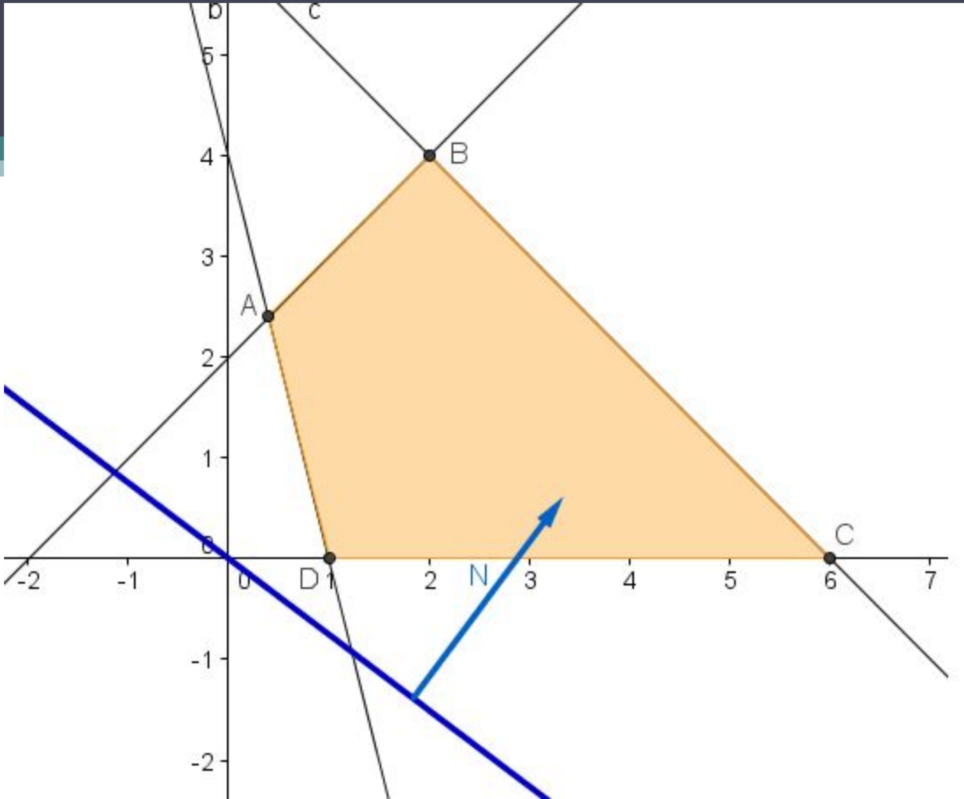
Задачи линейного программирования



Линейное программирование - *направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных (**оптимизационных**) задач, которые характеризуются **линейной зависимостью между переменными и линейным показателем эффективности**.*

- Критерий эффективности операции (функция цели) - линейная функция нескольких переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \ ;$$

- Условия, которыми должны обладать переменные, определяют некоторую область ***G,*** задаваемую системой ***линейных*** равенств и/или неравенств (система ограничений).

Общая формулировка ЗЛП

В наиболее общей форме задачу линейного программирования формулируют следующим образом: ***необходимо найти такое решение системы ограничений, удовлетворяющее дополнительным условиям, при котором целевая функция достигает своего оптимального (максимального или минимального решения)***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n\{\le, \ge, =\}b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n\{\le, \ge, =\}b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n\{\le, \ge, =\}b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

$$F = x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n \to \max(min)$$

Формы задач линейного программирования

В **канонической форме** ЗЛП имеет систему ограничений в виде системы линейных уравнений.

При этом переменные задачи $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, **...**, $\boldsymbol{x_n}$ являются неотрицательными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

$$F = x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n \to \max(min)$$

Формы задач линейного программирования

В **стандартной форме** ЗЛП имеет систему ограничений в виде системы линейных неравенств.

При этом переменные задачи x_1, x_2, ..., x_n являются неотрицательными:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \le b_2 \\ &\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

$$F = x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n \to \max(min)$$

Преобразование ЗЛП

- Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в **стандартной форме**, так как всякое равенство в системе ограничений равносильно системе взаимно противоположных неравенств.
- С помощью введения дополнительных переменных задачу стандартной формы можно преобразовать в задачу **канонического вида**.
- Путем изменения знака целевой функции задачу на максимум можно преобразовать в задачу на минимум и наоборот.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \le b_i \end{cases}$$

Пример задачи линейного программирования

Предприятие рекламирует свою продукцию с использованием четырех источников массовой информации: телевидения, радио, Internet и печатной продукции .

Анализ рекламной деятельности в прошлом показал, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 5, 7 и 4 усл. ед., в расчете на 1 усл. ед., затраченную на рекламу. На рекламу выделено 50 000 усл. ед. Администрация предприятия не намерена тратить на телевидение более 40 %, а на радио и Internet— более 50 % от общей суммы выделенных средств. Как следует предприятию организовать рекламу, чтобы получить максимальную прибыль?

Составим математическую модель задачи.

Цель – максимизация прибыли с помощью использования рекламы товара.

