Лекция 3. Матрицы, операции над матрицами, теорема существования обратной матрицы. Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений. Метод обратной матрицы решения СЛАУ, формулы Крамера. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли, теорема о базисном миноре, метод Гаусса решения СЛАУ. Однородные системы линейных алгебраических уравнений, фундаментальная система решений ОСЛАУ.

§1. Матрицы и действия над ними.

Определение. **Матрица** – прямоугольная таблица из $m \times n$ действительных чисел, расположенных в m строк и n столбцов.

Обозначение: A, B, C, D . . . . . ( ), [ ], $\| \ \|$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрица, все элементы которой нули, называется **нулевой**.
Матрицы у которых соответственно равны числа строк и столбцов называются матрицами одного размера.
Две матрицы одного размера у которых соответствующие элементы равны, называются **равными.**

Различные виды матриц

Матрица состоящая из 1 строки называется строкой.

Матрица состоящая из 1 столбца называется столбцом.

Если $m \neq n$, то матрица прямоугольная.

Если $m = n$, то матрица квадратная.

$A = (a_1, a_2, a_3)$ - матрица строка

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ - матрица столбец

Для квадратной матрицы вводят понятия главной и побочной диагонали

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

побочная ***главная***

Матрица у которой отличны от нуля лишь элементы главной диагонали называется **диагональной.**

$$\begin{bmatrix} a & & 0 \\ & b & \\ 0 & & c \end{bmatrix}$$

Диагональная матрица у которой элементы главной диагонали равны называется **скалярной**.

$$\begin{bmatrix} a & & 0 \\ & a & \\ 0 & & a \end{bmatrix}$$

Скалярная матрица у которой элементы главной диагонали единицы называется **единичной.**

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Операции над матрицами

1.) Транспонирование – замена всех строк матрицы столбцами с сохранением номеров (A^t)

для $A -> A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Если A=A^t , то A –симметричная.

2.) Линейные операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число.

2.1. Операция сложения возможна для матриц одного размера.

Определение: Суммой двух матриц $A_{mxn}=[a_{ij}]$ и $B_{mxn}[b_{ij}]$ наз.третья матрица C, того же размера $C_{mxn}=[c_{ij}]$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

т.е. при сложении матриц их соответствующие элемент складываются $\qquad C = A + B$

2.2. Произведением A_{mxn} на $\lambda \in R$ (или $\lambda \in R$ на A) называется $B_{mxn}[b_{ij}]$, $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ $(A = [a_{ij}])$ $\underline{B = \lambda \cdot A}$

Матрица $(-1)\cdot A$ называется <u>противоположной</u> для A и обозначается $-A$.

<u>Сумма матриц</u> C и $-A$ называется их разностью и обозначается $C - A$.

2.3. Свойства линейных операций (+) и (·)

1. $\forall A u B \Rightarrow A + B = B + A$
2. $\forall B, A, C \Rightarrow A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\forall A \Rightarrow A + 0 = A$
4. $\forall A \Rightarrow A + (-A) = 0$
5. $\forall A \Rightarrow 1 \cdot A = A$
6. $\forall A u \forall \lambda \mu \in R \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$
7. $\forall \alpha, \beta \in R u \forall A \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
8. $\forall A u u B u \forall K \in R \quad K(A + B) = KA + KB$

План доказательства.

1.) Показать, что матрицы слева и справа имеют один и тот же размер

2.) Показать, что соответствующие элементы этих матриц равны.

3.) Произведение матрицы *A* на матрицу *B* определено лишь в случае, если число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*.

Определение: Произведением матрицы $A_{m\text{x}p}$ $[a_{ij}]$ на матрицу $B_{m\text{x}p}[b_{ij}]$ называется матрица $C_{m\text{x}n}$ $[c_{ij}]$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов *i*-ой строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*.

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A \cdot B_{2\times 2}$$

$$A \cdot B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 4 \\ 0\cdot(-1)+4\cdot 3 & 0\cdot 2+4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 22 \end{pmatrix} \qquad AB \neq BA$$

В общем случае $AB \neq BA$, если $AB = BA$, то матрицы A и B называются <u>перестановочными.</u>

Можно показать, что единичная матрица перестановочна с любой квадратной матрицей того же размера, причем $A \cdot E = E \cdot A = A$

Свойства операции умножения.

Предположим, что все указанные операции выполнимы

1. $\forall A, B, C \quad \Rightarrow \quad A(BC) = (AB)C$
2. $\forall A, B, C \quad \Rightarrow \quad (A+B)C = AC + BC$
3. $\forall A, B, C \quad \Rightarrow \quad A(B+C) = AB + AC$
4. $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB), \quad \forall A, B \quad и \quad \forall \lambda \in R$
5. $\forall A \quad и \quad B \quad \Rightarrow \quad (AB)^t = B^t \cdot A^t$

§2. Обратная матрица. Матричные уравнения. Формулы Крамера.

Теорема об определителе квадратных матриц.

Теорема: Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \textit{показать} \quad |AB| = |A| \cdot |B|$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 28 \end{pmatrix}; \quad |AB| = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 28 \end{vmatrix} = -28 - 10 = -38$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 19 \qquad |A| \cdot |B| = -2 \cdot 19 = -38$$

(2) **Определение квадратной матрицы.**

Определение: Квадратная матрица A называется выроженной (особенной), если ее определитель = 0 и невыроженной(не особенной),если ее определитель $\neq 0$.

Определение: Матрица A называется обратной для матрицы B если $A \times B = B \times A = E$ (единичной матрице)

Теорема существования обратной матрицы.

Теорема: Для того чтобы матрица A имела обратную необходимо и достаточно, чтобы она была не выроженной.

