Числові послідовності

Границя послідовності.

Означення границі послідовності

- Число $a \in \mathbb{R}$ називається **границею** посл. $\{a_n | n \geq 1\}$, якщо для довільного додатного ε знайдеться такий номер N з множини натуральних чисел, який залежить від ε, починаючи з якого виконується нерівність: $|a_n - a| < \varepsilon$.

$a \in \mathbb{R}$ – **границя** $\{a_n | n \geq 1\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Позн. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ або $a_n \to a, n \to \infty.$

Означення

Послідовність, яка має границю, називається **збіжною**.

Послідовність, у якої не має границі називається **розбіжною**.

Геометричний зміст

- $\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N \colon |a_n - a| < \varepsilon$

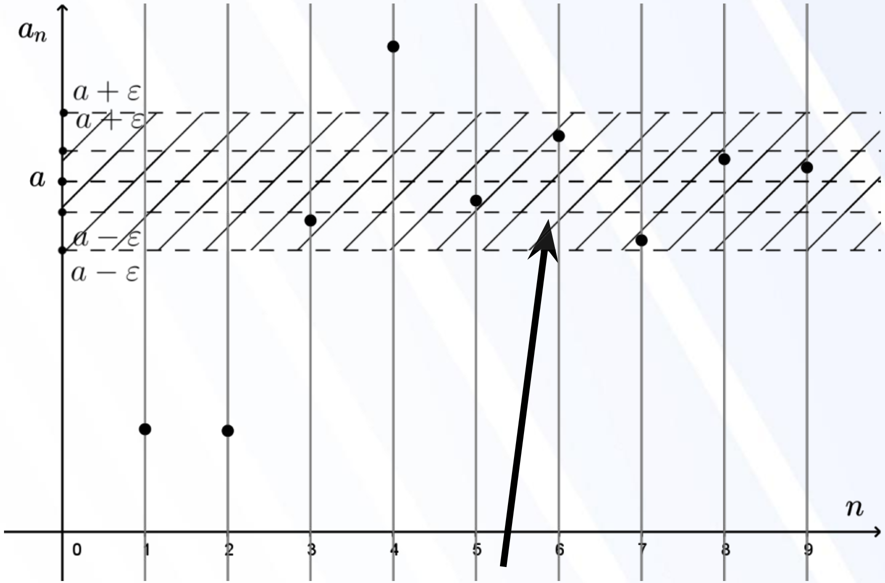
$$\Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{a} - \varepsilon < \boldsymbol{a_n} < \boldsymbol{a} + \varepsilon$$

Геометричний зміст

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

- Тобто для кожного конкретного ε всі члени збіжної послідовності, починаючи з номера $N(\varepsilon)$ будуть знаходитись у множині $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.

