

Интегральное исчисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение Функция $F(x)$ называется **первообраз-**

ной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$

Интегральное исчисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$

Примеры 1) $f(x) = x^2$

Интегральное исчисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение Функция $F(x)$ называется **первообраз-**

ной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$

Примеры 1) $f(x) = x^2$ $F(x) = \frac{x^3}{3}$, т.к. $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

2) $f(x) = x^3$

Интегральное исчисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение Функция $F(x)$ называется **первообраз-**

ной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$

Примеры 1) $f(x) = x^2$ $F(x) = \frac{x^3}{3}$, т.к. $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

2) $f(x) = x^3$ $F(x) = \frac{x^4}{4}$, т.к. $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$

3) $f(x) = x$

Интегральное исчисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение Функция $F(x)$ называется **первообраз-**

ной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$

Примеры 1) $f(x) = x^2$ $F(x) = \frac{x^3}{3}$, т.к. $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

2) $f(x) = x^3$ $F(x) = \frac{x^4}{4}$, т.к. $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$

3) $f(x) = x$ $F(x) = \frac{x^2}{2}$, т.к. $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$

Первообразная и неопределенный интеграл

Замечание Для заданной функции $f(x)$ ее первообразная определена неоднозначно.

Пример

$$f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \quad F(x) = \frac{x^3}{3} - 5,$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 1,$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in R$$

Первообразная и неопределенный интеграл

Теорема Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то любая функция вида $F(x)+C$, где $C \in \mathbb{R}$ является первообразной для $f(x)$.

Первообразная и неопределенный интеграл

Опр. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$

Примеры

Свойства неопределенного интеграла

$$\underline{1)} \left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

(производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции)

Свойства неопределенного интеграла

$$\underline{2)} \int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

(константу можно выносить за знак неопределенного интеграла)

Свойства неопределенного интеграла

$$\underline{3)} \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

(интеграл от суммы равен сумме интегралов)

(интеграл от разности равен разности интегралов)

Табличные интегралы

$$\underline{1)} \quad \int 0 \, dx = C$$

$$\underline{2)} \quad \int 1 \, dx = \int dx = x + C$$

$$\underline{3)} \quad \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\underline{4)} \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\underline{5)} \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\underline{6)} \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Табличные интегралы

$$\underline{1)} \quad \int 0 \, dx = C$$

Табличные интегралы

$$\underline{1)} \quad \int 0 \, dx = C$$

$$\underline{2)} \quad \int 1 \, dx = \int dx = x + C$$

Табличные интегралы

$$\underline{1)} \quad \int 0 \, dx = C$$

$$\underline{2)} \quad \int 1 \, dx = \int dx = x + C$$

$$\underline{3)} \quad \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

Табличные интегралы

$$\underline{1)} \quad \int 0 \, dx = C$$

$$\underline{2)} \quad \int 1 \, dx = \int dx = x + C$$

$$\underline{3)} \quad \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\underline{4)} \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

Табличные интегралы

$$\underline{1)} \quad \int 0 \, dx = C$$

$$\underline{2)} \quad \int 1 \, dx = \int dx = x + C$$

$$\underline{3)} \quad \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\underline{4)} \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\underline{5)} \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

Табличные интегралы

$$\underline{1)} \quad \int 0 \, dx = C$$

$$\underline{2)} \quad \int 1 \, dx = \int dx = x + C$$

$$\underline{3)} \quad \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\underline{4)} \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\underline{5)} \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\underline{6)} \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Табличные интегралы

$$\underline{7)} \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

Табличные интегралы

$$\underline{7)} \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\underline{8)} \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Табличные интегралы

$$\underline{7)} \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\underline{8)} \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\underline{9)} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

Табличные интегралы

$$\underline{7)} \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\underline{8)} \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\underline{9)} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\underline{10)} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

Табличные интегралы

$$\underline{11)} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, x \in (-a, a); a > 0$$

$$\underline{12)} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$$

$$\underline{13)} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0$$

$$\underline{14)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C, a \neq 0$$

Метод замены переменной

1. Пусть необходимо вычислить интеграл

$$\int \sin(2x + 3) dx. \text{ При этом } \int \sin y dy = \cos y + C$$

является табличным

1. Сделать замену $y = 2x + 3$

2. Вычислить дифференциал $dy = (2x + 3)' dx = 2 dx$

3. Выразить $dx = \frac{1}{2} dy$

4. Подставить y и dy в исходный интеграл

$$\int \sin y \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \int \sin y dy = -\frac{1}{2} \cos y + C = -\frac{1}{2} \cos(2x + 3) + C$$

Метод замены переменной

2. Пусть необходимо вычислить интеграл вида

$$\int \cos(x^3 - 1) x^2 dx.$$

1. Сделать замену $y = x^3 - 1$

2. Вычислить дифференциал $dy = (x^3 - 1)' dx = 3x^2 dx$

3. Выразить $x^2 dx = \frac{1}{3} dy$

4. Подставить в исходный интеграл

$$\int \cos(x^3 - 1) x^2 dx = \int \cos y \cdot \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} \sin y + C = \frac{1}{3} \sin(x^3 - 1) + C$$

Интегрирование функций, содержащих

$$ax^2 + bx + c$$

1. $\int \frac{A}{ax^2 + bx + c} dx$ ($n = 0, m = 2$) выделить полный квадрат,

т.е. привести знаменатель к виду $a(x + d)^2 + e$, после чего сделать замену $y = x + d$. Интеграл сведется к одному из табличных

$$\int \frac{dy}{y^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{y - a}{y + a} \right| + C, \quad e < 0$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{y}{a} + C, \quad e > 0$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C, \quad e = 0$$

Интегрирование функций, содержащих

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

выделить полный квадрат, т.е. представить в виде:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a(x+d)^2 + e}}$$

и сделать замену $y=x+d$. После этого интеграл сводится к одному из табличных

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + m} \right| + C, \quad \text{если } a > 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{m^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{m} + C, \quad \text{если } a < 0$$

Метод интегрирования по частям

Теор. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям применяется для нахождения интегралов вида:

1. $\int x^n e^{ax} dx, \quad n \in N, a \in R$

2. $\int x^n \sin ax dx, \quad n \in N, a \in R$

3. $\int x^n \cos ax dx, \quad n \in N, a \in R$

4. $\int x^k \ln^n x dx, \quad n \in N, k \in R, k \neq -1$