

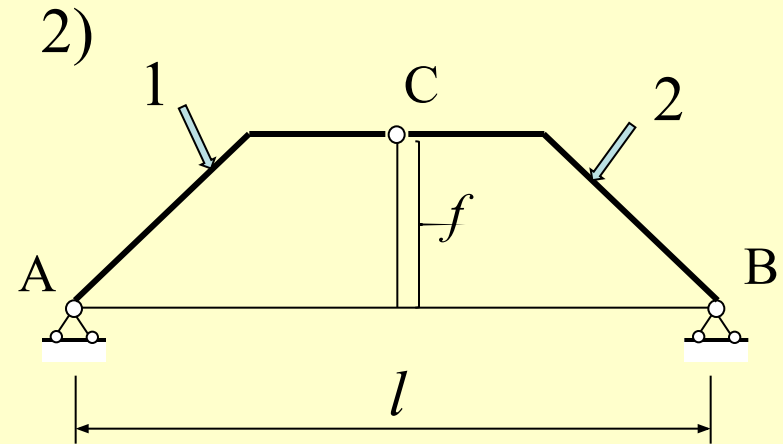
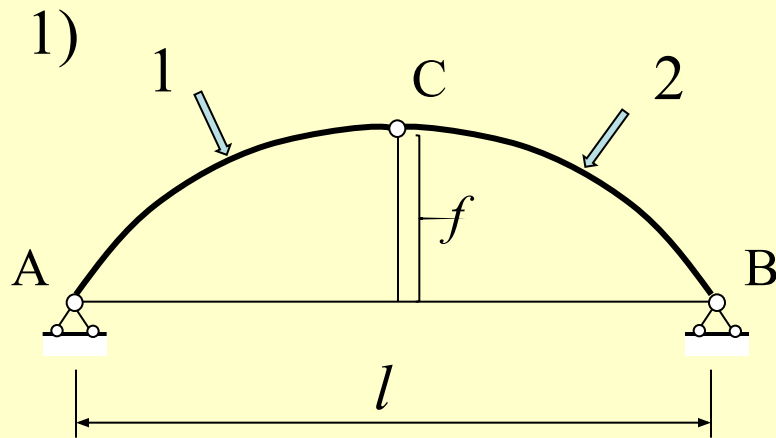
## Тема лекции: ТРЕХШАРНИРНЫЕ СИСТЕМЫ

---

Геометрически неизменяемая система, которая состоит из двух жестких дисков, соединенных между собой шарниром С и прикрепленных к основанию двумя шарнирно неподвижными опорами А и В называется трехшарнирной системой.

Покажем на рисунках два возможных варианта трехшарнирных систем

# ТРЕХШАРНИРНЫЕ СИСТЕМЫ



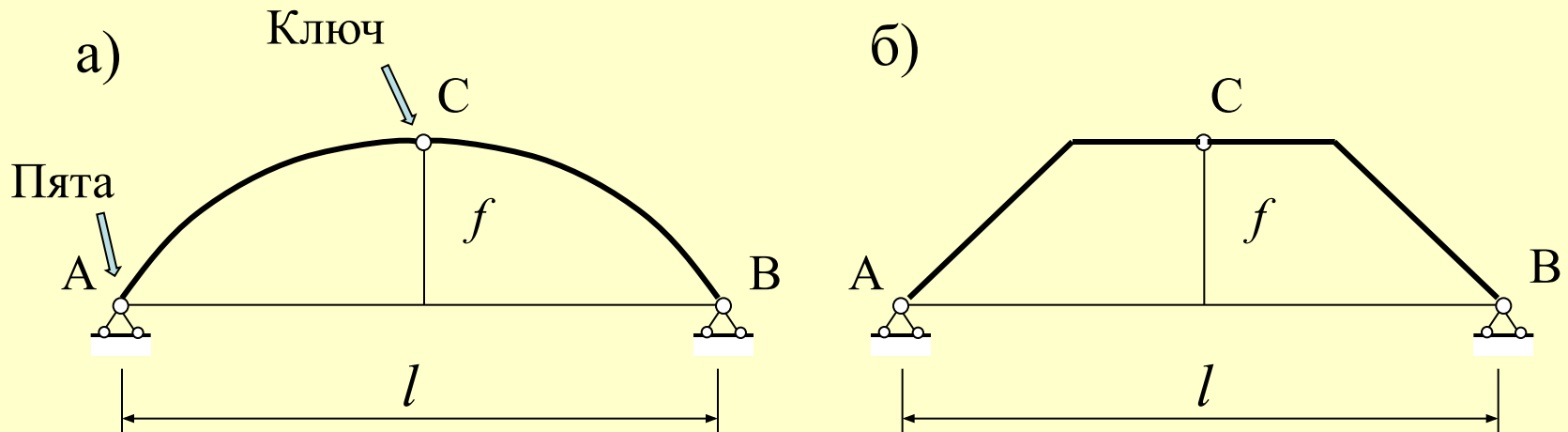
Если диски 1 и 2 представляют собой кривые брусья, то такая система называется трехшарнирной аркой (см. рис. 1)

Если диски 1 и 2 представляют собой ломаные брусья, то система называется трехшарнирной рамой (см. рис. 2)

Расстояние между опорами A и B называется пролетом арки -  $l$

Расстояние от прямой соединяющей опорные шарниры A и B до шарнира C называется стрелой подъема арки -  $f$

# ТРЕХШАРНИРНЫЕ СИСТЕМЫ



Шарниры А и В называются опорными или пятовыми шарнирами, а шарнир С называется ключевым шарниром

