Дискретная математика

Отношения.
Бинарные отношения
и их свойства

Соответствие между равными множествами А = В называется ***отношением*** на данном множестве (А).

Отношения в некоторых числовых множествах могут выражаться терминами: «быть равным», «быть больше», «быть не меньше», «быть делителем» и т.д.

Отношения во множестве линий на плоскости могут выражаться терминами: «быть параллельными», «пересекаться», «касаться» и т.д.

Подмножество $R \subset M^n$ называется ***n*-местным отношением** *R* на непустом множестве *M*. При *n*=2 отношение *R* называется ***бинарным***.

То есть ***бинарным*** отношением между элементами множеств A и B называют любое подмножество R множества AxB и записывают R$\subset$ AxB.

Для отношения R ***обратным*** является отношение $R^{-1} \subset$ BxA.

Композиция отношений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.28. Пусть $R \subseteq A \times B$ — отношение на $A \times B$, а $S \subseteq B \times C$ — отношение на $B \times C$. ***Композицией*** отношений S и R называется отношение $T \subseteq A \times C$, определенное таким образом:

$$T = \{(a, c) : \text{ существует такой элемент } b \text{ из } B, \text{ что } (a, b) \in R \text{ и } (b, c) \in S\}.$$

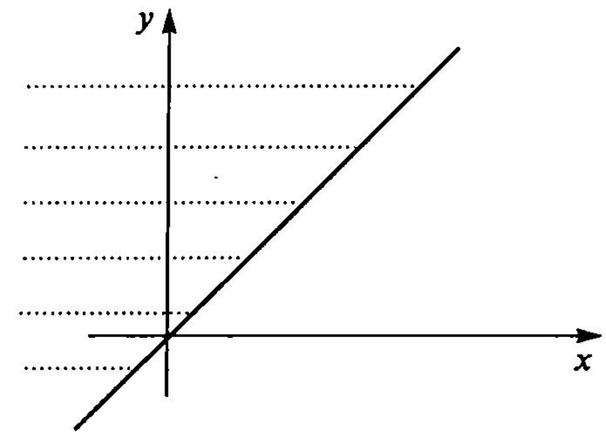
Это множество обозначается $T = S \circ R$.

Бинарные отношения принято записывать в виде *aRb*, где *a, b* $\in$ *M*. Запись читается как «*a и b находятся в отношении R*».

Например, a||b (параллельные прямые), a ≤b (действительные числа), $a = \log_c b$ и т.д.

Рассмотрим примеры бинарных отношений.

Бинарное отношение R: x ≤ y показано на рис. Заштриховано множество точек, для координат которых это отношение выполняется (истинно).



Графики прямых и обратных бинарных отношений, определенных на множестве действительных чисел, симметричны относительно биссектрисы I и III квадрантов.

Это свойство обратных бинарных отношений используют при построении графиков обратных функций, например: $y = \log_2 x$ и $y=2^x$

