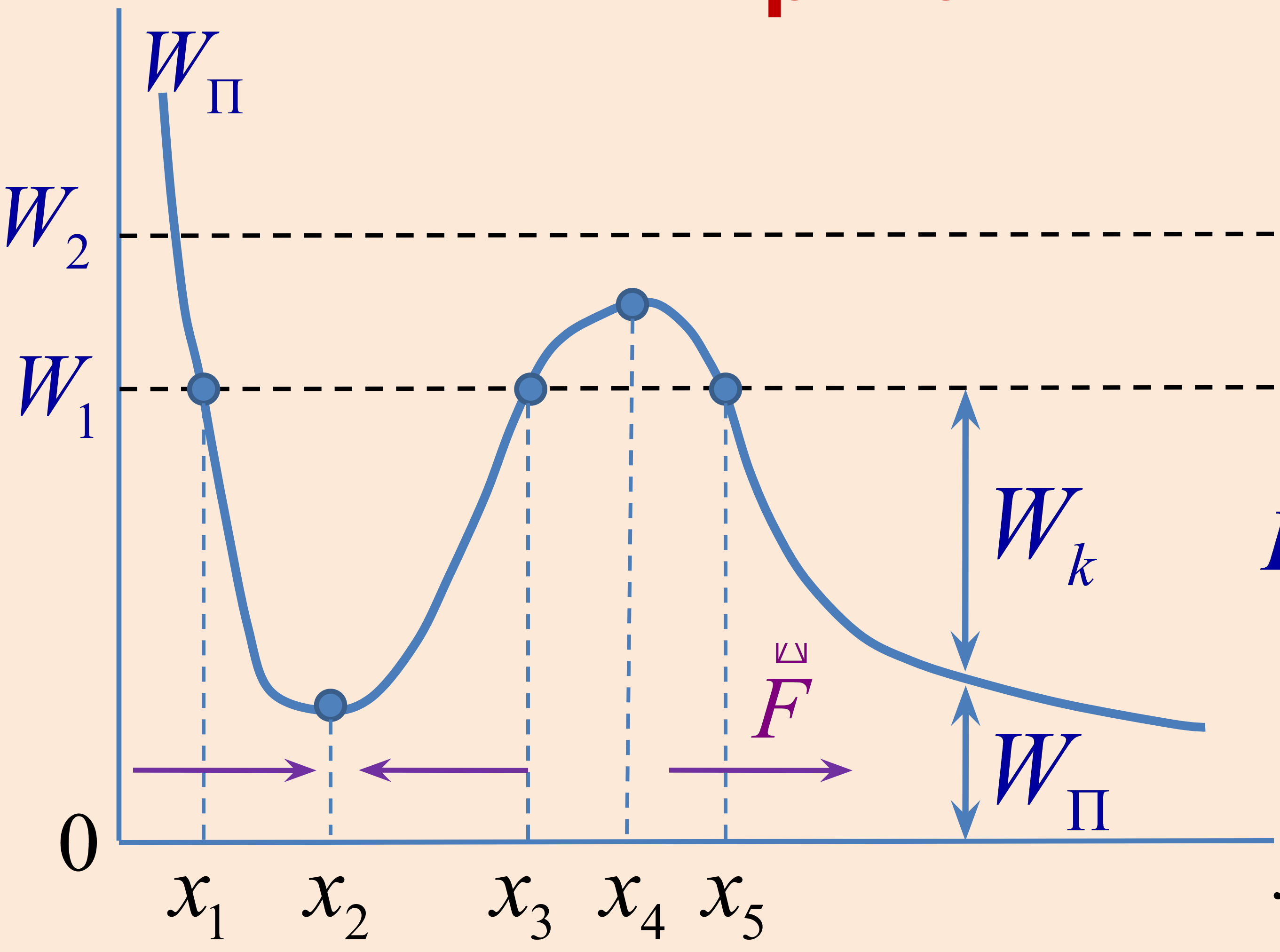
Закон сохранения механической энергии системы тел

В системе, на тела которой действуют только консервативные силы, механическая энергия не изменяется.



H
$(F_{тр}=0)$
$mgH=\frac{mv^2}{2}$
x
$\frac{kx^2}{2}=\frac{mv^2}{2}$
$\vec{v}$

Потенциальная кривая



$$F_x = -\frac{dW_п}{dx}$$

Соударение тел

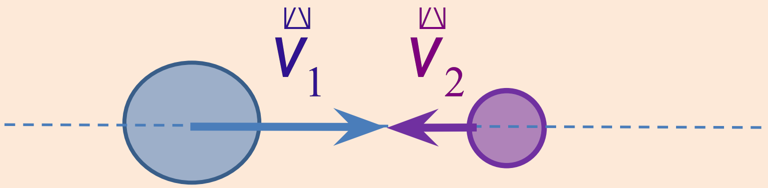
При соударении тел их взаимодействие длится очень короткое время. Поэтому силы взаимодействия тел

$$\left\langle \vec{F} \right\rangle = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

велики, и внешними силами часто можно пренебречь

При ударе систему тел можно считать квазизамкнутой.
В такой системе тел выполняется закон сохранения импульса.

Если скорости соударяющихся тел направлены вдоль прямой, проходящей через их центры масс, то такой удар называют **центральным**.