Если  $0,1 \leq f/l \leq 0,3$  – арки называются пологими

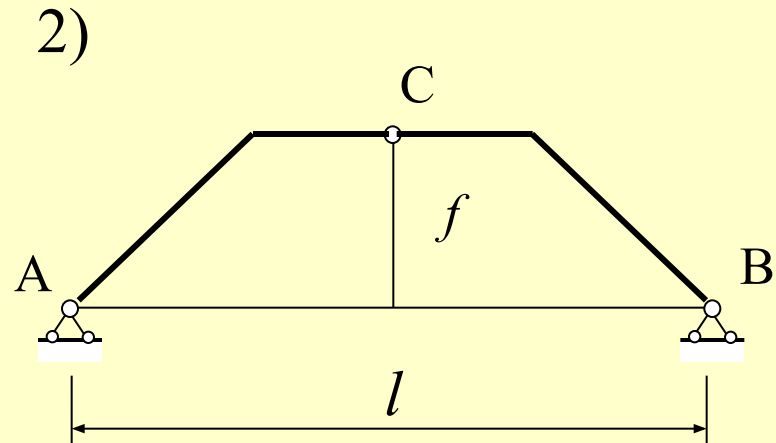
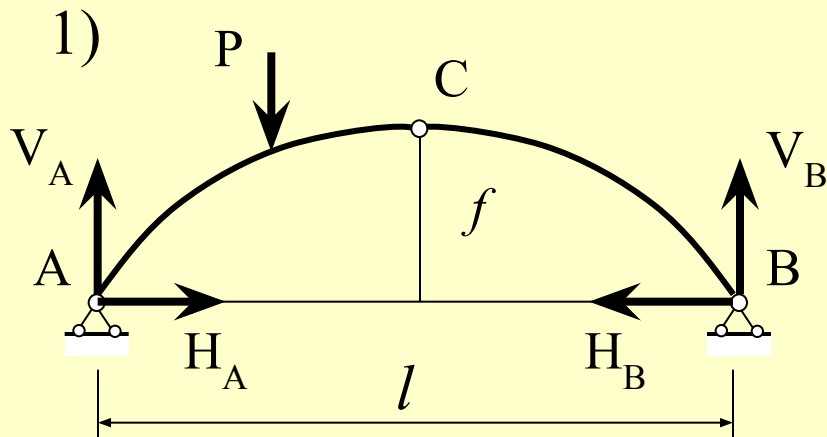
Если  $0,3 < f/l \leq 1,0$  – арки называются повышенными

Трехшарнирные системы являются статически определимыми :

$$W = 3D - 2\text{Ш}_o - C_{\text{оп}} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0,$$

и геометрически неизменяемыми системами

# ТРЕХШАРНИРНЫЕ СИСТЕМЫ



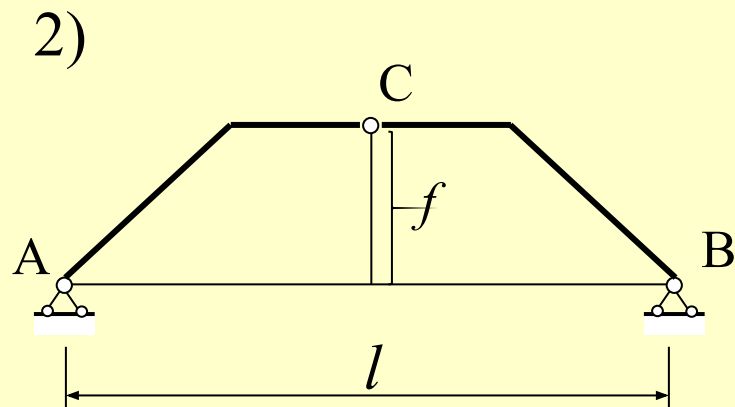
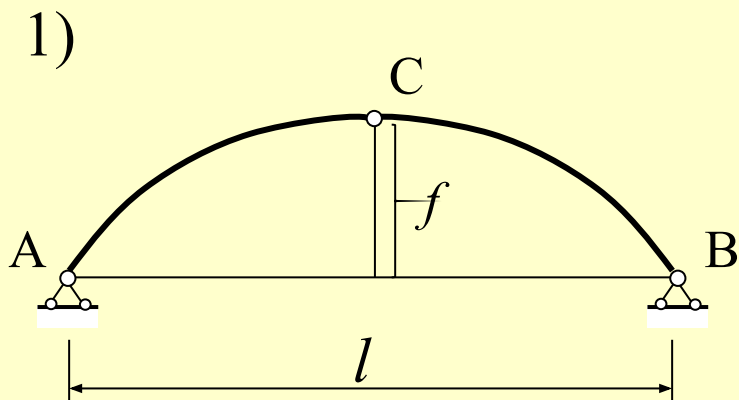
В опорах трехшарнирных систем, при действии внешних нагрузок, возникают четыре опорные реакции, определяют которые используя три уравнения статики, а наличие ключевого шарнира С позволяет составить еще одно дополнительное уравнение:

$$\sum M_C^{ПРАВ} = 0 \quad \text{или} \quad \sum M_C^{ЛЕВ} = 0.$$

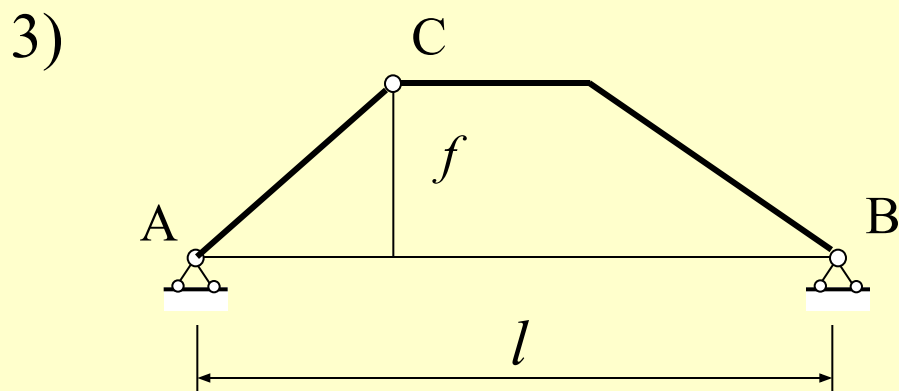
Трехшарнирные системы являются распорными системами, так как горизонтальные составляющие опорных реакций направлены внутрь сооружения

## Классификация трехшарнирных систем

Трехшарнирные системы могут быть симметричными (см. рис. 1 и 2)