Управляющие переменные:

x_1 – количество средств, вложенных в рекламу на телевидение;

x_2 – количество средств, вложенных в рекламу на радио;

x_3 – количество средств, вложенных в рекламу в Internet;

x_4 – количество средств, вложенных в рекламу в виде печатной продукции

Область допустимых решений (ОДР) имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 50\,000 \\ x_1 \le 20\,000 \\ x_2 + x_3 \le 25\,000 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0 \end{cases}$$

ОДР содержит ограничения по общей сумме выделенных средств, по количеству средств, предусмотренных на рекламу по телевидению, на радио и в Internet, и условия неотрицательности управляющих переменных.

Критерий оптимальности (целевая функция) выражает величину суммарной прибыли, зависящей от использования рекламы разного вида

$$P = 10x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 \to max$$

Решение данной задачи:

вектор оптимального решения (20000; 20000; 5000; 0) дает оптимальное значение целевой функции 395 000 у.е.

То есть, для получения максимальной прибыли в размере 395 000 усл. ед. надо распределить средства на рекламу следующим образом:

- 20 000 усл. ед. вложить в рекламу на телевидении;
- 20 000 усл. ед. вложить в рекламу в Internet;
- 5000 усл. ед. вложить в рекламу, организованную с помощью печатной продукции;
- рекламу на радио организовывать не следует.

Задача линейного программирования с **двумя неизвестными** может быть решена графически

Замечание:
К такой форме может быть сведена и каноническая задача (с ограничениями в виде уравнений), когда число переменных ***n*** больше числа уравнений ***m*** на 2

Пусть задача линейного программирования задана в виде:

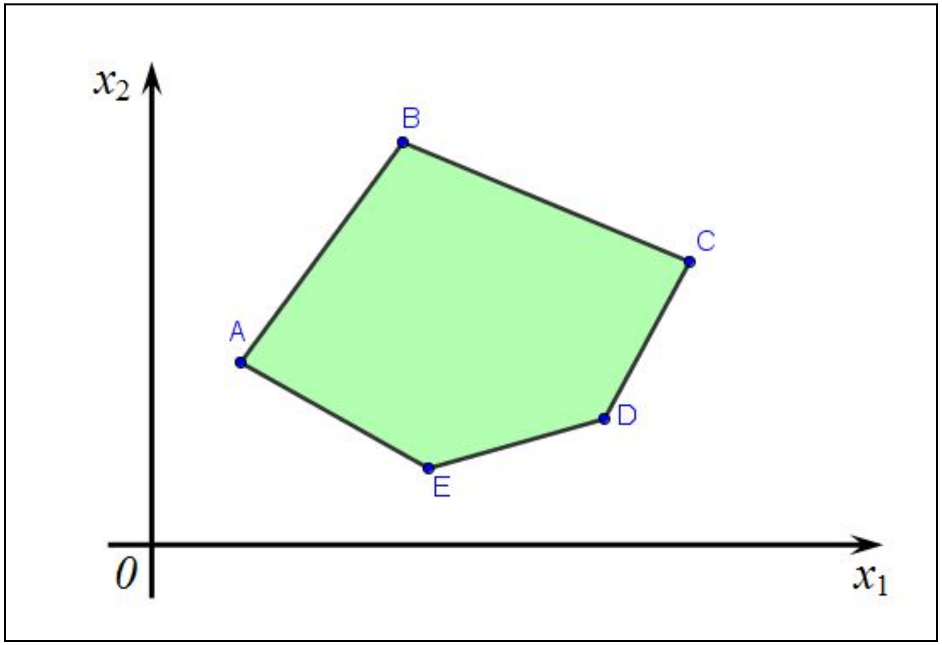
$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, i = \overline{1,m} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to max \ \ (min)$$