Необходимость. Пусть A имеет обратную B. Тогда по определению $AB = BA = E$, $AB = E$. (*)

По теореме об определителе квадратной матрице

$$\left.\begin{array}{c} |AB| = |A|\cdot|B| \\ |E| = 1 \end{array}\right\} \qquad (**)$$

Из (*) => что если матрицы =, то = их определители

$$|AB| = |E|$$

Из (*) => $|A|\cdot|B| = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |A| \neq 0 \qquad (\textit{невырожденная})$

Достаточность. A - невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} i - я \qquad A^* = \begin{array}{c} \quad j\text{–й} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & \left| A_{j2} \right| \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \left| A_{j2} \right| \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & \left| A_{jn} \right| \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B=\frac{1}{|A|}\cdot A^*; \qquad AB=BA=E \qquad \textit{Обозначим} \qquad AB=C \quad \left[C_{ij}\right]$$

$$C_{ij}=\frac{1}{|A|}\left(a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}\right)=\frac{1}{|A|}\begin{cases}|A|, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases};$$

$$C_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}, \qquad \text{т.е.} \quad C-\text{единственная}$$

<u>**Единственность обратной матрицы.**</u>

Теорема: Если A имеет обратную, то она (обратная) единственная.

Доказательство: Пусть B обратная для A. Предположим, что C тоже обратная для A и C совпадает с B, $C = B$.

Так как B обратная для A, то $AB = E$

Умножим обе части равенства слева на матрицу C

$$C(AB) = CE \qquad EB = C$$

$$\underbrace{(CA)}_{E}B = C \qquad B = C$$

$$C = B$$

Обозначение A обратная A^{-1}

Например, $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}$$

$$n = 2 \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Свойства обратной матрицы.

1. $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

3. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\quad$ *(множители переставляются)*

4. $\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t} = A^{-t}$

Доказательство 1: $\quad AA^{-1} = E$

$$\left|AA^{-1}\right| = \left|\overset{=1}{E}\right|$$

$$|A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1 \qquad \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

Доказательство 3: $\quad \underbrace{(AB)}_{C}{}^{-1} = \underbrace{B^{-1} \cdot A^{-1}}_{C^{-1}}$

$$C \cdot C^{-1} = C^{-1} \cdot C = E$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1}) \cdot A^{-1} = (AE) \cdot A^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \textit{св} - \textit{во} \quad \textit{произв.} = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}E)B = B^{-1}B = E$$

Матричные уравнения.

Матричными уравнениями называются уравнения вида:

$$AX = B \quad (1) \qquad\qquad XC = D \quad (2),$$ где

$|A| \neq 0$, $|C| \neq 0$ – невырожденные матрицы

X - неизвестная матрица,

B, D - известные матрицы размеры которых не противоречат операциям умножения.

т.к. $|A| \neq 0$, то A^{-1} существует. Умножим обе части уравнения (1) слева на A^{-1}.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad EX = A^{-1}B \quad X = A^{-1}B \quad (1)$$

т.к. $|C| \neq 0$, то C^{-1} существует. Умножим обе части уравнения (2) слева на C^{-1}.

$$C^{-1}(XC) = C^{-1} D$$

$$X(C^{-1} C) = D\, C^{-1} \quad XE = D\, C^{-1} \quad X = D\, C^{-1} \quad (2)$$

Если A и C – вырожденные матрицы, то уравнения могут не иметь решения или иметь их бесчисленное множество.

<u>Матричная запись системы уравнений.</u>

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Введем A - матрицу системы (1), полученную из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A_{m\times n}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X_{n\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b_{m\times 1}}$$

$$AX = B(1')$$

матричная запись системы(1)

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B;\ A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Замечание: неизвестные и свободные члены можно расположить в строки, то запись имела бы соответствующий вид.

Теорема Крамера.

Рассмотри систему *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных - определитель системы.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Теорема</u>. Если определитель квадратной системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам:

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \qquad \dots \qquad X_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}; \qquad (*)$$

Δ - определитель системы

Δ_k ($k = 1,2\ldots$) - определитель, полученный из определителя системы заменой k-ого столбца, столбцом свободных членов.

(*) – формулы Крамера, а применение их к решению системы называют Правилом Крамера.

Доказательство:

1.) доказательство существования решения
2.) доказательство единственности решения
3.) вывод формул (*)

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; |A| = -3,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

то есть решение $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{3};\ \ x_2 = \frac{1}{3}.$

ЗАМЕЧАНИЕ

Для решения СЛУ с матрицей А размера выше 4 метод Крамера не стоит применять, т.к. число операций при применении этого метода имеет порядок n!, т.е. быстро растет с порядком системы. ($n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...3\cdot2\cdot1$, $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$).

При решении СЛУ высокого порядка лучше применять метод Гаусса. Суть метода Гаусса состоит в том, что при помощи преобразований, не нарушающих равносильности, исходная система сводится к треугольному виду.

Ранг матрицы, его свойства и вычисление. Системы линейных уравнений

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A_{m\times n}$.

Определение.

Минором матрицы А k-го порядка называется любой определитель, составленный из элементов матрицы А, состоящих на пересечении k строк и k столбцов, где $k \le \min(m,n)$.

Пример.

$$A_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У этой матрицы миноры первого порядка это: $M^1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots 10, 0\}$,

второго порядка – $M^2 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}; \ldots \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \ldots \right\}$,

третьего порядка – $M^3 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \ldots \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \ldots \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \ldots \right\}$.

При этом так как $k \le \min(3, 5)$, то $k = 3$.

Определение.

Рангом матрицы называется число равное наивысшему порядку миноров этой матрицы, отличных от нуля.

Обозначение ранга Rg (A) $\Leftrightarrow$ rang (A) $\Leftrightarrow$ r(A).

Для рассмотренной выше матрицы A_{3x5} ранг равен 3. Действительно $r(A_{3\times5})$ = 3, так как существует $M^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$

Свойства ранга.

Ранг матрицы не изменяется:

1) При транспонировании;
2) При перестановке строк или столбцов местами;
3) При отбрасывании строки или столбца из нулей;
4) При умножении строки или столбца на число не равное нулю;
5) При удалении строки или столбца, являющегося линейной комбинацией других строк (столбцов);
6) При добавлении к строке или столбцу линейной комбинации других строк или столбцов.