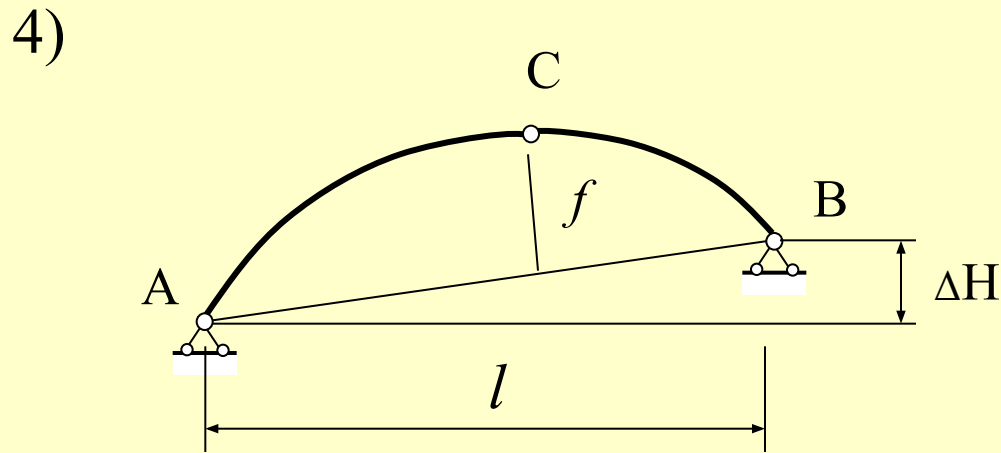


и несимметричными – рис. 3



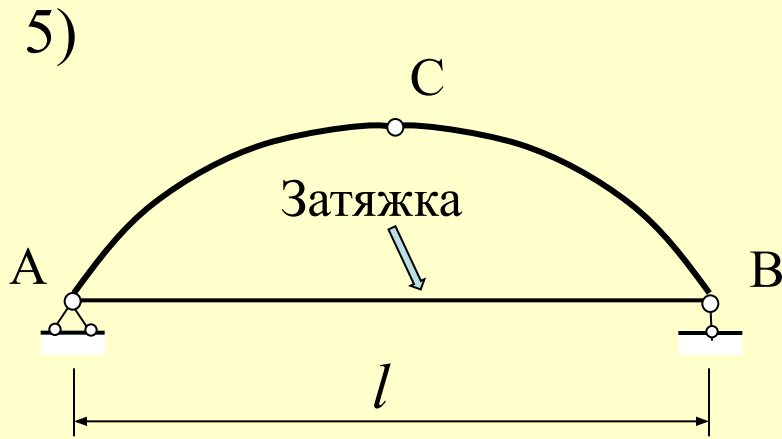
## Классификация трехшарнирных систем

Опорные шарниры А и В могут располагаться в одном уровне (см. рис. 1,2,3) и могут располагаться в разных уровнях (рис. 4) – такие системы называются ползучими арками или рамами

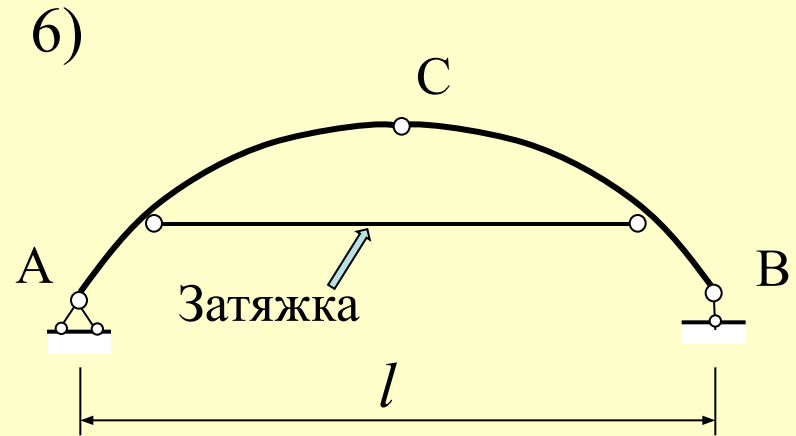


## Классификация трехшарнирных систем

В строительной практике применяются также трехшарнирные системы у которых распор воспринимается затяжкой – рис. 5, 6