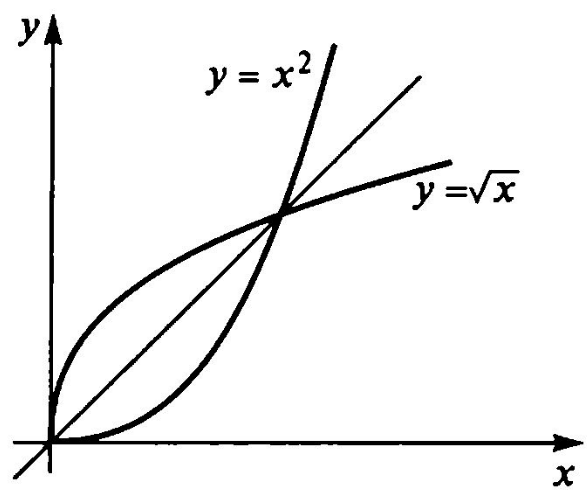
<u>Пример 1.</u>

$y = x^2$ и

$y = \sqrt{x}$,

где $x \geq 0$

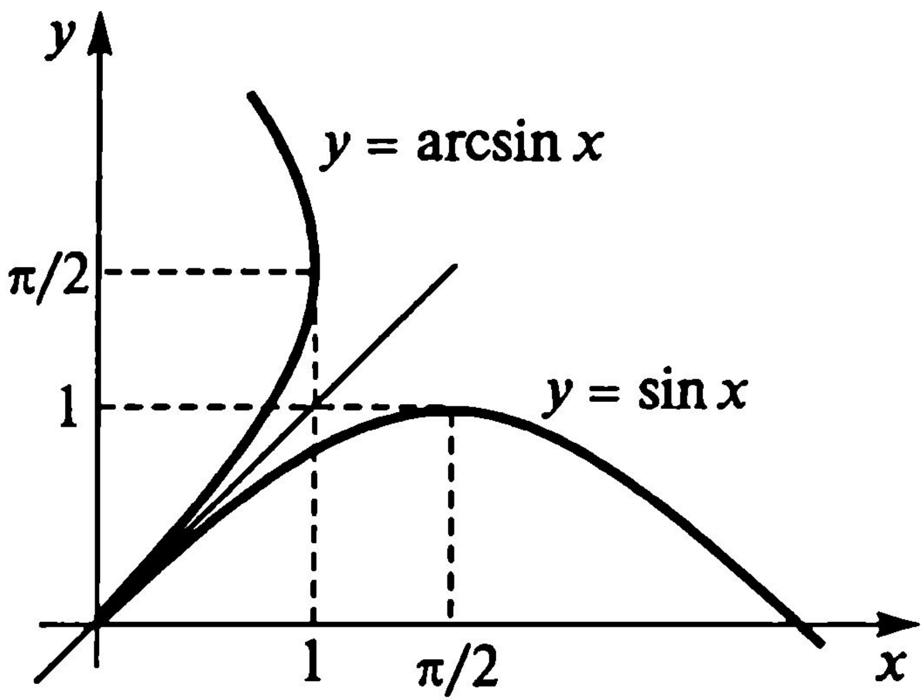
(рис. а);



а

Пример 2.

y = sin x и y = arcsin x, где 0 ≤x ≤ π/2 (рис. б).



б

Свойства бинарных отношений:

1) рефлексивность:

$$\left(\forall a \in M\right)\left(\left(a, a\right) \in R\right)$$

Например: «быть не больше»; «быть делителем» на множестве N; «быть коллинеарным» на множестве векторов;

Свойства бинарных отношений:

2) антирефлексивность:

$$\left(\forall a \in M\right)\left(\left(a, a\right) \notin R\right)$$

Это отношение имеет место, когда оно не обладает свойством 1 для любых а, например: «быть больше», «быть младше», «быть перпендикулярной» на множестве прямых и др.

Свойства бинарных отношений:

3) симметричность:

$$\left(\forall a, b \in M\right)\left(\left(a, b\right) \in R \rightarrow \left(b, a\right) \in R\right)$$

Отношение R на множестве M называется *симметричным*, если для любых *a, b* ∈ *M*

одновременно справедливо *aRb* и *bRa* (т. е.$R=R^{-1}$). Например:

Симметрична параллельность прямых, так как если a || b, то b || a. Симметрично отношение «быть равным» на любом множестве или «быть взаимно-простым» на N.

Свойства бинарных отношений:

4) антисимметричность:

$$\left(\forall a, b \in M\right)\left(\left(\left(a, b\right) \in R, \left(b, a\right) \in R\right) \leftrightarrow a = b\right)$$

Если для несовпадающих элементов a ≠ b верно отношение aRb, то ложно bRa. Антисимметричными являются отношения «быть больше», «не меньше» на множестве R, «быть делителем» на множестве N и др.

Свойства бинарных отношений:

5) транзитивность:

$$\left(\forall a,b,c\in M\right)\left(\left(\left(a,b\right)\in R,\left(b,c\right)\in R\right)\to\left(a,c\right)\in R\right)$$

Если aRb и bRc, то aRc для любых a, b, c ∈ M.

Транзитивны отношения «быть больше», «быть параллельным», «быть равным» и др.

Свойства бинарных отношений:

6) антитранзитивность:

$$(\forall a,b,c \in M)(((a,b) \in R,(b,c) \in R) \to (a,c) \notin R)$$

Имеет место, когда отношение не обладает свойством 5. Например, «быть перпендикулярным» на множестве прямых плоскости (a ⊥ b, b ⊥ c, но неверно a⊥c).