Преобразования не изменяющие ранга матрицы называются эквивалентными, и матрицы, получающиеся при таких преобразованиях, называются эквивалентными также.

Обозначения эквивалентных матриц таково A ~ B.

ЗАМЕЧАНИЕ. В литературе эквивалентные преобразования могут называться элементарными преобразованиями. Используя эквивалентные преобразования ранг матрицы может быть определен сведением ее к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2k} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rk} \end{pmatrix}$$

, $a_{ii} \neq 0$, $i=1,2,\ldots r$, $r \leq k$.

Пример.

$$A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -21 & 7 \end{pmatrix},$$

тогда существует $M^3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -21 \end{vmatrix} = -84 \neq 0$, значит r(A)=3.

Назовем *системой линейных уравнений* (СЛУ) систему вида

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases} (1) \Leftrightarrow A\cdot X = B \quad (2)$$

где a_{ij} – известные коэффициенты, x_i – неизвестные переменные, b_i – известные свободные члены,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Решением системы называется такой набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, который после подстановки вместо существующих неизвестных $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ обращает каждое уравнение в верное равенство.

Если такой набор чисел существует, то говорят что система (1) или (2) совместна, если нет - то не совместна.

Расширенной матрицей для систем (1) или (2) называют матрицу, составленную из элементов матриц A и B следующего вида:

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Имеется теорема позволяющая судить о существовании решения систем вида (1) или (2).

Теорема. (Кронеккера - Капелли).

Для существования решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы A равнялся рангу расширенной матрицы A_p ($r(A) = r(A_p)$).

ЗАМЕЧАНИЕ

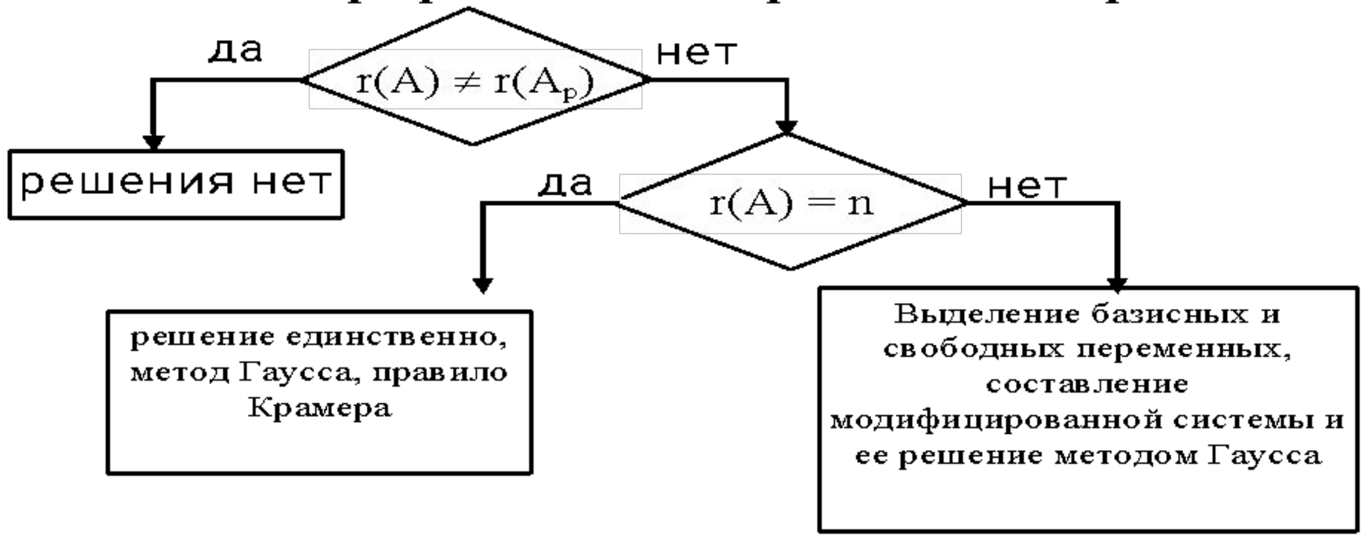
1) Если $r(A) \neq r(A_p)$, то система (1) несовместна

2) Если $r(A) = r(A_p)$, то система (1) совместна, причем решение системы единственно, если $r(A) = r(A_p) = n$ – числу неизвестных, если же $r(A) = r(A_p) < n$, то система имеет бесконечное множество решений.

Алгоритм применения теоремы к решению СЛУ (систем линейных уравнений)

1) Вычисляем $r(A)$ и $r(A_p)$ и сравниваем их
2) Если $r(A) \neq r(A_p)$, то решения СЛУ нет
3) Если $r(A) = r(A_p)$, то проверяем справедливость равенства $r(A) = r(A_p) = n$
4) Если равенство выполняется, то для нахождения единственного решения применяют метод Гаусса или правило Крамера.
5) Если равенство не выполняется ($r(A) = r(A_p) < n$), то перестановкой строк (столбцов) матрицы A находят любой, отличный от нуля минор (базисный минор) так, чтобы в СЛУ первыми стояли r строк базисного минора. При этом (m-r) оставшихся строк системы можно отбросить как не влияющих на решение системы, а (n-r) столбцов с соответствующими неизвестными можно перенести в правую часть системы, задав произвольным образом свободные переменные x_j. Полученную систему r уравнений с r неизвестными можно решить к примеру методом Гаусса.

Графическое изображение алгоритма



Среди СЛУ особое место занимают однородные системы линейных уравнений (ОСЛУ)

$$A_{mxn} \cdot X_{nx1} = 0 \tag{3}$$

Решение ОСЛУ всегда существует , т.к. $r(A) = r(A_p)$. Если $m = n$, а определитель $|A| \neq 0$, то система (3) имеет нулевое (тривиальное) решение. Не нулевые решение системы (3) возможны тогда и только тогда, когда $r(A)<n$, при этом решений бесчисленное множество. Найти это множество решений можно используя понятие базисных и свободных переменных (см. Теорему Кронеккера-Капелли).