Будем рассматривать только центральные удары.

Виды удара

Если при ударе не происходит перехода энергии в немеханические формы ($\varepsilon=1$), то такой удар называют абсолютно упругим.

В этом случае выполняется закон сохранения механической

Если при ударе тела слипаются и движутся дальше как единое целое ($\varepsilon=0$), то такой удар называют абсолютно неупругим.

В этом случае механическая энергия полностью или частично переходит в немеханическую форму.

Если тело налетает на неподвижную преграду, то степень упругости удара характеризуется **коэффициентом восстановления скорости** ε.

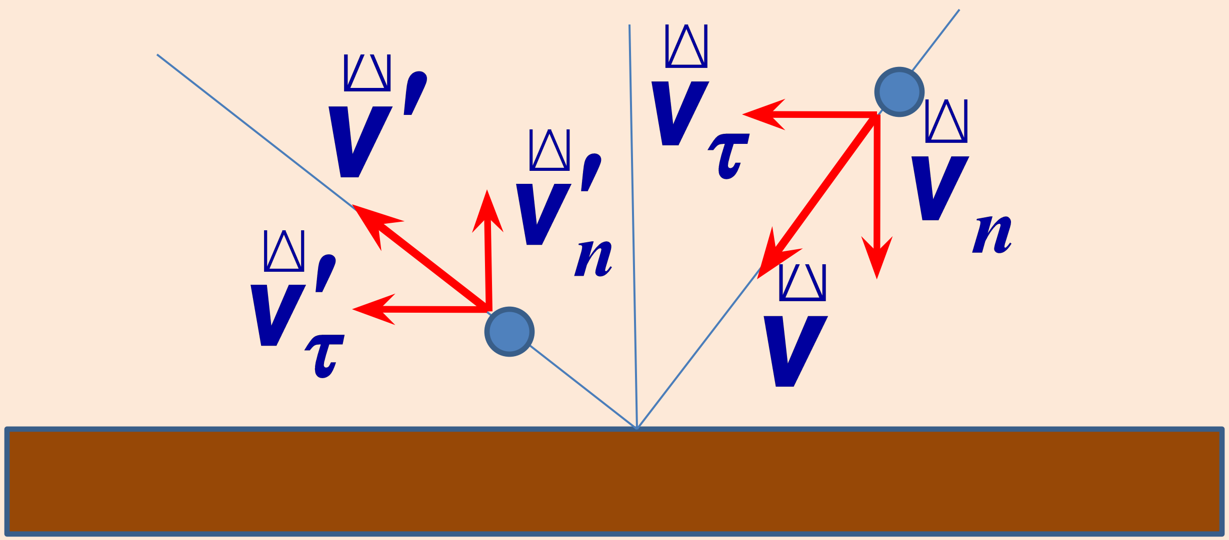
$$\varepsilon = \frac{v'_n}{v_n}$$

после

до

При **АУУ**: $\varepsilon=1$.

При **АНУ**: $\varepsilon=0$.

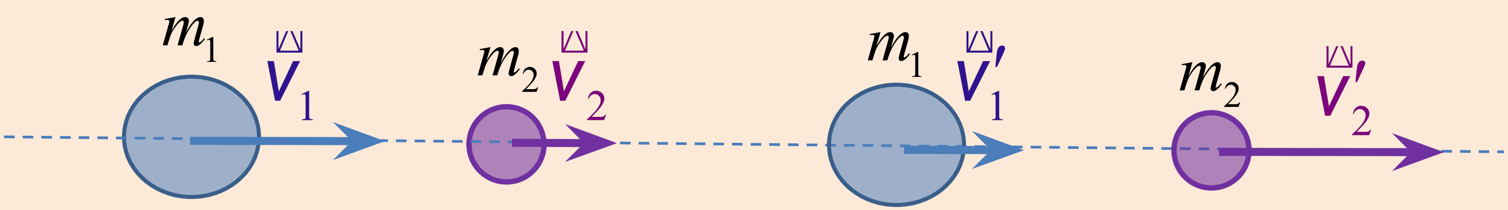


ЗСИ выполняется при любом виде удара.

	ЗСИ	ЗСМЭ
АУУ	+	+
АНУ	+	−

Расчет скоростей тел после удара

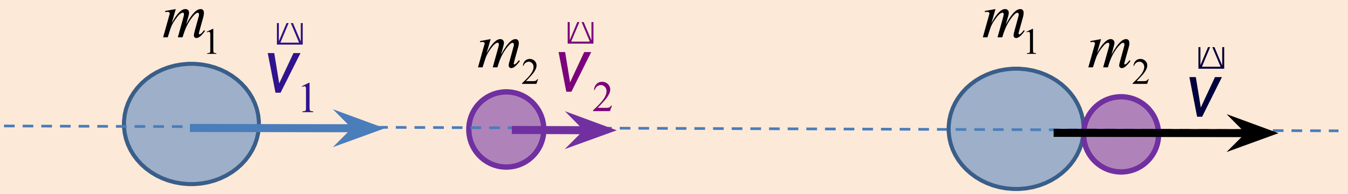
1) Абсолютно упругий удар



$$v_1' = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

2) Абсолютно неупругий удар



$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Потери кинетической энергии

$$\Delta W_к = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2$$