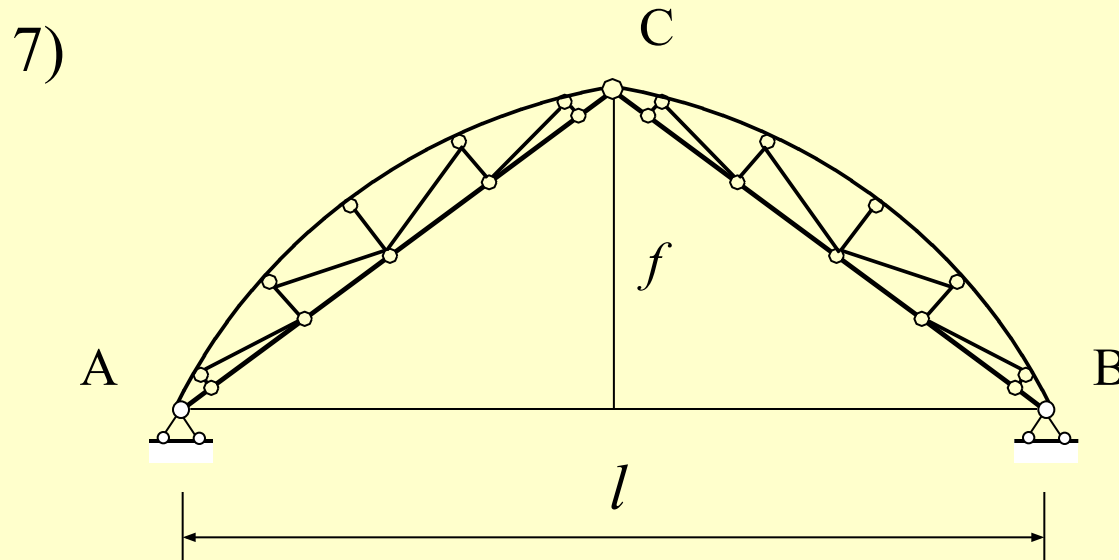
арка с затяжкой в уровне опор



арка с повышенной затяжкой

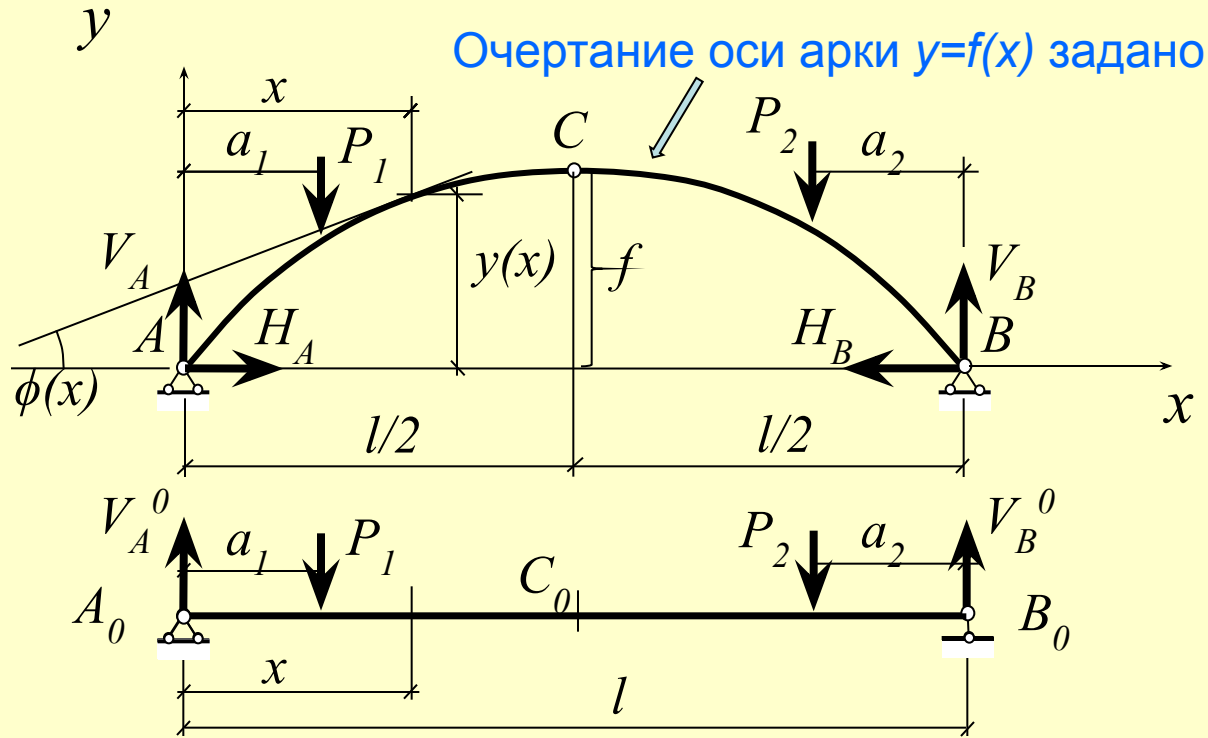
## Классификация трехшарнирных систем

Если каждая полуарка выполнена в виде фермы, то такая система называется сквозной аркой или трехшарнирной фермой – рис. 7





# Расчет трехшарнирных арок на неподвижные нагрузки



## 1. Опорные реакции

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow V_B = V_B^0$$

$$\sum M_B = 0; \Rightarrow V_A = V_A^0$$

$$\sum X = 0; \Rightarrow H_A = H_B = H$$

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0; \text{ или } \sum M_C^{\text{прав}} = 0;$$

$$\Rightarrow H = M_C^0 / f.$$

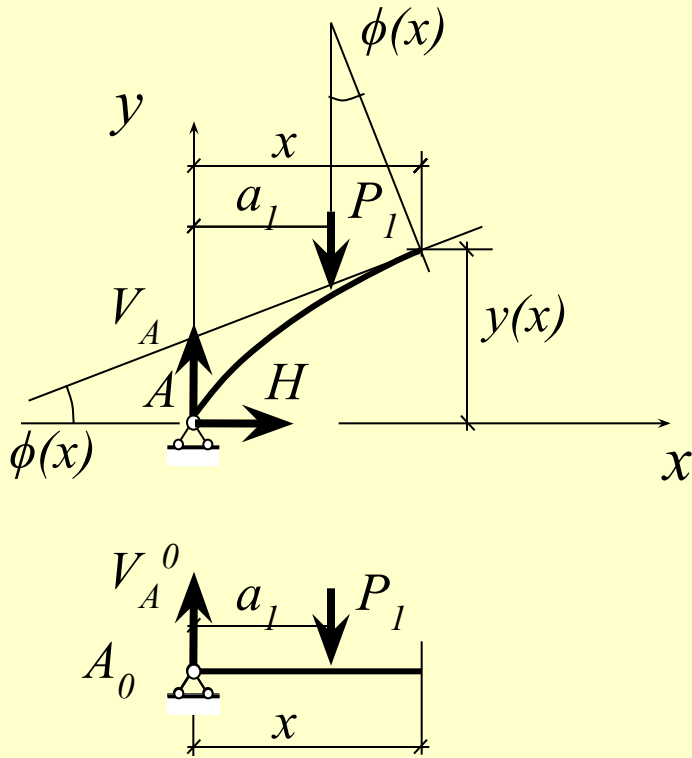
## 2. Внутренние усилия

Покажем на оси арки сечение, расположенное на расстоянии  $X$  от левой опоры

$y(x)$  – расстояние по вертикали от оси  $x$  до сечения,  $\phi(x)$  – угол наклона касательной, проведенной к сечению к оси  $x$

Для определения внутренних усилий рассмотрим часть арки и балочной аналогии, расположенной левее сечения

# Расчет трехшарнирных арок на неподвижные нагрузки



Изгибающие моменты в сечениях арки

$$M(x) = \underbrace{V_A \cdot x - P_1 \cdot (x - a_1)}_{M^0(x)} - H \cdot y(x)$$

Тогда, в общем виде:

$$M(x) = M^0(x) - H \cdot y(x) \quad (1)$$

Поперечные силы в сечениях арки

$$Q(x) = \underbrace{(V_A - P_1)}_{Q^0(x)} \cdot \cos\phi - H \cdot \sin\phi$$

Или в общем виде:

$$Q(x) = Q^0(x) \cdot \cos\phi - H \cdot \sin\phi \quad (2)$$

Продольные силы в сечениях арки

$$N(x) = -\underbrace{(V_A - P_1)}_{Q^0(x)} \cdot \sin\phi - H \cdot \cos\phi$$

Или в общем виде:

$$N(x) = -Q^0(x) \cdot \sin\phi - H \cdot \cos\phi \quad (3)$$

## Построение эпюр в трехшарнирных арках

Для построения эпюр в трехшарнирных арках поступают следующим образом.