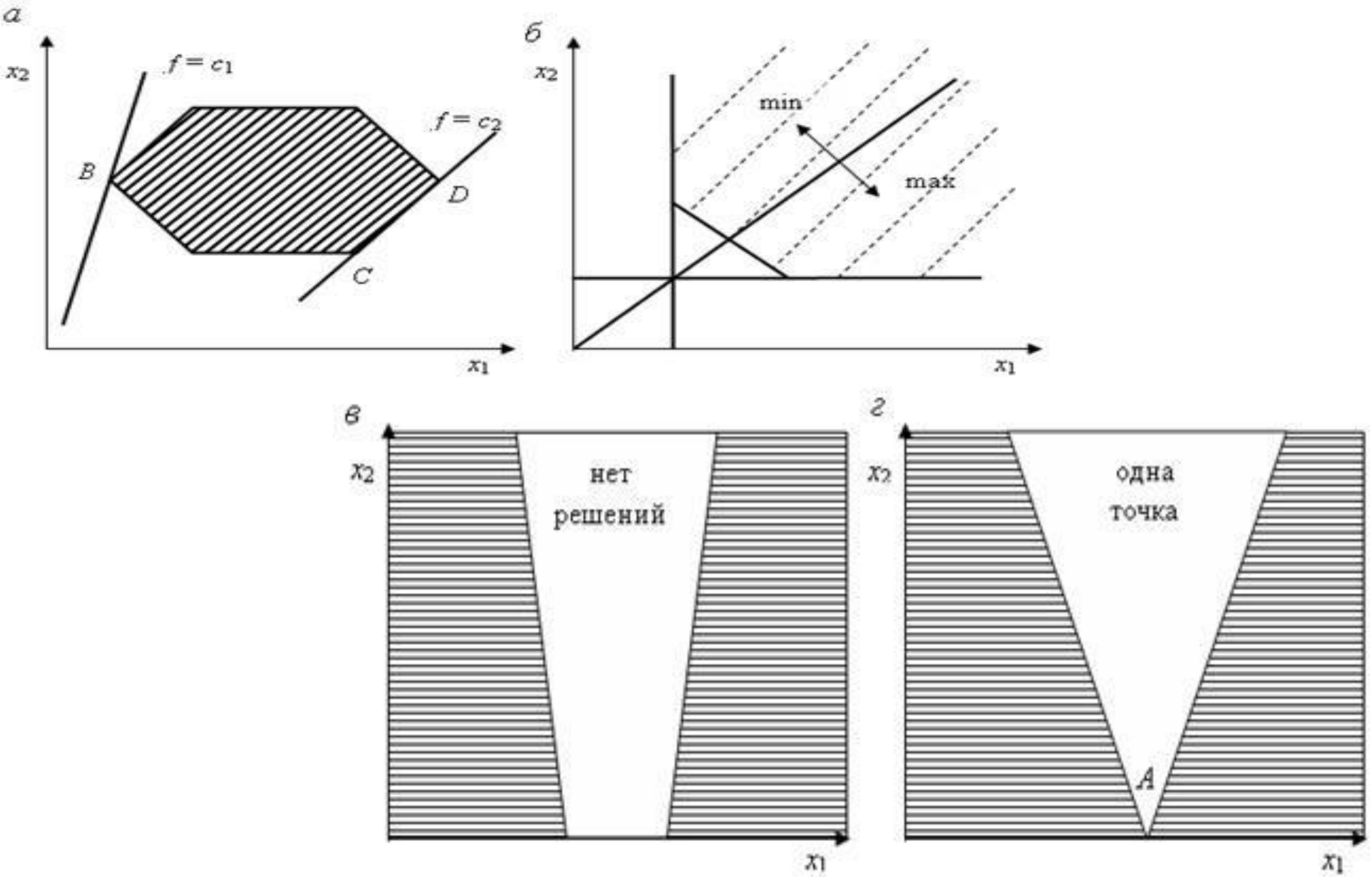
Алгоритм графического решения ЗЛП

1. Построить **область допустимых решений** (ОДР) в системе координат, заданную системой ограничений

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, i = \overline{1, m} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$



Возможны следующие варианты областей допустимых решений:

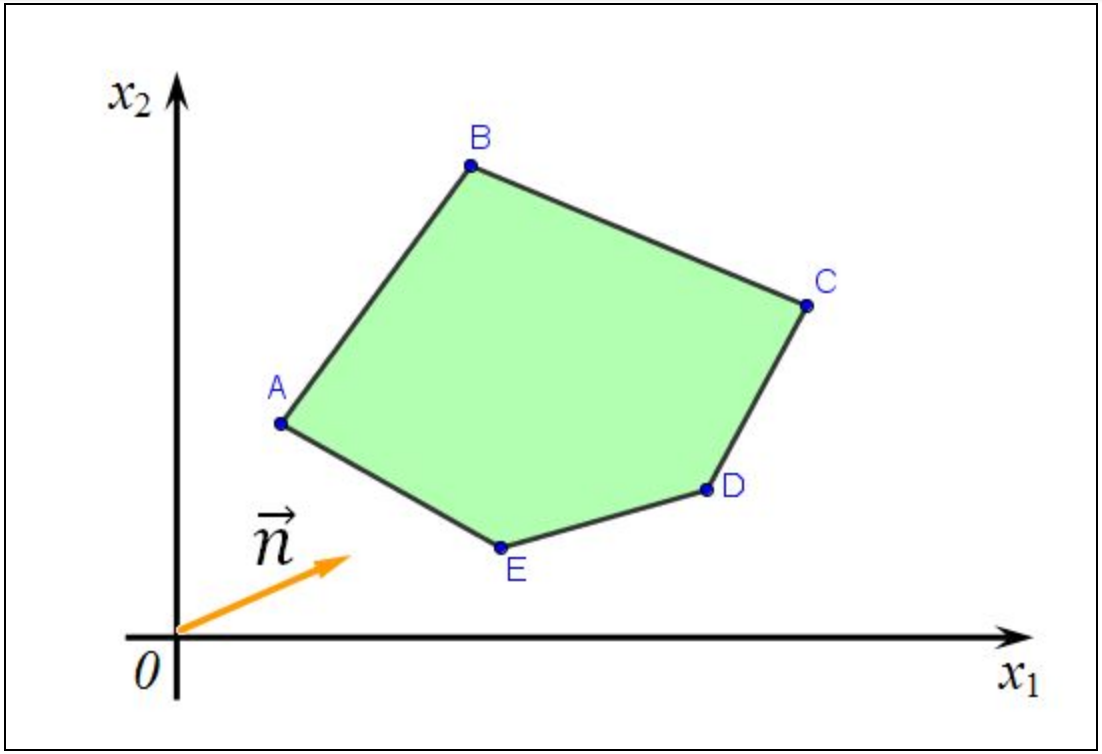


Алгоритм графического решения ЗЛП

2. Построить градиент целевой функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2$$

