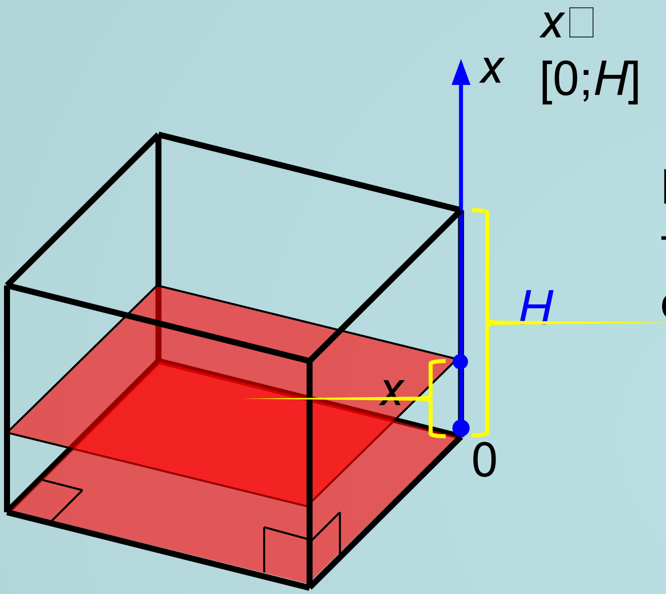
Обчислення обємів просторових тіл з допомогою інтеграла.

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

I. Обєм прямокутного паралелепіпеда

з висотою *H* і площею основи *S*.

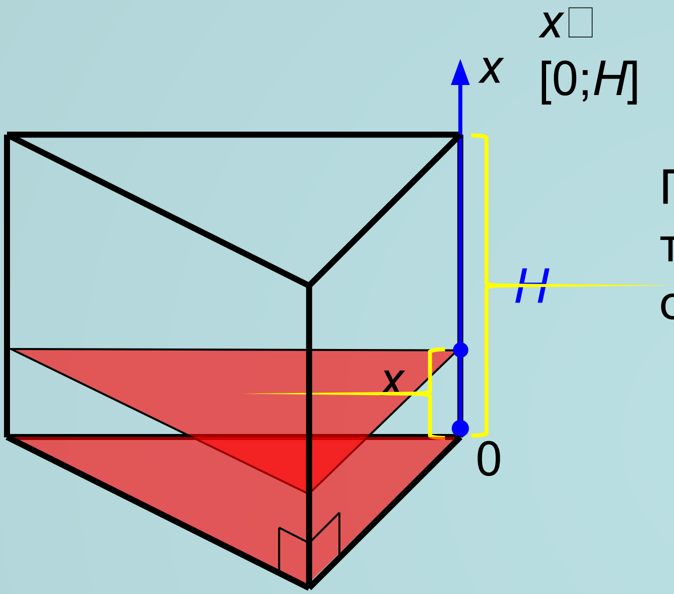


Площа перерізу не змінюється в любій точці відрізка від 0 до *H* і рівна площі основи.

$$V_{пар.} = \int_0^H S_{січ.}\,dx = S_{осн.}\int_0^H dx = S_{осн.}\cdot x\Big|_0^H = S_{осн.}\cdot H \left(\qquad \right)$$

II. Обєм прямої призми

з висотою *H* і площею основи *S*.

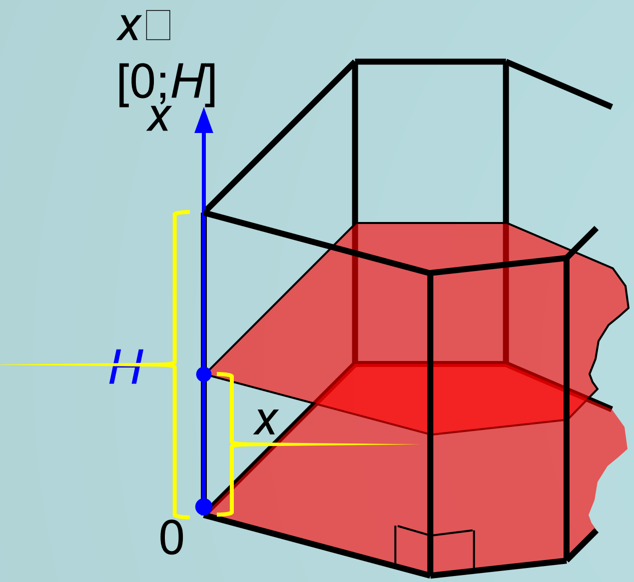


Площа перерізу не змінюється в любій точці відрізка від 0 до *H* і рівна площі основи.

$$V_{пр.} = \int_0^H S_{січ.}\,dx = S_{осн.}\int_0^H dx = S_{осн.}\cdot x\Big|_0^H = S_{осн.}\cdot H \quad (\qquad)$$

III. Обєм n-кутної прямої призми

з висотою *H* і площею основи *S*.