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{a}_{11}\cdot x_1 + \tilde{a}_{12}\cdot x_2 + \tilde{a}_{13}\cdot x_3 = \tilde{b}_1 \\ 0 + \tilde{a}_{22}\cdot x_2 + \tilde{a}_{23}\cdot x_3 = \tilde{b}_2 \\ 0 + 0 + \tilde{a}_{33}\cdot x_3 = \tilde{b}_3 \end{cases}$$

Переход к равносильной треугольной системе называют прямым ходом метода Гаусса. Выражая из треугольной системы $x_3 = -\dfrac{\tilde{b}_3}{\tilde{a}_{33}}$, затем

$x_2 = \dfrac{1}{\tilde{a}_{22}}\cdot(\tilde{b}_2 - \tilde{a}_{23}\cdot\tilde{x}_3)$, затем

$x_1 = \dfrac{1}{\tilde{a}_{11}}\cdot(\tilde{b}_1 - \tilde{a}_{12}\cdot\tilde{x}_2 - \tilde{a}_{13}\cdot\tilde{x}_3)$, то есть выполняя обратный ход метода Гаусса, легко находим решение системы.

Равносильные преобразования в методе Гаусса - это линейные комбинации строк матрицы.

Для иллюстрации метода Гаусса рассмотрим примеры.

Пример.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Шаг 1. Делим коэффициенты первого уравнения на коэффициент $a_{11} \neq 0$, при этом получается равносильная система уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Шаг 2. На месте 2 и 3 уравнений поставим сумму 1-го уравнения, умноженного на (-1), и 2,3- уравнений. На месте 4-го уравнения сумму 1-ой строки, умноженную на (-2), и 4-ой строки. Для краткости записей воспользуемся понятием расширенной матрицы и эквивалентных преобразований

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & +\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -5 & +\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim$$

Т. к. во 2, 3, 4 уравнениях неизвестное x_1- исключено, то применим схему приведенную выше для исключения неизвестных в системе, состоящей из 2, 3, 4 уравнений. Для этого вторую строку разделим на 1/2, на месте 3, поставим сумму элементов 2 строки, умноженную на (-7/2), и 3-й строки на месте 4-ой строки сумму элементов 2 строки умноженную на (-1) и 4 строки.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -{}^{3}\!/_{2} & 2 & {}^{1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -4 \end{array}\right)\sim$$

Исключая неизвестные в 3 и 4 уравнениях по той же схеме завершим прямой ход метода Гаусса.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -{}^{3}\!/_{2} & 2 & {}^{1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{12}\!/_{5} & {}^{7}\!/_{5} \\ 0 & 0 & 0 & +{}^{18}\!/_{5} & -{}^{13}\!/_{5} \end{array}\right)$$

Используя обратный ход метода Гаусса, имеем:

$$x_4 = -\frac{13}{18},$$

$$x_3 = \frac{7}{5} - \frac{12}{5}\cdot\frac{13}{18} = -\frac{1}{3} \qquad .$$

$$x_2 = 3 - 3\cdot\frac{13}{18} = \frac{5}{6}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{13}{36} = \frac{25}{9}$$

Лекция 4. Определение линейного пространства. Аксиомы, линейная зависимость и независимость векторов. Базис и размерность линейного пространства; преобразование координат вектора при переходе к новому базису. Скалярное произведение векторов, норма вектора, неравенство Коши-Буняковского, ортонормированиый базис. Линейный оператор, его матрица. Матрица линейного оператора при переходе к новому базису. Собственные векторы, их нахождение. Квадратичные формы, приведение их формы к каноническом) виду.

1. Линейные пространства

Определение.

Множество $\mathbf{L} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, ...\}$ элементов любой природы называется линейным пространством над полем действительных чисел **R**, если выполняются три условия:

1°) в множестве $\mathbf{L}$ определена операция сложения $\oplus$, которая каждым двум элементам $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ ставит в соответствие единственный третий элемент $\mathbf{z} \in \mathbf{L}$ (обозначаемый $\mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$ и называемый их суммой);

2°) в множестве $\mathbf{L}$ определена операция умножения на элементы поля **R** $\otimes$, которая каждому элементу $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и каждому элементу $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}$ ставит в соответствие единственный элемент $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{L}$ (обозначаемый $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\lambda} \otimes \mathbf{x}$ и называемый произведением действительного числа $\boldsymbol{\lambda}$ на $\mathbf{x}$);

3°) операции сложения и умножения на действительное число удовлетворяют следующим восьми аксиомам:

1) $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x}$ для $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$;

2) $(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})$ для $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{L}$;

1) существует $\mathbf{o} \in \mathbf{L}$ (называемый нулевым элементом в $\mathbf{L}$) такой, что $\mathbf{x} \oplus \mathbf{o} = \mathbf{x}$ для $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{L}$;

2) для $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{L}$ существует единственный элемент $(-\mathbf{x}) \in \mathbf{L}$ (называемый противоположным для $\mathbf{x}$) такой, что $\mathbf{x} \oplus (-\mathbf{x}) = \mathbf{o}$;

5) $1 \otimes \mathbf{x} = \mathbf{x}$ для $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{L}$;

6) $\boldsymbol{\lambda} \otimes (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{x}) = (\boldsymbol{\lambda\mu}) \otimes \mathbf{x}$ для $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и $\forall \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}$;

7) $\boldsymbol{\lambda} \otimes (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = \boldsymbol{\lambda} \otimes \mathbf{x} \oplus \boldsymbol{\lambda} \otimes \mathbf{y}$ для $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ и $\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}$;

8) $(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}) \otimes \mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda} \otimes \mathbf{x} \oplus \boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{x}$ для $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и $\forall \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}$.

Аксиомы 1) – 4) называются аксиомами сложения, аксиомы 5) , 6) – аксиомами умножения, аксиомы 7) , 8) - аксиомами дистрибутивности .

Элементы всякого линейного пространства обычно называют векторами и обозначают $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}} \ldots$, а само линейное пространство называют **векторным пространством**.