Арку разбивают на достаточное число участков (10-15 в зависимости от требуемой точности расчета) и в соответствии с формулами (1), (2), (3) определяют внутренние усилия  $M$ ,  $Q$  и  $N$  во всех сечениях, на границах участков.

По полученным значениям усилий строят соответствующие эпюры.

Не зависимо от внешних нагрузок эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в арках криволинейны, поскольку ось арки и угол наклона касательной по длине пролета изменяются нелинейно .

В местах приложения сосредоточенных сил в эпюре  $Q$  получаем скачок на величину  $P \cdot \cos\phi$  , а на эпюре  $N$  - скачок  $P \cdot \sin\phi$  .

## Арка рационального очертания

Вид эпюр и значения величин внутренних усилий в арках зависят от очертания оси арки.

Для заданного вида нагрузки можно подобрать такое очертание оси арки, что изгибающие моменты  $M$  и поперечные силы  $Q$  в любом ее сечении будут равны нулю.

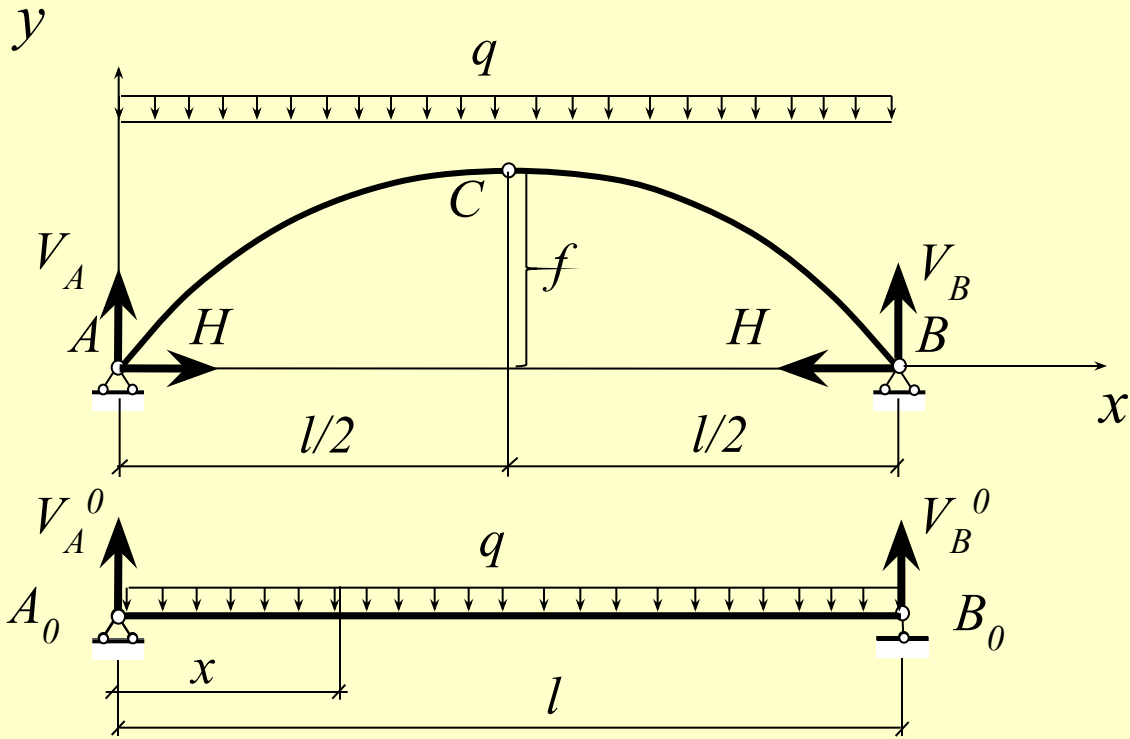
Такая арка и называется аркой рационального очертания.

### Пример:

Пусть трехшарнирная арка пролетом  $l$  и стрелой подъема  $f$  загружена по всей длине пролета равномерно-распределенной нагрузкой  $q$ .

Необходимо подобрать очертание оси арки, при котором  $M$  и  $Q$  в любом ее сечении будут равны нулю.

## Арка рационального очертания



Уравнение (1) изгибающих моментов в сечениях арки записывается  $M(x) = M^0(x) - H \cdot y(x)$

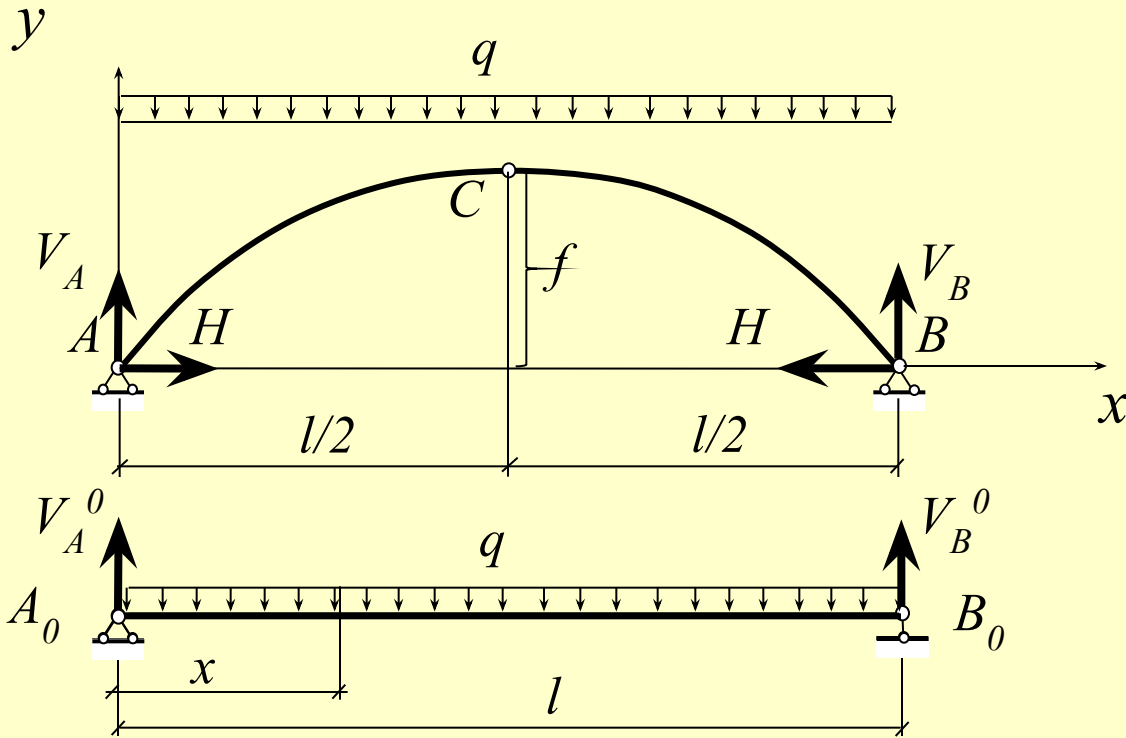
Приравнивая полученное выражение нулю, имеем

