

10 способов решения квадратных уравнений

Работу выполнила учитель математики МБОУ
«СОШ №31» г.Энгельса Волосожар М.И.

Способ 1: разложение левой части уравнения на множители.

Решим уравнение

$$x^2 + 10x - 24 = 0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0$$

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается в нуль при $x = 2$, а также при $x = -12$. Это означает, что числа 2 и -12 являются корнями уравнения $x^2 + 10x - 24 = 0$.

Способ 2: метод выделения полного квадрата.

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Выделим в левой части полный квадрат.

Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3.$$

В полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x , а второе - удвоенное произведение x на 3 . По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2 , так как

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2.$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

прибавляя к ней и вычитая 3^2 . Имеем:

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$$(x + 3)^2 - 16 = 0, (x + 3)^2 = 16.$$

Следовательно, $x + 3 - 4 = 0$, $x_1 = 1$, или $x + 3 = -4$, $x_2 = -7$.

Способ 3: Решение квадратных уравнений по формуле.

Умножим обе части уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

на $4a$ и последовательно имеем:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

Способ 4: Решение уравнения с использованием теоремы Виета.

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$$x^2 + px + c = 0. (1)$$

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

а) Если свободный член q приведенного уравнения (1) положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависит от второго коэффициента p . Если $p < 0$, то оба корня отрицательны, если $p > 0$, то оба корня положительны.

Например,

$$x^2 - 3x + 2 = 0; x_1 = 2 \text{ и } x_2 = 1, \text{ так как } q = 2 > 0 \text{ и } p = -3 < 0;$$
$$x^2 + 8x + 7 = 0; x_1 = -7 \text{ и } x_2 = -1, \text{ так как } q = 7 > 0 \text{ и } p = 8 > 0.$$

б) Если свободный член q приведенного уравнения (1) отрицателен ($q < 0$), то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если $p < 0$, или отрицателен, если $p > 0$.

Например,

$$x^2 + 4x - 5 = 0; x_1 = -5 \text{ и } x_2 = 1, \text{ так как } q = -5 < 0 \text{ и } p = 4 > 0;$$
$$x^2 - 8x - 9 = 0; x_1 = 9 \text{ и } x_2 = -1, \text{ так как } q = -9 < 0 \text{ и } p = -8 < 0.$$

Способ 5: Решение уравнений способом «переброски».

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Умножая обе его части на a , получаем уравнение

$$a^2x^2 + abx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$$y^2 + by + ac = 0,$$

равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем

$$x_1 = y_1/a \text{ и } x_2 = y_2/a.$$

При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перемножается» к нему, поэтому его называют способом «перемножения». Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Пример.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Решение. «Перемножим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение

$$y^2 - 11y + 30 = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 6 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5/2 \\ x_2 = 6/2 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2,5 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $2,5; 3$.

Способ 6: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

Пусть дано квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

*Если, $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то $x_1 = 1$,
 $x_2 = c/a$.*

Доказательство. Разделим обе части уравнения на $a \neq 0$, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + b/a \cdot x + c/a = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 x_2 = 1 \cdot c/a. \end{cases}$$

По условию $a - b + c = 0$, откуда $b = a + c$. Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a + b/a = -1 - c/a, \\ x_1 x_2 = -1 \cdot (-c/a), \end{cases}$$

т.е. $x_1 = -1$ и $x_2 = c/a$, что и требовалось доказать.

Примеры.

Решим уравнение $345x^2 - 137x - 208 = 0$.

Решение. Так как $a + b + c = 0$ ($345 - 137 - 208 = 0$), то

$$x_1 = 1, x_2 = c/a = -208/345.$$

Ответ: 1; $-208/345$.

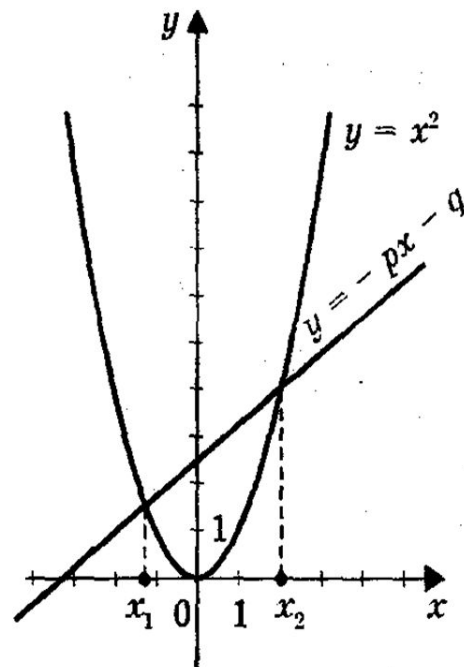
2) Решим уравнение $132x^2 - 247x + 115 = 0$.

Решение. Так как $a + b + c = 0$ ($132 - 247 + 115 = 0$), то

$$x_1 = 1, x_2 = c/a = 115/132.$$

Ответ: 1; $115/132$.

Способ 7: Графическое решение квадратного уравнения.



Если в уравнении

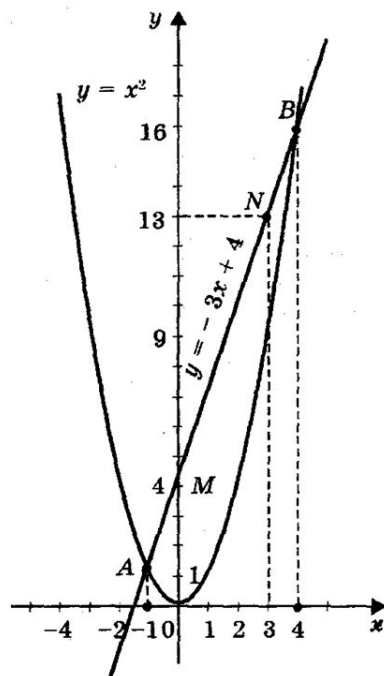
$$x^2 + px + q = 0$$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$$x^2 = -px - q.$$

Построим графики зависимости $y = x^2$ и $y = -px - q$.

График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости - прямая .



.Возможны следующие случаи:

- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;*
- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;*
- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.*