Заметим, что в определении линейного пространства не говорится, каким именно образом определены операции сложения и умножения на действительное число. Существенно лишь то, что они должны удовлетворять перечисленным выше аксиомам 1) – 8).

2. Линейная зависимость векторов линейного пространства.

Рассмотрим произвольное линейное пространство **L** . Здесь и в дальнейшем операции сложения « $\oplus$ » и умножения на число « $\otimes$ » в нем будем обозначать проще: « + » и « · ».

Пусть $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ - некоторые элементы этого пространства.

Определение. Выражение вида $\alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overline{e_n}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$, называется **линейной комбинацией** векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются коэффициентами этой линейной комбинации.

Определение. Система векторов ($\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$) линейного пространства **L** называется **линейно независимой**, если их линейная комбинация равна нулевому элементу пространства в том и только в том случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. В противном случае, т.е. когда равенство $\alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overline{e_n} = \overline{o}$ возможно и при условии, что хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ отличен от нуля, векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ называются линейно зависимыми.

Итак, для линейно независимой системы векторов:

$$\alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overline{e_n} = \overline{o} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \dots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}.$$

3. Размерность линейного пространства. Базис. Координаты

Определение. Линейное пространство **L** называется **n-мерным**, если в нем существует **n** линейно независимых векторов, а любые (**n+1**) векторы этого пространства линейно зависимы.

Определение . **Базисом n-мерного пространства L** называется любая упорядоченная система из **n** линейно независимых векторов этого пространства.

Основная теорема о базисе:

Любой вектор пространства **L** может быть единственным образом разложен по базису $\mathbf{E} = (\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}, \ldots, \overline{\mathbf{e}_n})$ этого пространства, и при этом, если $\overline{\mathbf{x}} = \lambda_1 \overline{\mathbf{e}_1} + \lambda_2 \overline{\mathbf{e}_2} + \ldots + \lambda_n \overline{\mathbf{e}_n}$, то числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются координатами вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе **E**.

Теорема, обратная теореме о базисе:

Если в пространстве **L** существует **n** линейно независимых векторов ($\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}, \ldots, \overline{\mathbf{e}_n}$) таких, что любой вектор $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{L}$ линейно выражается через $\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}, \ldots, \overline{\mathbf{e}_n}$, то пространство является **n**-мерным, а система $(\overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}, \ldots, \overline{\mathbf{e}_n})$ – одним из его базисов.

4. Матрица перехода от одного базиса к другому.

Пусть $\boldsymbol{E} = \left\{ \overline{e_1}; \overline{e_2}; \ldots, \overline{e_n} \right\}$ - некоторый базис в линейном пространстве **L**.

I пусть $\boldsymbol{E}' = \left\{ \overline{e_1}'; \overline{e_2}'; \ldots, \overline{e_n}' \right\}$ - какой-либо другой базис в этом же пространстве.

Матрицей перехода от базиса E к базису E' называется матрица T, столбцами которой являются координаты векторов $\overline{\mathbf{e_i}}'$ $(\mathbf{i} = 1,2,..,\mathbf{n})$ в базисе E.

Пусть $\overline{\mathbf{x}}$ - некоторый вектор из линейного пространства **L**.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \ldots \\ \mathbf{x}_\mathbf{n} \end{pmatrix}$$ - координаты этого вектора в базисе **E**.

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \\ \ldots \\ \mathbf{x}_\mathbf{n}' \end{pmatrix}$$ - координаты этого вектора в базисе $\mathbf{E}'$.

Тогда имеет место формула: $\mathbf{X}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{X}$.

5. Линейный оператор

Пусть каждому элементу $\overline{\mathbf{x}}$ из линейного пространства **L** некоторое преобразование $\underline{\mathbf{A}}$ ставит в соответствие элемент $\underline{\mathbf{A}}(\overline{\mathbf{x}})$ из этого же пространства.

Определение. Преобразование $\underline{\mathbf{A}}$ называется **линейным**, если:

1) для любых элементов $\overline{\mathbf{x}_1} \in \mathbf{L}$ и $\overline{\mathbf{x}_2} \in \mathbf{L}$ выполняется равенство

$$\underline{\mathbf{A}}(\overline{\mathbf{x}_1} + \overline{\mathbf{x}_2}) = \underline{\mathbf{A}}(\overline{\mathbf{x}_1}) + \underline{\mathbf{A}}(\overline{\mathbf{x}_2}); \qquad (1)$$

2) для любого числа $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}$ и любого элемента $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{L}$ выполняется равенство

$$\underline{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \overline{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{\mathbf{A}}(\overline{\mathbf{x}}). \qquad (2)$$

Замечания.

1) Линейное преобразование называется также линейным оператором.

2) В обозначении $\underline{\mathbf{A}}(\overline{\mathbf{x}})$ скобки обычно опускаются.

6. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису

Пусть в линейном пространстве L дан некоторый базис $E=(\overline{e_1};\overline{e_2};\ldots;\overline{e_n})$ и некоторый линейный оператор $\underline{A}$.

Найдем образы базисных векторов под действием оператора $\underline{A}$:

$$\underline{A}\overline{e_1}=a_{11}\overline{e_1}+a_{21}\overline{e_2}+\ldots+a_{n1}\overline{e_n}$$

$$\underline{A}\overline{e_2}=a_{12}\overline{e_1}+a_{22}\overline{e_2}+\ldots+a_{n2}\overline{e_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\underline{A}\overline{e_n}=a_{1n}\overline{e_1}+a_{2n}\overline{e_2}+\ldots+a_{nn}\overline{e_n}\,.$$

Тогда матрица, столбцами которой являются координатные столбцы бразов базисных векторов: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ -

называется **матрицей оператора** $\underline{\mathrm{A}}$ в базисе E и обозначается A_{E}. При этом, если x_{E} представляет собой столбец координат вектора $\overline{x}\in L$, то столбец координат образа этого вектора будет находиться по формуле:

$$\mathrm{y}_{\mathrm{E}}=\mathrm{A}_{\mathrm{E}}\cdot\mathrm{x}_{\mathrm{E}}\,. \qquad (1)$$

Пусть E' - какой-либо другой базис пространства L, T - матрица перехода от базиса E к базису E'. Тогда матрица оператора $\underline{\mathrm{A}}$ в базисе E' вычисляется по следующей формуле:

$$A_{E}=T^{-1}\cdot A_{E}\cdot T\,. \qquad (2)$$

7. Действия над линейными операторами

Рассмотрим множество линейных операторов, действующих в линейном пространстве **L**.