$$M^0(x) - H \cdot y(x) = 0 \quad (a)$$

Или

$$y(x) = M^0(x) / H \quad (б)$$

## Арка рационального очертания



$$M^0(x) = (ql/2) \cdot x - qx^2/2 = (q/2) \cdot x \cdot (l - x)$$

$$M^0_c = (ql)/2 \cdot l/2 - (ql)/2 \cdot l/4 = ql^2/8$$

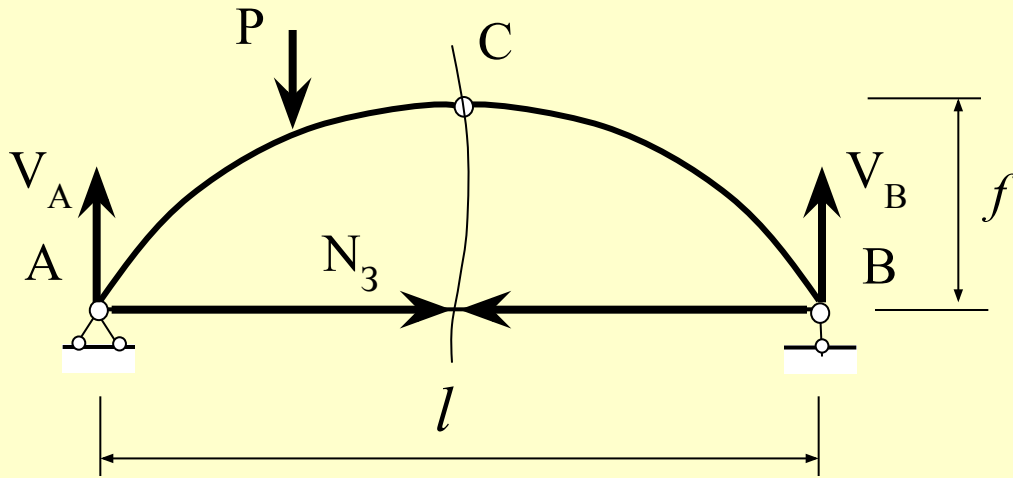
$$H = M^0_c / f = (ql^2)/(8f)$$

Подставляя полученные значения  $M^0(x)$  и  $H$  в (б), получаем уравнение оси арки рационального очертания

$$y(x) = (4f/l^2) \cdot x(l - x)$$

## Особенности расчета арок с затяжками

### 1. Рассмотрим арку с затяжкой в уровне опор



При действии на такую арку внешних нагрузок, в опорах возникают только вертикальные составляющие опорных реакций.

Их определяют с помощью уравнений статики

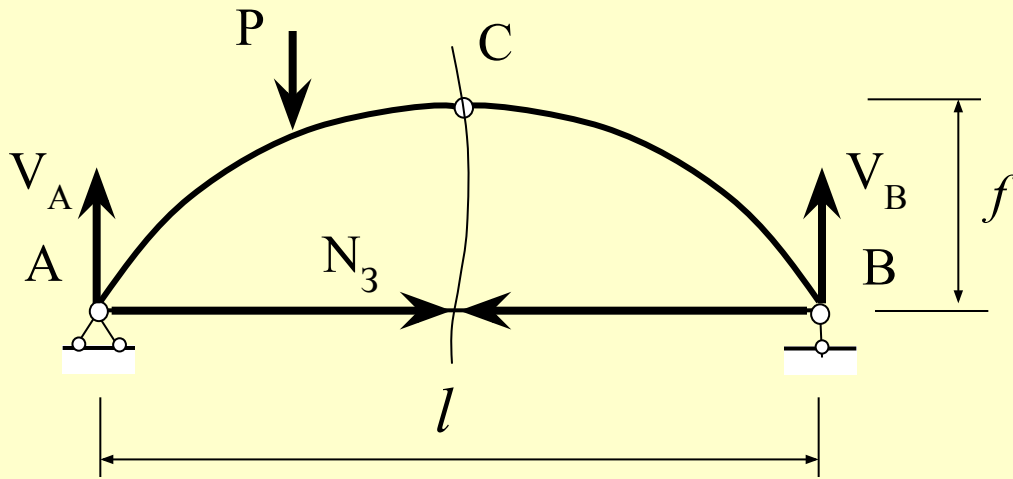
$$\sum M_A = 0; \Rightarrow V_B; \quad \sum M_B = 0; \Rightarrow V_A$$

Для определения усилия в затяжке, проводят сечение через шарнир C и затяжку.

И записывая одно из уравнений в виде  $\sum M_C^{\text{ЛЕВ}} = 0$  или  $\sum M_C^{\text{ПРАВ}} = 0$  определяют усилие в затяжке  $N_3$ .