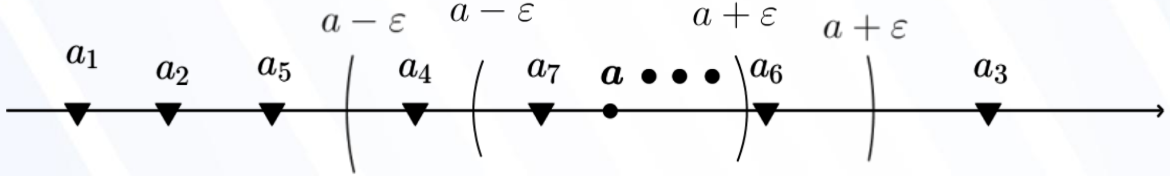


ε-труба

Геометричний зміст

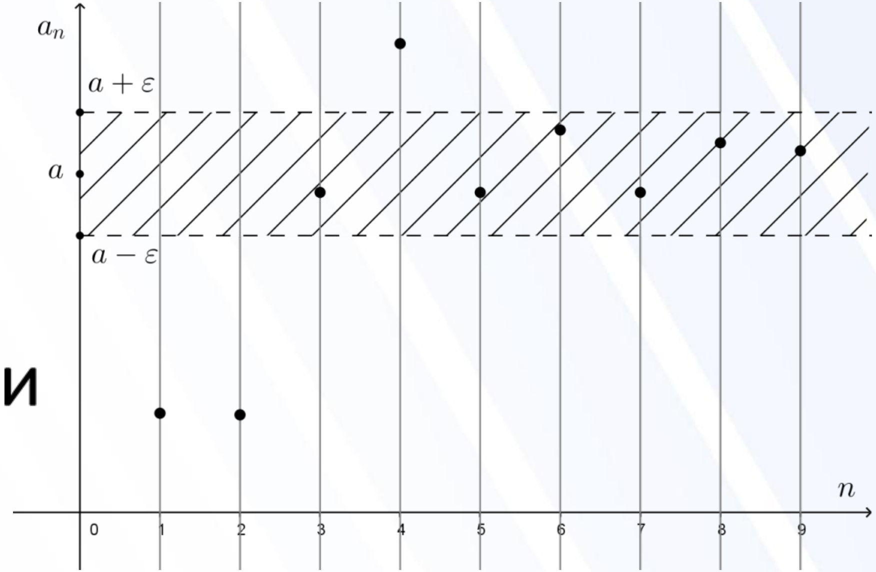
- $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. **$\varepsilon$-околом** т. a називається інтервал
$$(a - \varepsilon; a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

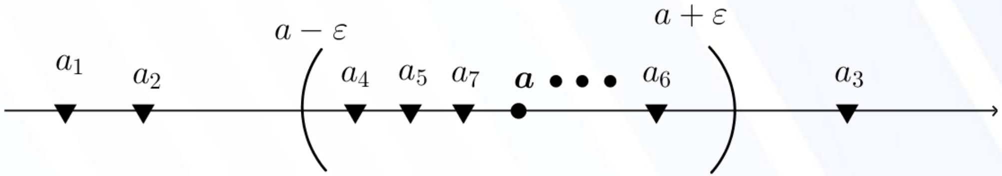
Тобто, для кожного $\varepsilon > 0$, починаючи з деякого номера, всі члени збіжної послідовності попадають у ε-окіл її границі.



Зауваження 1

- До $N(\mathcal{E})$ члени послідовності можуть попадати і не попадати в $\mathcal{E}$-окіл. Після **<u>всі</u>** мають бути в $\mathcal{E}$-околі.