Определение 1. Суммой двух операторов $\underline{\mathbf{A}}$ и $\underline{\mathbf{B}}$ называется такой оператор $\underline{\mathbf{C}}$, который на любой вектор $\bar{\mathbf{x}}$ пространства **L** действует по следующему правилу: $\underline{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{x}}$.

В этом случае пишут: $\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{B}}$.

Определение 2. Произведением некоторого действительного числа $\boldsymbol{\lambda}$ на оператор $\underline{\mathbf{A}}$ называется такой оператор $\underline{\mathbf{Д}}$, который на каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}$ пространства **L** действует по следующему правилу $\underline{\mathbf{Д}}\bar{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda}(\underline{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}})$.

В этом случае пишут: $\underline{\mathbf{Д}} = \boldsymbol{\lambda}\underline{\mathbf{A}}$.

Определение 3. Оператором, противоположным к оператору $\underline{\mathbf{A}}$, называется такой оператор $(-\underline{\mathbf{A}})$, который на каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}$ пространства **L** действует по следующему правилу: $(-\underline{\mathbf{A}})\bar{\mathbf{x}} = (-1)\underline{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}$.

В этом случае пишут: $-\underline{\mathbf{A}} = (-1)\underline{\mathbf{A}}$.

Определение 4. Произведением операторов $\underline{\mathbf{A}}$ и $\underline{\mathbf{B}}$ называется такой оператор $\underline{\mathbf{F}}$, который на каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}$ пространства **L** действует по следующему правилу: $\underline{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{x}} = (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}})\bar{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{x}})$.

Рассмотрим некоторый базис $\mathbf{E} = \left\{ \overline{\mathbf{e}_1} \, ; \, \overline{\mathbf{e}_2} \, ; \, \dots , \, \overline{\mathbf{e}_n} \right\}$ в линейном пространстве **L.** Каждому линейному оператору соответствует матрица в выбранном базисе (см. пункт 6). Пусть $\underline{\mathbf{A}}$ и $\underline{\mathbf{B}}$ - линейные операторы в линейном пространстве **L.**

Справедлива следующая **теорема:**

1) При сложении линейных операторов их матрицы складываются;
2) При умножении линейного оператора на число его матрица умножается на это число;
3) Произведению операторов $\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}}$ соответствует матрица, равная произведению матрицы оператора $\underline{\mathbf{A}}$ на матрицу оператора $\underline{\mathbf{B}}$.

8.Образ и ядро линейного оператора

Пусть в линейном пространстве $\mathbf{L}$ задан некоторый линейный оператор $\underline{\mathbf{A}}$.

Определение 1. Множество векторов $\left\{\underline{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} \mid \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{L}\right\}$ называется образом (областью значений) оператора $\underline{\mathbf{A}}$, действующего в этом пространстве, и обозначается $\mathbf{Jm}\underline{\mathbf{A}}$.

Определение 2. Множество всех векторов $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{L}$ таких, что $\underline{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{0}}$, называется ядром оператора и обозначается $\mathbf{Ker}\underline{\mathbf{A}}$.

Чтобы найти матрицу оператора $\underline{\mathbf{B}}$ в базисе $\mathbf{E}=(\bar{\mathbf{i}};\ \bar{\mathbf{j}};\ \bar{\mathbf{k}})$, найдем образы базисных векторов. Учитывая, что поворот векторов происходит вокруг оси **Ox**, образом вектора $\bar{\mathbf{i}}$ является вектор $\bar{\mathbf{i}}$, значит,

$$\underline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{i}}=1\cdot\bar{\mathbf{i}}+0\cdot\bar{\mathbf{j}}+0\cdot\bar{\mathbf{k}}.$$

Образом вектора $\bar{\mathbf{j}}$ в результате действия оператора $\underline{\mathbf{B}}$ является вектор с координатами $(0;\cos\boldsymbol{\varphi};\sin\boldsymbol{\varphi})$, а образом вектора $\bar{\mathbf{k}}$ - вектор с координатами ($0;-\sin\boldsymbol{\varphi};\cos\boldsymbol{\varphi})$ (см. рис. 5) , т.е.

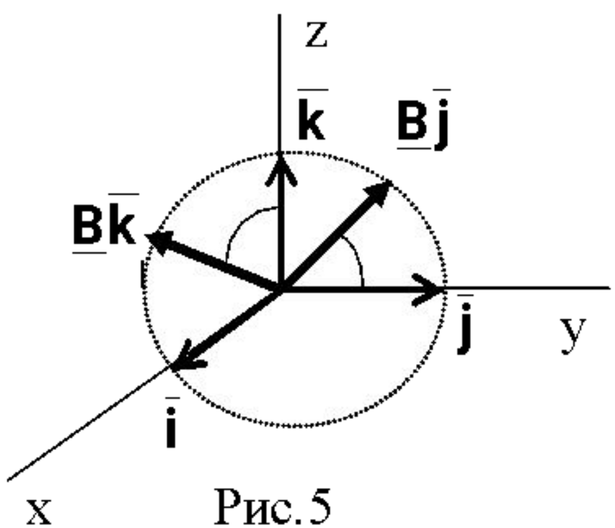


Рис.5

$$\underline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{j}}=0\cdot\bar{\mathbf{i}}+\cos\boldsymbol{\varphi}\bar{\mathbf{j}}+\sin\boldsymbol{\varphi}\bar{\mathbf{k}}$$

$$\underline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{k}}=0\cdot\bar{\mathbf{i}}-\sin\boldsymbol{\varphi}\bar{\mathbf{j}}+\cos\boldsymbol{\varphi}\bar{\mathbf{k}}.$$