## Особенности расчета арок с затяжками

### 1. Рассмотрим арку с затяжкой в уровне опор



Внутренние усилия в сечениях арки с затяжкой определяют по тем же формулам (1) – (3) что и в обычных арках, только вместо распора  $H$  принимают усилие в затяжке  $N_3$

$$M(x) = M^0(x) - N_3 \cdot y(x)$$

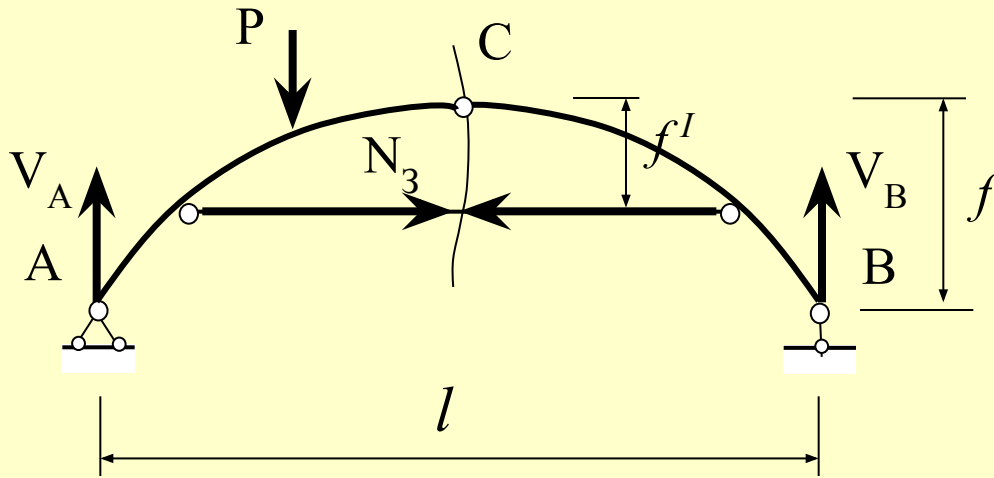
$$Q(x) = Q^0(x) \cdot \cos\phi - N_3 \cdot \sin\phi$$

$$N(x) = -Q^0(x) \cdot \sin\phi - N_3 \cdot \cos\phi$$



## Особенности расчета арок с затяжками

### 2. Арка с повышенной затяжкой



В арках с повышенной затяжкой в опорах так же возникают только вертикальные составляющие опорных реакций.

Их определяют с помощью уравнений статики

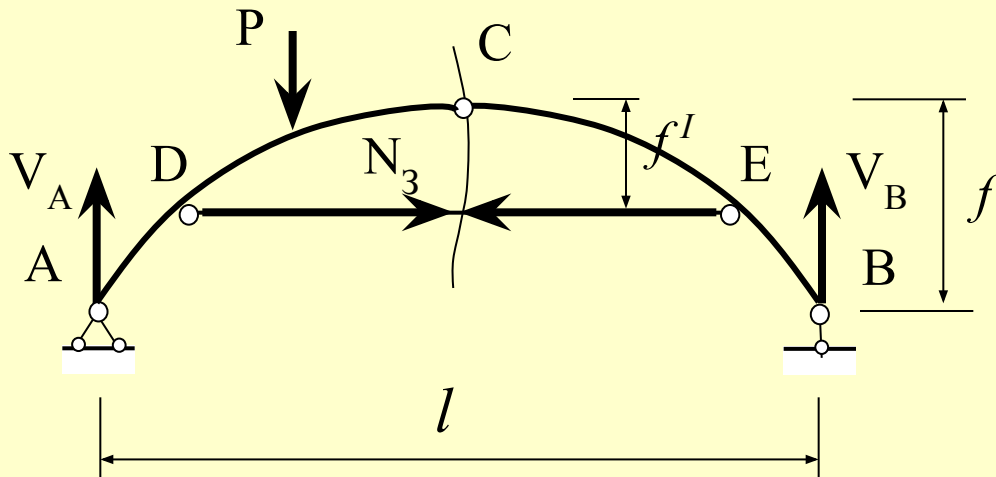
$$\sum M_A = 0; \Rightarrow V_B; \quad \sum M_B = 0; \Rightarrow V_A$$

Для определения усилия в затяжке, проводят сечение через шарнир C и затяжку.

Записывая уравнение в виде  $\sum M_C^{ЛЕВ} = 0$  или  $\sum M_C^{ПРАВ} = 0$  определяют усилие в затяжке  $N_3$ .