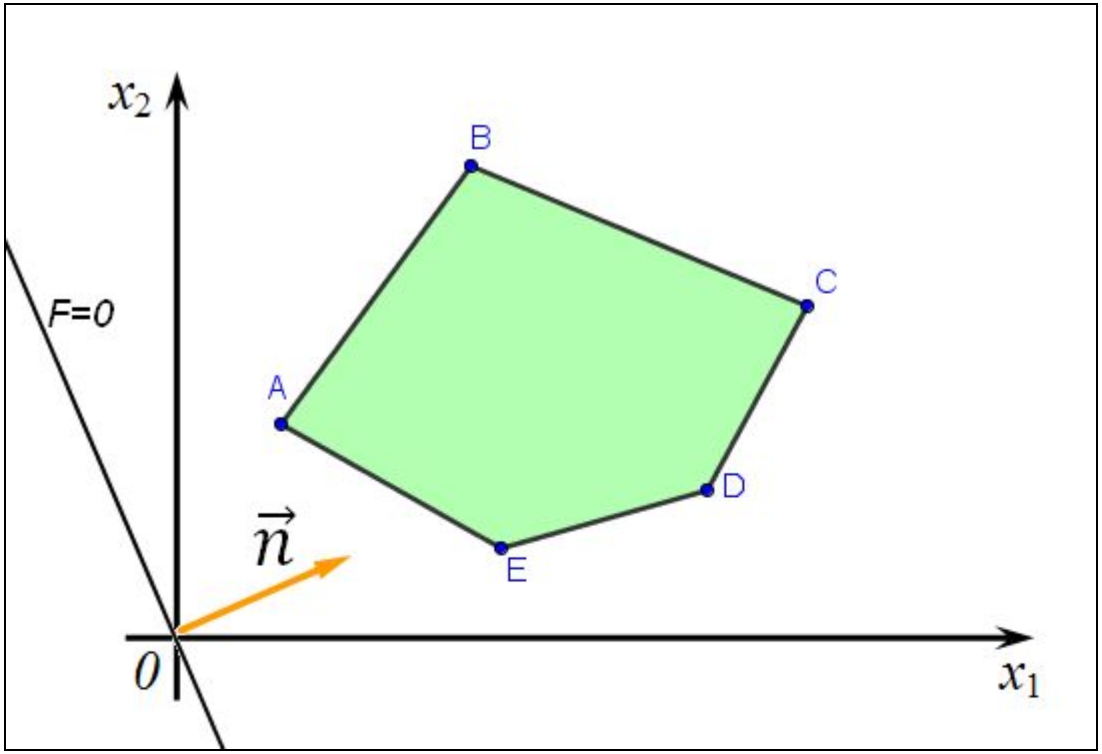
(**вектор нормали** к прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = F$)



$\vec{n}(c_1; c_2)$

Алгоритм графического решения ЗЛП

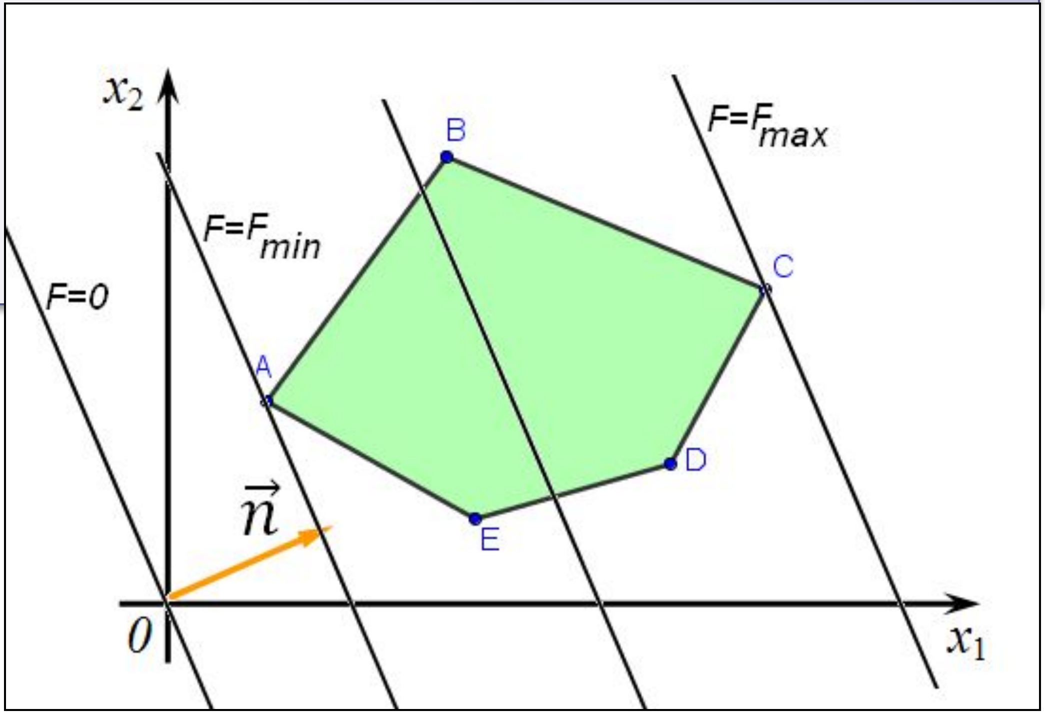
3. Построить **опорную прямую**, перпендикулярную вектору нормали – линию уровня целевой функции