Свойства бинарных отношений:

7) асимметричность:

$$\left(\forall a, b \in M\right)\left(\left(a, b\right) \in R \rightarrow \left(b, a\right) \notin R\right)$$

Ни для одной пары a и b не выполняется одновременно aRb и bRa.

Например: «быть больше»; «быть меньше»; «быть отцом».

Свойства бинарных отношений:

8) связность:

$$\left(\forall a, b \in M\right)\left(\left(a, b\right) \in R \text{ или } \left(b, a\right) \in R\right)$$

Для любых a и b, если a ≠ b, то aRb или bRa.

Например: «быть больше», «быть меньше» на множестве N, R; «быть больше или равным», «быть меньше или равным» на множестве обыкновенных дробей.

Каждое конкретное отношение может обладать или не обладать указанным свойством.

Свойства бинарных отношений

Множества	Отношение	Рефлективность	Симметричность	Асимметричность	Антисимметричность	Транзитивность	Антитранзитивность
Любые	$A \subset B$	+	–	–	+	+	–
Любые непустые	$A \cap B \neq \varnothing$	+	+	–	–	–	–
Любые	$B = A'$	–	+	–	–	–	–
Любые	$a = b$	+	+	–	–	+	–
Любое	$a \neq b$	–	+	–	–	–	+
$\mathbb{N}$	$a \vdots b,\ a = bq$	+	–	–	+	+	–
$\mathbb{R}$	$a > b$	–	–	+	–	+	+
$\mathbb{R}$	$a \geq b$	+	–	–	+	+	+
$\mathbb{R}$	$a < b$	–	–	+	–	+	+
$\mathbb{R}$	$a \leq b$	+	–	–	+	+	+
Прямые плоскости	$a \| b$	+	+	–	–	+	–
Прямые плоскости	$a \perp b$	–	+	–	–	–	–
Векторы $\forall a,\ \forall b$	Коллинеарность $a = \lambda b$	+	+	–	–	+	–
Окружности	Касание	+	+	–	–	–	–
Окружности	Концентричность	+	+	–	–	+	–
$\mathbb{N}$	Взаимная простота	–	+	–	–	–	–
$\mathbb{N}$	$a = b \pmod m$ (сравнение по модулю m)	+	+	–	–	+	–

Основные виды бинарных отношений.

Бинарное отношение R называется ***отношением эквивалентности***, если оно одновременно обладает тремя свойствами: рефлективностью, симметричностью и транзитивностью, т.е. если для любых x, y, z выполняется:

- xRx (рефлективность);
- если xRy, то yRx (симметричность);
- если xRy, а yRz, то xRz (транзитивность).

Отношение эквивалентности

рефлексивность

симметричность

транзитивность

Примеры отношений эквивалентности:

Отношение «быть равным на множестве чисел», быть подобным на множестве геометрических фигур.

Обозначение эквивалентных отношений:

a Q b или a ~ b, что означает «a эквивалентно b в отношении Q»

Непересекающиеся подмножества, на которые разбивается множество *M* отношением эквивалентности, называются классами эквивалентности.

На множестве обыкновенных дробей все классы эквивалентности по отношению равенства состоят из дробей, равных по своей величине.

На множестве треугольников все классы эквивалентности по отношению подобия состоят из треугольников, подобных между собой.

Отношение толерантности

рефлексивность

симметричность

Отношение эквивалентности – частный случай отношения толерантности.

Отношения «быть другом», «быть знакомым», - отношения толерантности, так как они рефлексивны, симметричны, но не транзитивны.

Отношение «иметь непустое пересечение» для множеств – отношение толерантности.

Отношение порядка

антисимметричность

транзитивность

Множество М, которое обладает отношением порядка, называется упорядоченным.

\+ рефлексивность → Отношение нестрогого порядка $\leq$

\+ антирефлексивность → Отношение строгого порядка $<$

Отношение называется отношением полного порядка, если сравнимы все элементы множества, на котором задано это отношение.

Пример. Отношения «больше» и «меньше» на множестве действительных чисел.

Отношение называется отношением частичного порядка, если сравнимы не все элементы множества, на котором задано это отношение.

Пример. Отношение «быть подмножеством» на множестве B(U) (булеан).