## Особенности расчета арок с затяжками

### 2. Арка с повышенной затяжкой



На участках арки  $AD$  и  $BE$  внутренние усилия определяют без учета  $N_3$

$$M(x) = M^0(x)$$

$$Q(x) = Q^0(x) \cdot \cos\phi$$

$$N(x) = -Q^0(x) \cdot \sin\phi$$

На участке  $DCE$  внутренние усилия определяют с учетом усилия в затяжке  $N_3$

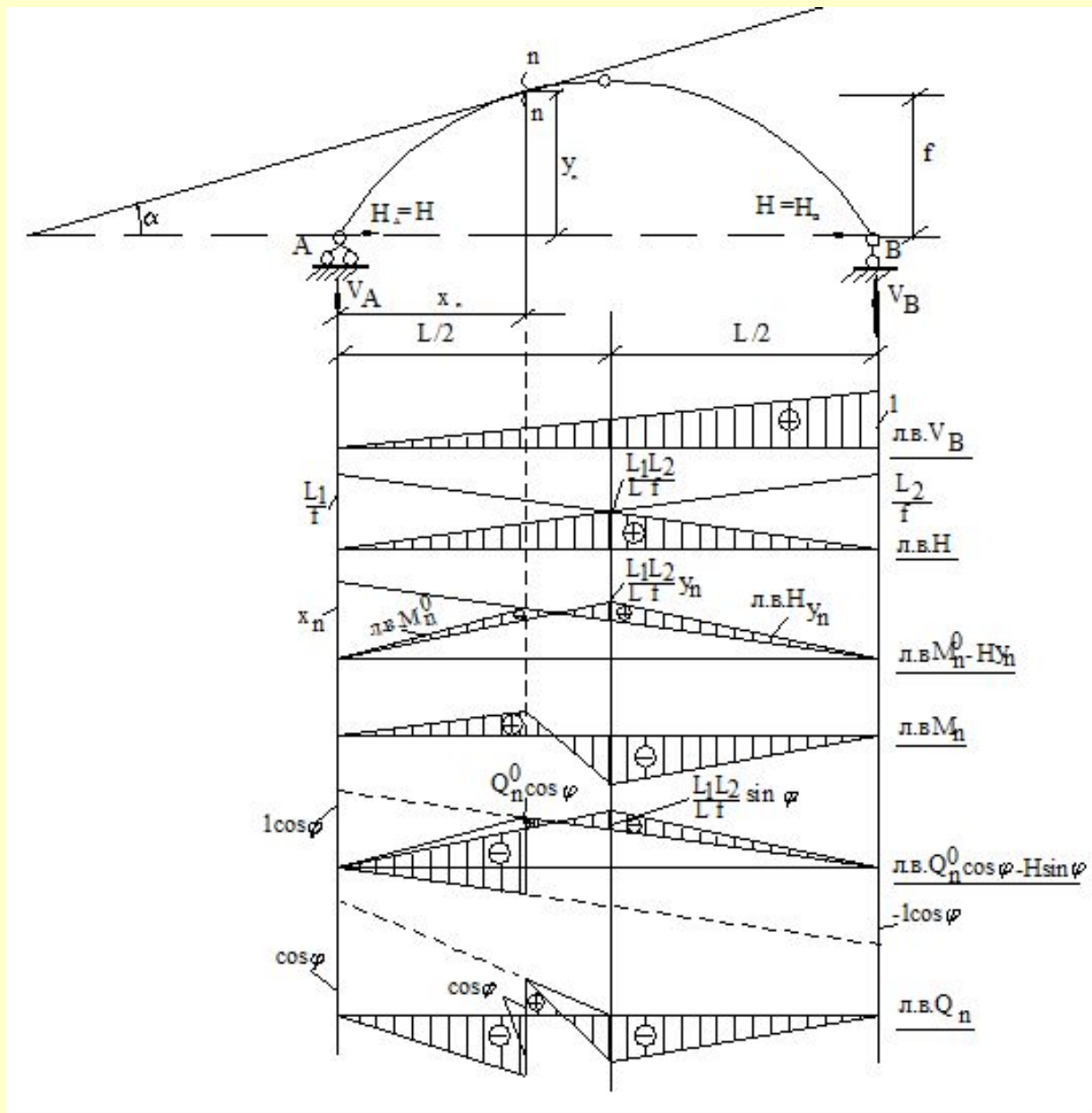
$$M(x) = M^0(x) - N_3 \cdot y'(x)$$

$$Q(x) = Q^0(x) \cdot \cos\phi - N_3 \cdot \sin\phi$$

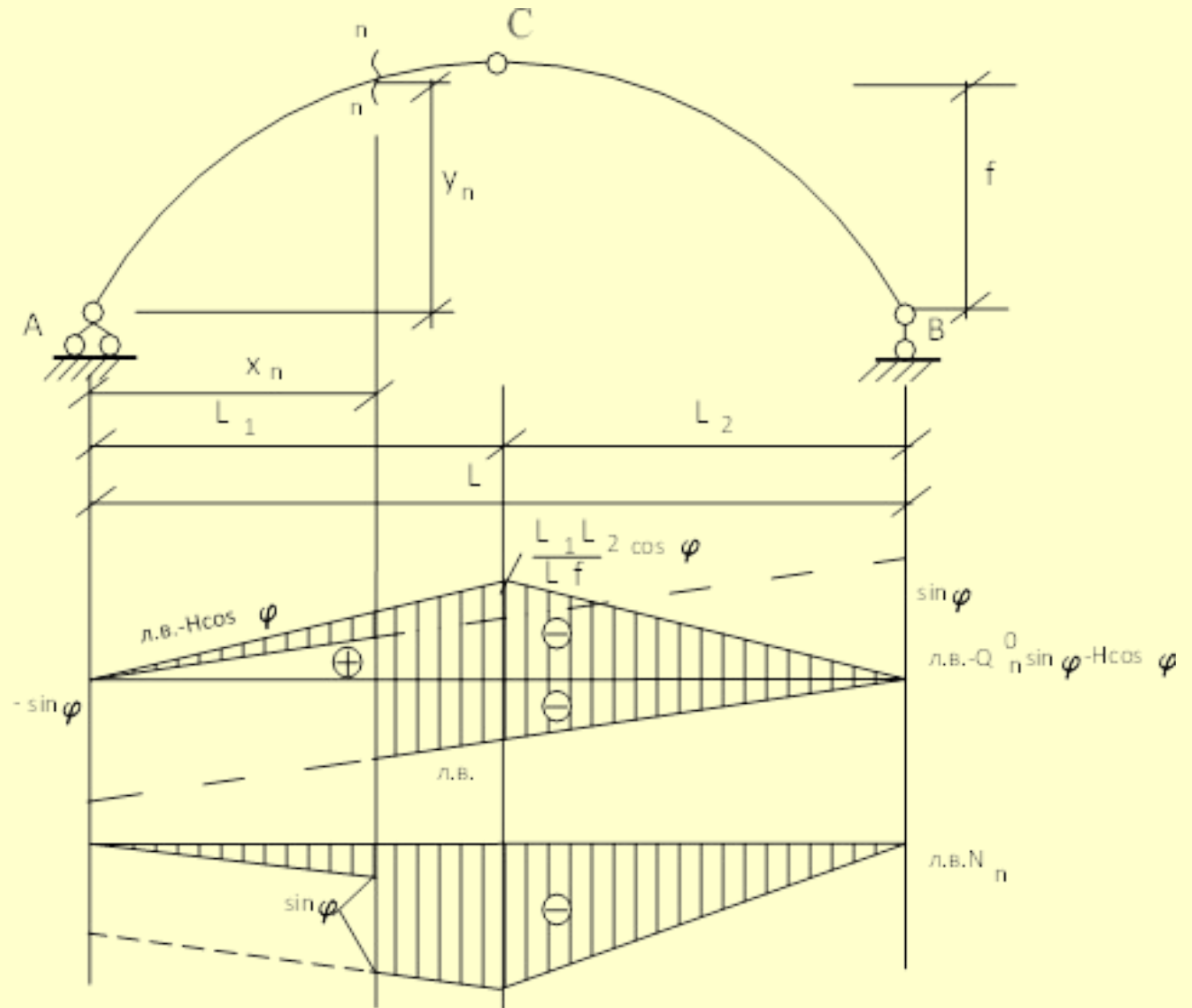
$$N(x) = -Q^0(x) \cdot \sin\phi - N_3 \cdot \cos\phi$$

где  $y'(x)$  – расстояние по вертикали от усилия в затяжке до сечения.

## Линии влияния усилий в 3-х шарнирных арках



## Линии влияния усилий в 3-х шарнирных арках



# 3-х шарнирные арочные фермы