Алгоритм графического решения ЗЛП

4. Перемещая опорную прямую в направлении вектора нормали, определить «**точку входа**» и «**точку выхода**» (первая встретившаяся опорной прямой точка из ОДР и последняя встретившаяся опорной прямой точка из ОДР соответственно)

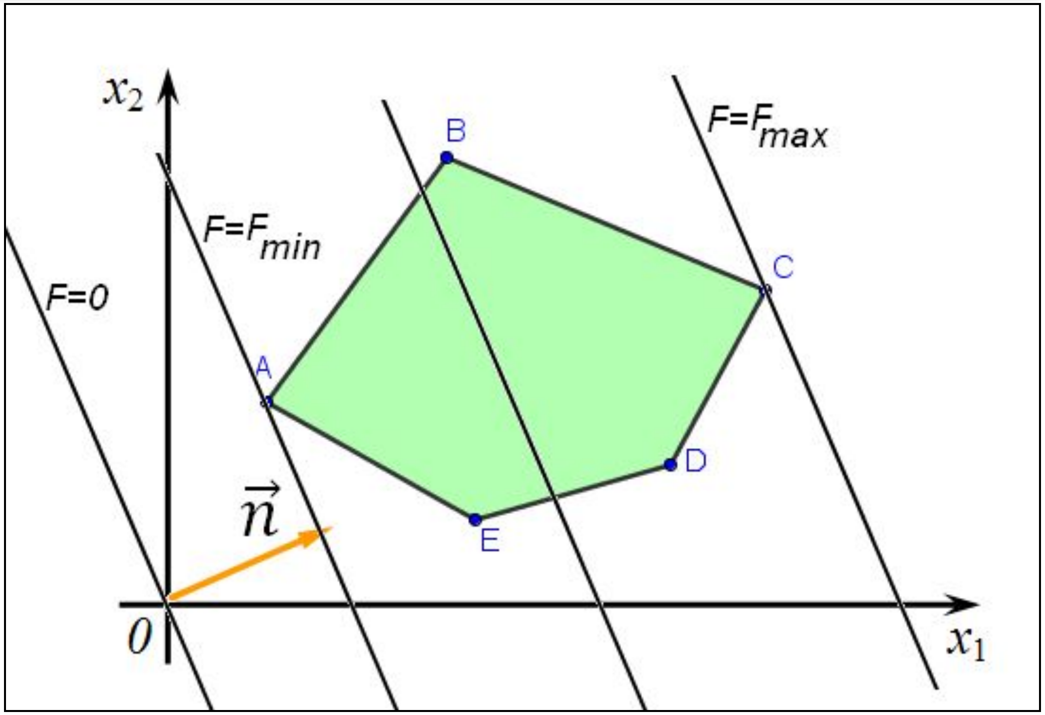
В точке входа: F → min
В точке выхода: F → max



Алгоритм графического решения ЗЛП

5. Определить координаты оптимальной точки (точки входа или точки выхода) и найти значение целевой функции в ней

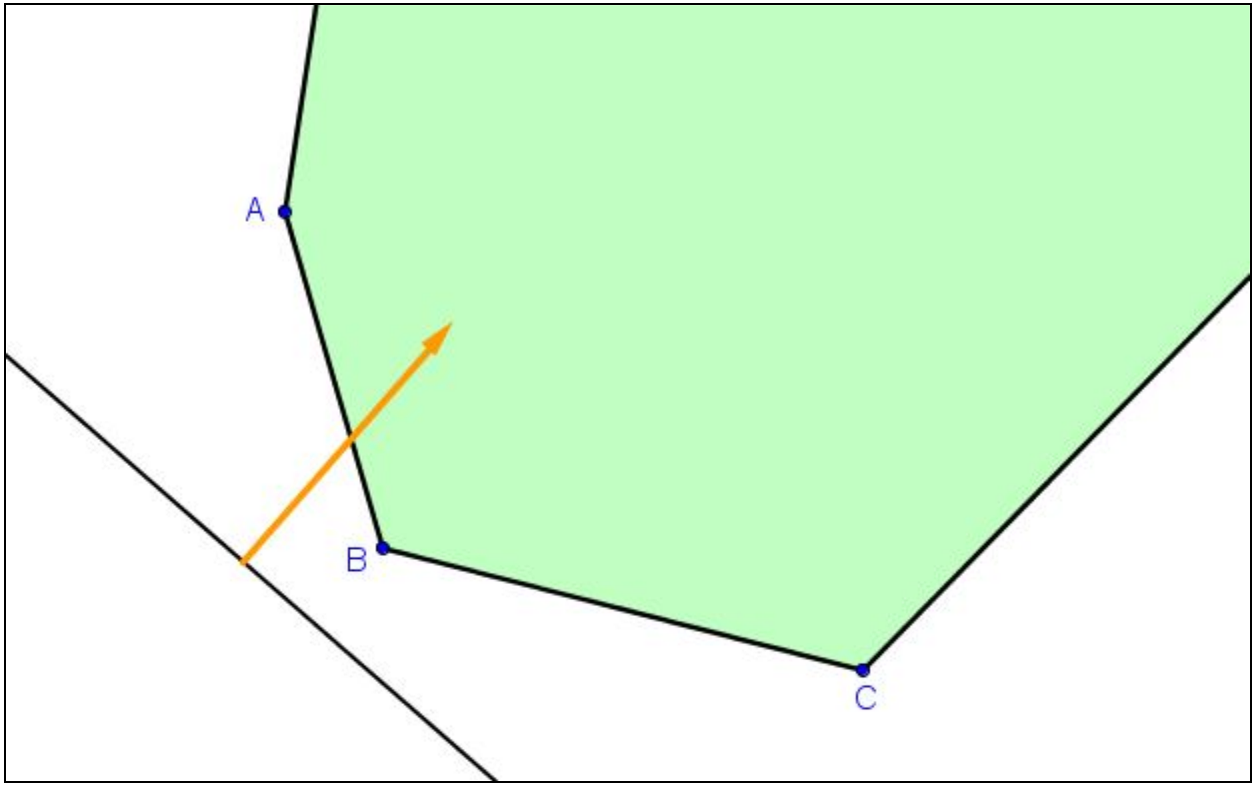
Замечание:
Оптимальная точка является угловой точкой выпуклой области допустимых решений