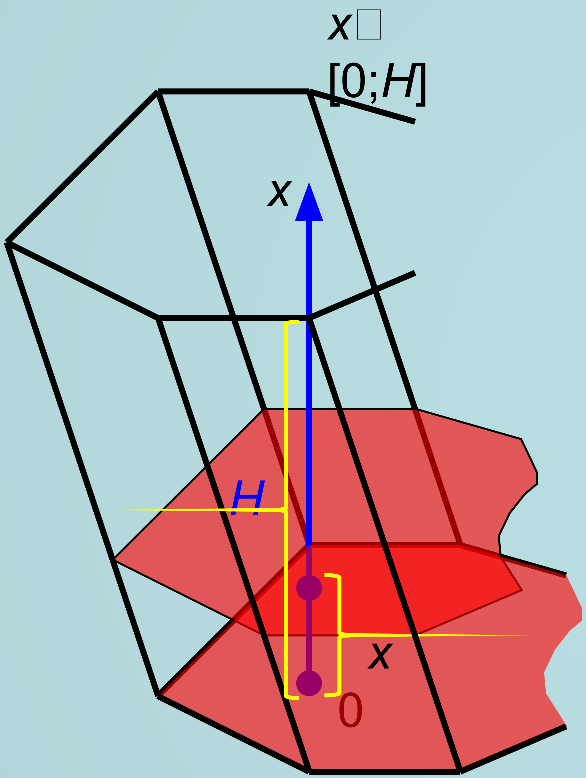


Площа перерізу не змінюється в любій точці відрізка від 0 до *H* і рівна площі основи.

$$V_{пр.}=\int_0^H S_{сеч.}\,dx = S_{осн.}\int_0^H dx = S_{осн.}\cdot x\Big|_0^H = S_{осн.}\cdot H\ (\qquad)$$

IV. Обєм похилої призми

з висотою *H* і площею основи *S*.



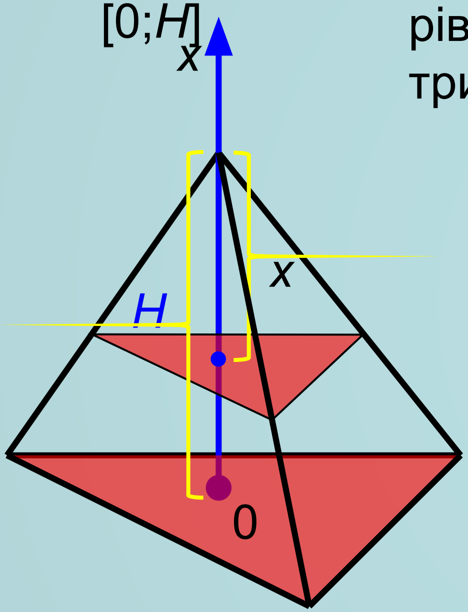
Площа перерізу, <u>перпендикулярного висоті</u>, не змінюється в любій точці відрізка від 0 до *H* і рівна площі основи.

$$V = \int_0^H S_{сеч.}\,dx = S_{осн.}\int_0^H dx = S_{осн.}\cdot x\Big|_0^H = S_{осн.}\cdot H\ (\qquad)$$

V. Обєм трикутної піраміди

з висотою *H* і площею основи *S*.

$x \in [0;H]$



Площа перерізу змінюється в залежності від відстані *x*, причому відношення площі основи до площі перерізу рівне квадрату коефіцієнта подібності відповідних трикутників, тобто:

$$\frac{S_{\text{осн.}}}{S_{\text{сеч.}}} = \frac{H^2}{x^2}$$

$$\Downarrow$$

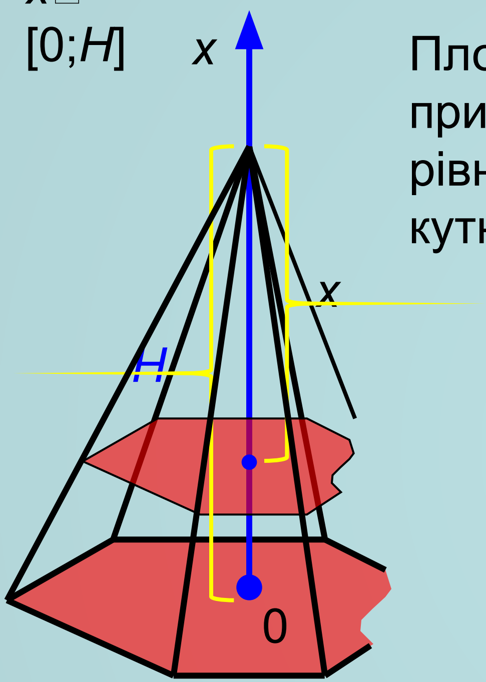
$$S_{\text{сеч.}} = \frac{S_{\text{осн.}} \cdot x^2}{H^2}$$

$$V = \int_0^H S_{\text{сеч.}}\,dx = \int_0^H \frac{S_{\text{осн.}} \cdot x^2}{H^2}\,dx = \frac{S_{\text{осн.}}}{H^2}\int_0^H x^2\,dx = \frac{S_{\text{осн.}}}{H^2}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H = \frac{1}{3} S \cdot H$$

VI. Обєм n-кутної піраміди

з высотою *H* і площею основи *S*.

x□ [0;*H*]



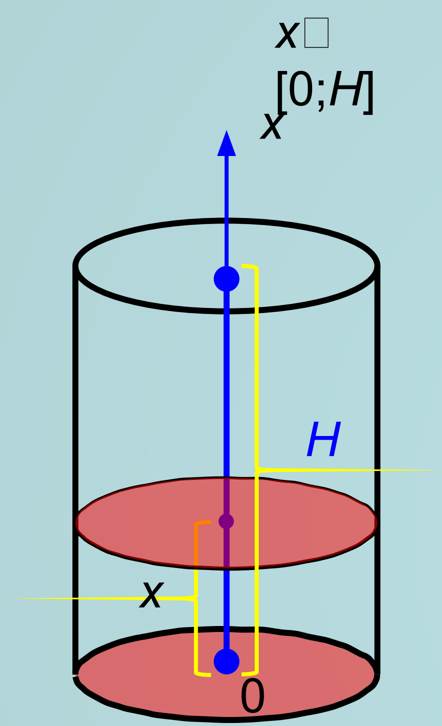
Площа перерізу змінюється в залежності від відстані *x*, причому відношення площі основи до площі перерізу рівне квадрату коефіцієнта подібності відповідних n-кутників, тобто:

$$\frac{S_{\text{î ńí .}}}{S_{\text{ńĺ ÷.}}} = \frac{H^2}{x^2}$$

$$S_{\text{ńĺ ÷.}} = \frac{S_{\text{î ńí .}} \cdot x^2}{H^2}$$

$$V = \int_0^H S_{\text{ńĺ ÷.}} dx = \int_0^H \frac{S_{\text{î ńí .}} \cdot x^2}{H^2} dx = \frac{S_{\text{î ńí .}}}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{S_{\text{î ńí .}}}{H^2} \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^H = \frac{1}{3} S \cdot H$$

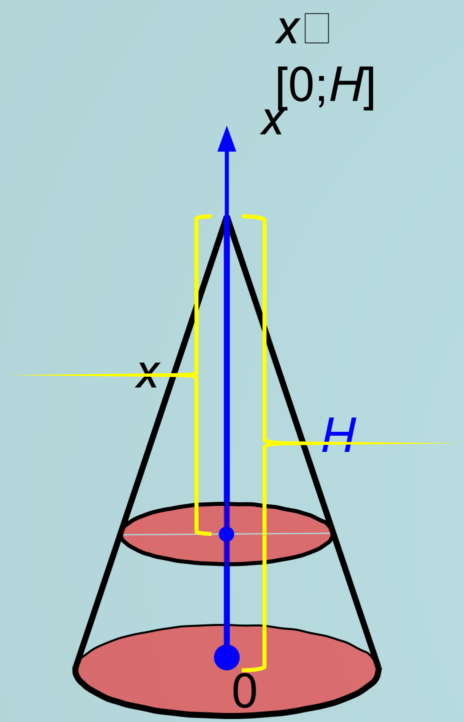
VII. Обєм циліндра з висотою H і площею основи S.