Теперь составим матрицу оператора $\underline{\mathbf{B}}$ (см. пункт 6):

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\boldsymbol{\varphi} & -\sin\boldsymbol{\varphi}\\ 0 & \sin\boldsymbol{\varphi} & \cos\boldsymbol{\varphi}\end{pmatrix}.$$

Пусть произвольный вектор $\overline{\mathbf{x}}$ имеет координаты $(\mathbf{x}_1\,;\,\mathbf{x}_2\,;\,\mathbf{x}_3)$. По формуле (1) из пункта 6 вычислим столбец координат образа этого вектора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\boldsymbol{\varphi} & -\sin\boldsymbol{\varphi} \\ 0 & \sin\boldsymbol{\varphi} & \cos\boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2\cos\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{x}_3\sin\boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{x}_2\sin\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{x}_3\cos\boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$\underline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1\overline{\mathbf{i}} + (\mathbf{x}_2\cos\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{x}_3\sin\boldsymbol{\varphi})\overline{\mathbf{j}} + (\mathbf{x}_2\sin\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{x}_3\cos\boldsymbol{\varphi})\overline{\mathbf{k}} \; .$$

Тогда образом оператора $\underline{\mathbf{B}}$ является множество

$$\mathbf{Im}\underline{\mathbf{B}} = \left\{ \mathbf{x}_1\overline{\mathbf{i}} + (\mathbf{x}_2\cos\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{x}_3\sin\boldsymbol{\varphi})\overline{\mathbf{j}} + (\mathbf{x}_2\sin\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{x}_3\cos\boldsymbol{\varphi})\overline{\mathbf{k}} \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Покажем, что это множество есть множество $\mathbf{V}^3$, т.е. каждый вектор $\mathbf{V}^3$ является образом некоторого вектора $\overline{\mathbf{x}}$.

Пусть $\overline{\mathbf{y}}$ - произвольный вектор пространства $\mathbf{V}^3$ с координатами $(\mathbf{y}_1\,;\,\mathbf{y}_2\,;\,\mathbf{y}_3)$. Докажем, что существует вектор $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}^3$ такой, что $\underline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

Это равносильно следующему равенству:

$$\mathbf{x}_1 \bar{\mathbf{i}} + (\mathbf{x}_2 \cos \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{x}_3 \sin \boldsymbol{\varphi})\bar{\mathbf{j}} + (\mathbf{x}_2 \sin \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{x}_3 \cos \boldsymbol{\varphi})\bar{\mathbf{k}} =$$

$$= \mathbf{y}_1 \bar{\mathbf{i}} + \mathbf{y}_2 \bar{\mathbf{j}} + \mathbf{y}_3 \bar{\mathbf{k}} \iff \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_2 \cos \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{x}_3 \sin \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x}_2 \sin \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{x}_3 \cos \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{y}_3 \end{cases}$$

ı эта система является совместной, т.к. ее главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \boldsymbol{\varphi} & -\sin \boldsymbol{\varphi} \\ 0 & \sin \boldsymbol{\varphi} & \cos \boldsymbol{\varphi} \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

'аким образом, единственное решение этой системы $(\mathbf{x}_1 ; \mathbf{x}_2 ; \mathbf{x}_3)$

вляется координатами искомого вектора $\bar{\mathbf{x}}$.

Для нахождения ядра оператора $\underline{\mathbf{B}}$ решим уравнение

$$\underline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{O}} \iff \mathbf{x}_1 \bar{\mathbf{i}} + (\mathbf{x}_2 \cos \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{x}_3 \sin \boldsymbol{\varphi})\bar{\mathbf{j}} + (\mathbf{x}_2 \sin \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{x}_3 \cos \boldsymbol{\varphi})\bar{\mathbf{k}} =$$

$$= 0 \cdot \bar{\mathbf{i}} + 0 \cdot \bar{\mathbf{j}} + 0 \cdot \bar{\mathbf{k}} \iff \begin{cases} \mathbf{x}_1 = 0 \\ \mathbf{x}_2 \cos \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{x}_3 \sin \boldsymbol{\varphi} = 0 \\ \mathbf{x}_2 \sin \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{x}_3 \cos \boldsymbol{\varphi} = 0 . \end{cases}$$

Очевидно, что эта однородная система имеет только нулевое решение:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = 0 \\ \mathbf{x}_2 = 0 \\ \mathbf{x}_3 = 0 . \end{cases}$$

Поэтому ядро оператора $\underline{\mathbf{B}}$ состоит лишь из нулевого вектора:

$$\mathrm{Ker}\ \underline{\mathbf{B}} = \left\{ \mathbf{0} \cdot \bar{\mathbf{i}} + \mathbf{0} \cdot \bar{\mathbf{j}} + \mathbf{0} \cdot \bar{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{o}} \right\}.$$

9. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора

Пусть **L** – некоторое линейное пространство, $\underline{\mathbf{A}}$ - линейный оператор, действующий в этом пространстве.

Определение. Ненулевой вектор $\overline{\mathbf{x}}$ называется **собственным вектором** линейного оператора $\underline{\mathbf{A}}$ с собственным числом $\boldsymbol{\lambda}$, если $\underline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda}\overline{\mathbf{x}}$ (1),
где $\boldsymbol{\lambda}$ - некоторое действительное число.

Пусть **A** – матрица оператора $\underline{\mathbf{A}}$, **E** – единичная матрица того же размера, **X** – столбец координат вектора $\overline{\mathbf{x}}$, **0** – нулевой столбец.

Тогда $\underline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda}\overline{\mathbf{x}} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$. (2)

Отсюда следует, что число $\boldsymbol{\lambda}$ будет собственным числом оператора $\underline{\mathbf{A}}$ в том и только в том случае, когда $|\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}| = 0$. (3)

Уравнение (3) называется **характеристическим уравнением** для матрицы **A**. Итак, $\boldsymbol{\lambda}$ - собственное число $\underline{\mathbf{A}}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\lambda}$ является корнем характеристического уравнения для матрицы **A**. Столбец координат **X** любого собственного вектора, соответствующего собственному числу $\boldsymbol{\lambda}$, есть некоторое нетривиальное решение однородной системы (2).