Частные случаи

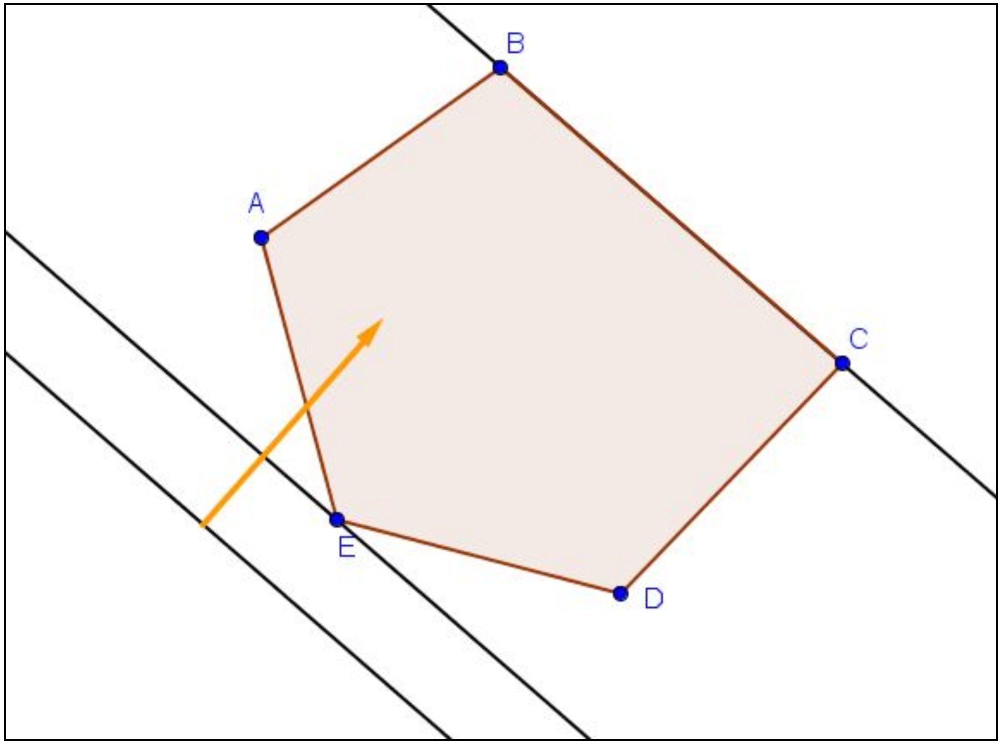
Минимальное значение целевая функция достигает в точке **B**: $F_{min} = F(B)$

Максимальное значение: $F_{max} = \infty$



Частные случаи

Минимальное значение целевая функция достигает в точке **E**: $F_{min} = F(E)$
Максимальное значение целевая функция достигает во всех точках отрезка **BC** :
$F_{min} = F(B) = F(C)$