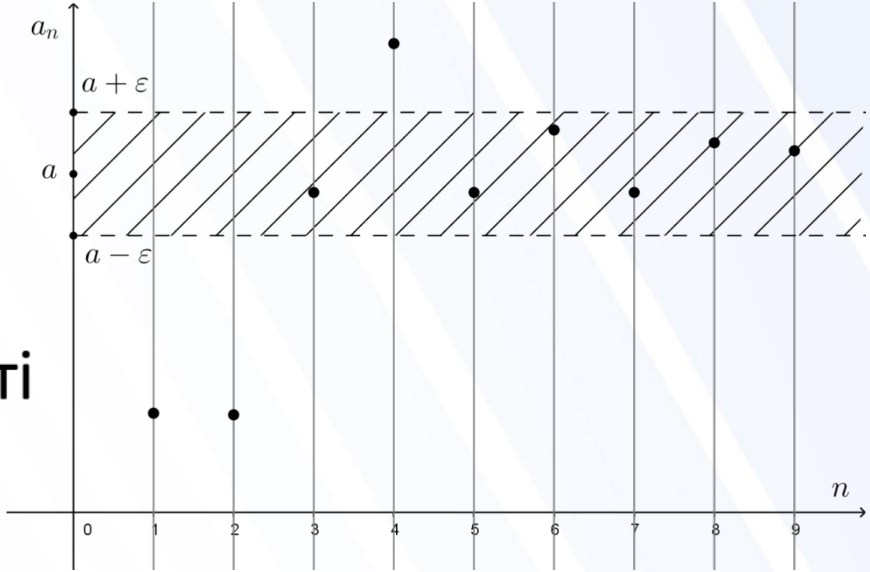


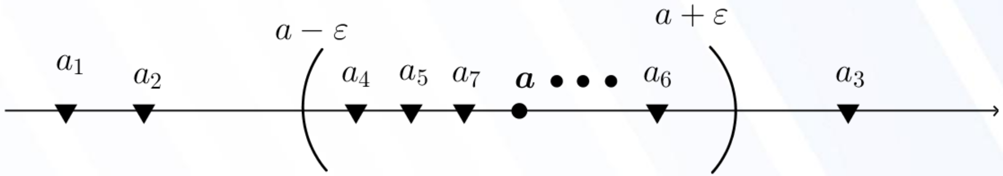


Зауваження 2

- Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,$

 то для $\forall \varepsilon > 0$ зовні ε-околу знаходиться лише скінченна кількість членів послідовності (може і жодного).





- Знайти границю послідовності $a_n = \frac{3n-1}{n}, n \geq 1.$

$$a_1 = 2, a_2 = 2{,}5, a_3 = 2\frac{2}{3}, a_4 = 2\frac{3}{4}, \ldots, a_{100} = 2{,}99, \ldots,$$

Гіпотеза: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

Доведемо за означенням

Тобто для $\forall \varepsilon > 0$ треба знайти N, починаючи з якого

$$|a_n - 3| < \varepsilon.$$

- Знайти границю послідовності $a_n = \frac{3n-1}{n}, n \geq 1.$

Розглянемо частковий випадок $\mathcal{E} = \frac{1}{100}$:

$$|a_n - 3| < 0{,}01 \Leftrightarrow \left|\frac{3n-1}{n} - 3\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|-\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 100.$$

Отже для $n \geq 101$: $|a_n - 3| < 0{,}01$ і $N = 101$.

- Знайти границю послідовності $a_n = \frac{3n-1}{n}, n \geq 1.$

Тепер в загальному випадку $\forall \varepsilon > 0$:

$$|a_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3n-1}{n} - 3\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Отже $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ – найперше натуральне число, що перевищує $\frac{1}{\varepsilon}$.

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3.$

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0} : \exists \boldsymbol{N} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\varepsilon}\right] + \mathbf{1} : \forall \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N} : |\boldsymbol{a_n} - \mathbf{3}| < \varepsilon$$

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0.$

Нехай $\varepsilon > 0$:

Знайдемо $N(\varepsilon)$, починаючи з якого $|a_n - 0| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{3}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}: \exists \boldsymbol{N} = \left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}\right] + \mathbf{1}: \forall \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N}: |\boldsymbol{a_n} - \mathbf{0}| < \varepsilon$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0.$

Теорема про єдиність границі послідовності

Збіжна послідовність має лише одну границю.

Теорема про єдиність границі послідовності

Доведення: Метод від супротивного

Нехай

$$a_n \to a, n \to \infty \text{ і } a_n \to b, n \to \infty, a, b \in \mathbb{R} \text{ і } a \neq b$$

Тоді за означенням

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_2: |a_n - b| < \varepsilon$$

Теорема про єдиність границі послідовності

$$\forall \varepsilon > 0: \ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N_1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0: \ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N_2: |a_n - b| < \varepsilon$$

Розглянемо $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}, N_3 = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$\forall n \geq N_3(\varepsilon)$ $|a_n - a| < \varepsilon$, бо $N_3 \geq N_1(\varepsilon)$

$|a_n - b| < \varepsilon$, бо $N_3 \geq N_2(\varepsilon)$

Теорема про єдиність границі послідовності

$$\mathcal{E} = \frac{|a-b|}{3}$$

$$\forall n \geq N_3(\mathcal{E})$$

$$|a_n - a| < \mathcal{E}$$

$$|a_n - b| < \mathcal{E}$$

$$\forall n \geq N_3 \colon |a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq$$

$$\leq |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| <$$

$$< \mathcal{E} + \mathcal{E} = 2\mathcal{E} = \frac{2}{3}|a-b|$$

Маємо $|a-b| < \frac{2}{3}|a-b| \Rightarrow$ протиріччя $\Rightarrow a = b.$

Властивості збіжних послідовностей.

Теорема 1

Збіжна послідовність – обмежена.