10. Квадратичные формы

Определение. Квадратичной формой действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных, т.е. многочлен, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Квадратичная форма имеет вид $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$, где

$a_{ij} = a_{ji}$ - коэффициенты квадратичной формы.

Например, при $n = 2$:

$$f(x_1, x_2) = a_{11} \cdot x_1^2 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{21} \cdot x_2 \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2^2 =$$
$$= a_{11} \cdot x_1^2 + 2a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2;$$

при $n=3$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + a_{33} \cdot x_3^2 + 2a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 +$$
$$+ 2a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 .$$

Симметрическую матрицу $(\mathbf{a_{ij}} = \mathbf{a_{ji}})$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1\mathbf{n}} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2\mathbf{n}} \\ . & . & & . \\ \mathbf{a}_{\mathbf{n}1} & \mathbf{a}_{\mathbf{n}2} & \dots & \mathbf{a}_{\mathbf{nn}} \end{pmatrix},$$

составленную из коэффициентов квадратичной формы, называют **матрицей квадратичной формы**. Квадратичная форма называется **канонической** (иначе говоря, имеет канонический вид), если все $\mathbf{a_{ij}} = 0$ при $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$.

Нахождение по данной квадратичной форме эквивалентной ей канонической квадратичной формы, называется **приведением квадратичной формы к каноническому виду.**

Преобразования, приводящие квадратичную форму к каноническому виду, могут быть найдены методом Якоби, Лагранжа, ортогональным преобразованием или другими.

Рассмотрим некоторые из них.

Метод Лагранжа –приведения квадратичной формы к каноническому виду – состоит в последовательном выделении в квадратичной форме полных квадратов.

Следует иметь в виду, что канонический вид квадратичной формы так же, как и линейное невырожденное преобразование, которое приводит квадратичную форму к каноническому виду, определяется неоднозначно. Однако при этом справедлив **закон инерции квадратичной формы**: число слагаемых с положительными каноническими коэффициентами и число слагаемых с отрицательными каноническими коэффициентами постоянно и не зависит от линейного невырожденного преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Замечание. Если в записи квадратичной формы $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\mathbf{n})$ отсутствует переменная $\mathbf{x}_\mathbf{k}\,(\mathbf{k} < \mathbf{n})$, т.е. $\mathbf{a}_{\mathbf{mk}} = 0\,(1 \le \mathbf{m} \le \mathbf{n})$, то, записывая преобразование переменных, надо положить $\mathbf{x}_\mathbf{k}' = \mathbf{x}_\mathbf{k}$

11. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования.

Ввиду того, что матрица квадратичной формы является **симметрической** (т.к. $a_{ij} = a_{ji}$), то корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ее характеристического уравнения являются действительными числами (см. свойства симметрической матрицы). Пусть $\overline{e_1}', \overline{e_2}', \ldots, \overline{e_n}'$ - ортогональные нормированные собственные векторы, соответствующие характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, в ортогональном базисе $I = \left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots \overline{e_n}\right\}$.

В свою очередь, векторы $\overline{e_1}', \overline{e_2}', \ldots, \overline{e_n}'$ образуют некоторый ортонормированный базис. Разлагая вектор $\overline{e_i}'$ по базису E, составим матрицу перехода от базиса E к базису E' ($E \xrightarrow{T} E'$), и формулы преобразования координат векторов при переходе к новому ортонормированному базису из собственных векторов будут иметь вид: $x_E = T \cdot x_{E'}$.

Преобразовав при помощи этих формул квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, получим квадратичную форму

$$f(x_1', x_2', \ldots, x_n') = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \ldots + \lambda_n (x_n')^2,$$

не содержащую членов с произведениями $x_i' x_j'$, где $i \neq j$.

Принято говорить, что квадратичная форма при этом приведена к каноническому виду при помощи **ортогонального преобразования**.

Согласно сказанному, приведение квадратичной формы к каноническому виду может быть осуществлено по следующему плану.

Пусть в некотором базисе $\mathbf{E} = \left\{ \overline{\mathbf{e}_1}, \overline{\mathbf{e}_2}, \ldots \overline{\mathbf{e}_n} \right\}$ дана квадратичная форма

$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ с матрицей $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{2n} \\ . & . & . \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}.$

1.Составляем характеристическое уравнение матрицы **A:**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} - \lambda & \mathbf{a}_{12} & \ldots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} - \lambda & \ldots & \mathbf{a}_{2n} \\ . & . & & . \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & & \mathbf{a}_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$ и находим его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

2.Находим **n** собственных векторов с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ так, чтобы эти векторы были ортогональны друг к другу (это всегда возможно, так как преобразование является симметрическим, и, кроме того, собственные векторы симметрического оператора, соответствующие различным собственным числам, уже взаимно ортогональны), обозначим их соответственно через $\overline{\mathbf{e}_1}', \overline{\mathbf{e}_2}', \ldots, \overline{\mathbf{e}_n}'$.

1.Переходим к базису из собственных векторов. В этом базисе матрица линейного преобразования будет иметь диагональный вид:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

и данная квадратичная форма получает канонический вид:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1{}', \mathbf{x}_2{}', \ldots, \mathbf{x}_\mathbf{n}{}') = \lambda_1(\mathbf{x}_1{}')^2 + \lambda_2(\mathbf{x}_2{}')^2 + \ldots + \lambda_\mathbf{n}(\mathbf{x}_\mathbf{n}{}')^2.$$

(при переходе к базису $\mathbf{E}'$ координаты всех векторов преобразуются согласно матричному равенству $\mathbf{x}_\mathbf{E} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}_{\mathbf{E}'}$, где $\mathbf{T}$ – матрица перехода от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\mathbf{E}'$).