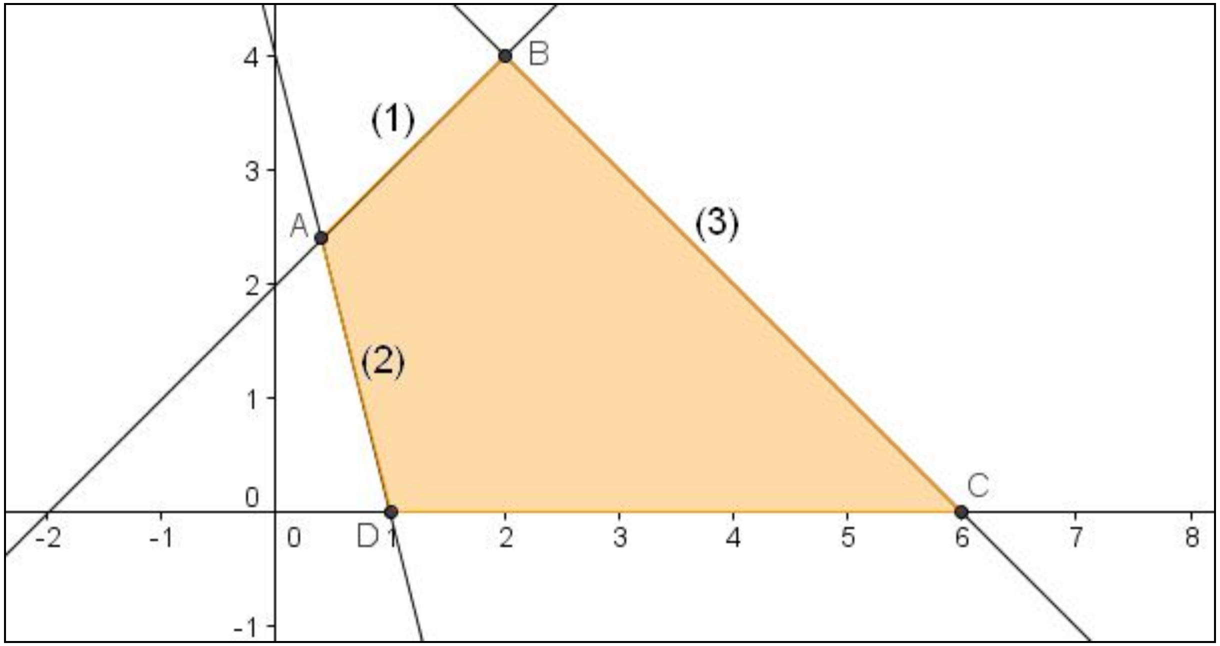


Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

1. Построим область допустимых решений, заданную системой неравенств

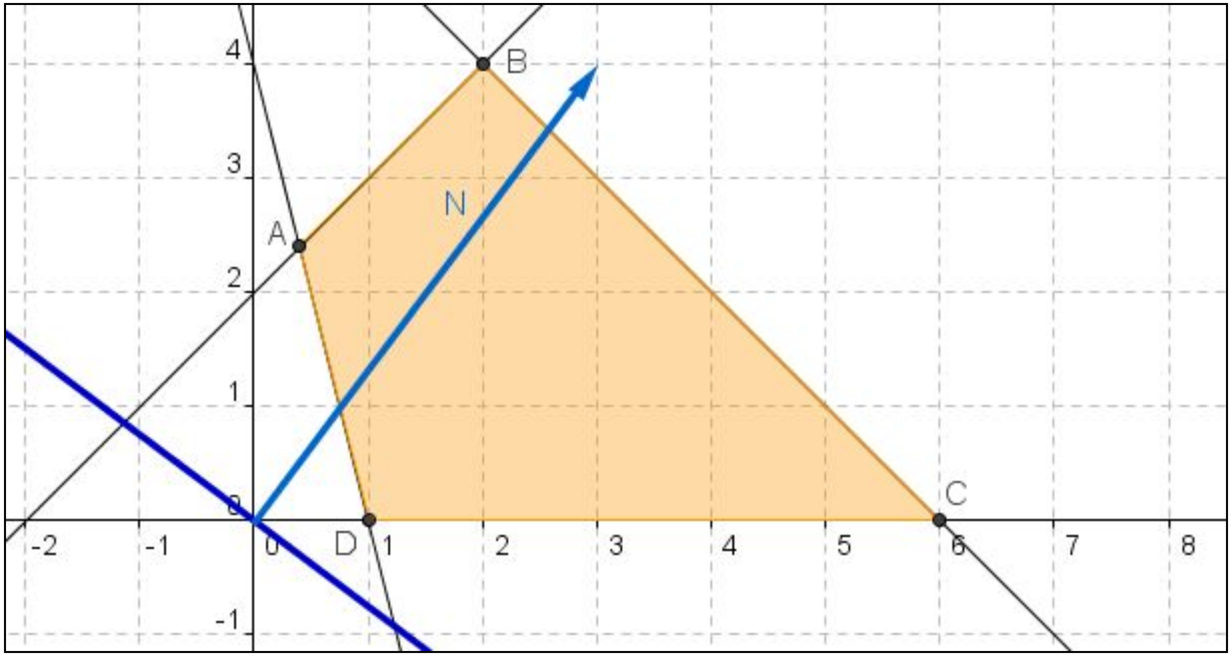


Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

2. Построим вектор нормали ***N*(3;4)** и перпендикулярную ему опорную прямую

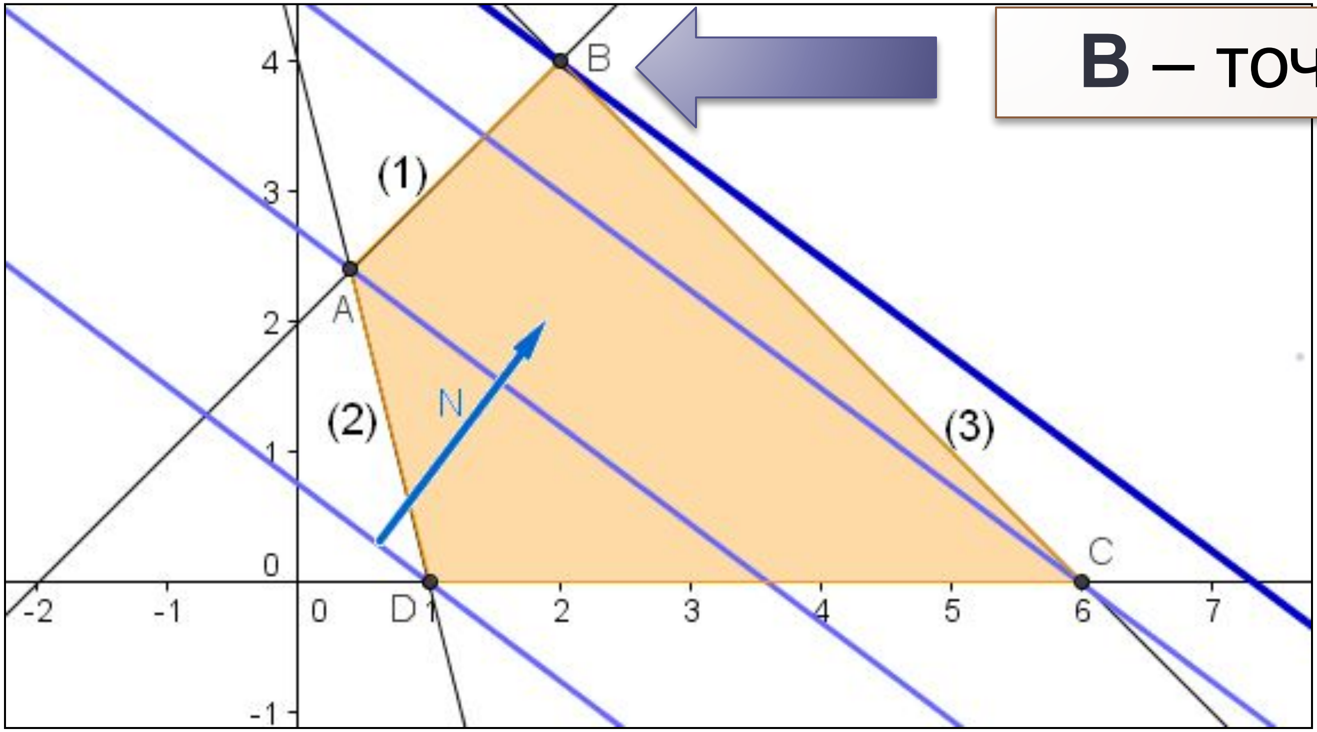


Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

3. Перемещаем опорную прямую в направлении вектора нормали и определяем «точку выхода»



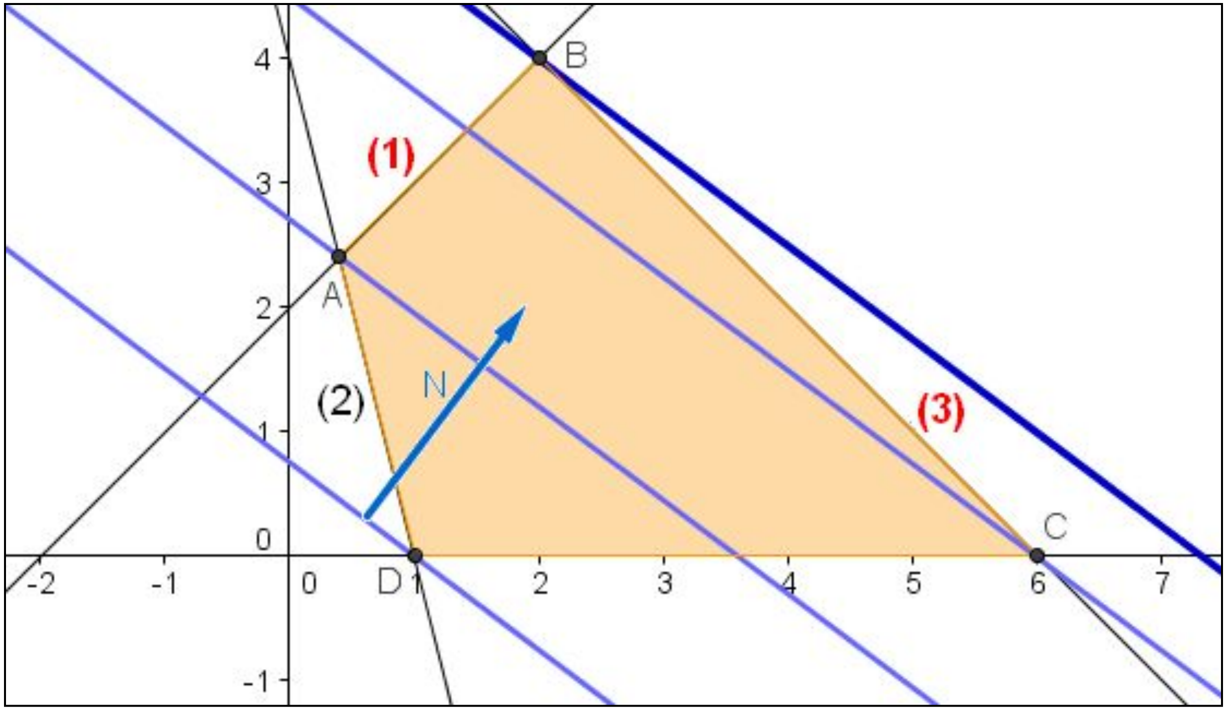
B – точка выхода

Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

4. Точка В - точка пересечения прямых (1) и (3)



Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

5. Для вычисления координат точки B решим систему уравнений:

$$B = (1) \cap (3)$$

$$B: \begin{cases} x_2 - x_1 = 2, \\ x_1 + x_2 = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

$$B(2; 4)$$

Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \leq 2, \\ 4x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

5. Найдем значение целевой функции в точке В

$$F_{max}(B) = F(2;4) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 22$$