Площа перерізу не змінюється в любій точці відрізка від 0 до H і рівна площі основи.

$$V_{цил.} = \int_0^H S_{осн.}\,dx = S_{осн.}\int_0^H dx = S_{осн.}\cdot x\Big|_0^H = S_{осн.}\cdot H = \pi R^2 H \left(\qquad \right)$$

VIII. Об’єм конуса з висотою *H* і площею основи *S*.



Площа перерізу змінюється в залежності від відстані *x*, причому відношення площі основи до площі перерізу рівне квадрату коефіцієнта подібності відповідних кругів, тобто:

$$\frac{S_{\text{î ńí.}}}{S_{\text{ńĺ÷.}}}=\frac{H^2}{x^2}$$

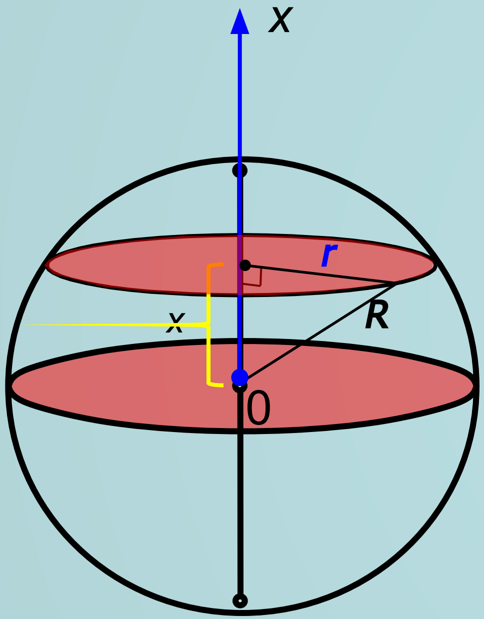
$$S_{\text{ńĺ÷.}}=\frac{S_{\text{î ńí.}}\cdot x^2}{H^2}$$

$$V=\int_0^H S_{\text{ńĺ÷.}}dx=\int_0^H\frac{S_{\text{î ńí.}}\cdot x^2}{H^2}dx=\frac{S_{\text{î ńí.}}}{H^2}\int_0^H x^2dx=\frac{S_{\text{î ńí.}}}{H^2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H=\frac{1}{3}S\cdot H$$

IX. Обєм кулі з радіусом *R*.

Знайдемо обєм півкулі, як нескінченну інтегральну суму площ перерізів з радіусом *r*, де:

$$r=\sqrt{R^2-x^2},\ x\in[0;R]$$



$$V_{\text{дïёóř ŕđč·}}=\int_0^R S_{\text{ńĺ÷.}}\,dx=\int_0^R \pi r^2\,dx=\pi\int_0^R\left(R^2-x^2\right)dx=$$

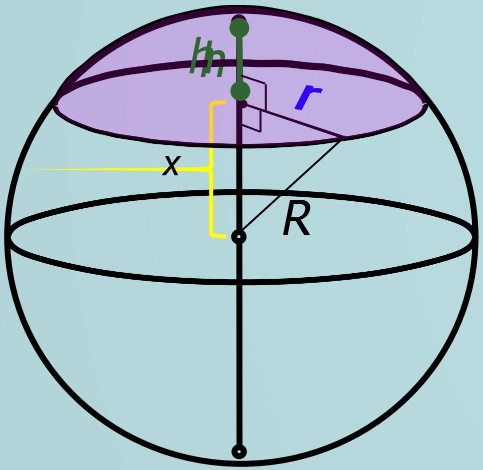
$$=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{2\pi R^3}{3}\ (\text{ęóá.îä.})$$

Значить, обєм всієї кулі рівний:

$$V_{\text{ęóëł}}=2\cdot\frac{2\pi R^3}{3}=\frac{4\pi R^3}{3}\ (\text{ęóá.îä.})$$

X. Обєм кульового сегмента.

Виведення формули обєму кульового сегмента з висотою *h* і радіусом основи *r* відрізняється від виведення обєму півкулі нижньою границею інтегрування. В даному випадку вона рівна *R –h* :



$$V_{ñåãìåíòà} = \int_{R-h}^{R} S_{ñå÷.}\,dx = \pi \int_{R-h}^{R} r^2_{ñå÷.}\,dx = \pi \int_{R-h}^{R} \left(R^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(R^2\left(R-h\right) - \frac{\left(R-h\right)^3}{3}\right)\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{2R^3}{3} - R^3 + R^2 h + \frac{R^3 - 3R^2 h + 3Rh^2 - h^3}{3}\right) = \pi\left(Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right) =$$

$$= \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$$

Зверніть увагу, що в формулі обєму кульового сегмента використовується радіус кулі (***R***), а не радіус основи сегмента (*r*)!