е

алгоритмы

- ✔ Алгоритм Евклида
- ✔ Решето Эратосфена
- ✔ Длинные числа
- ✔ Последовательность Фибоначчи
- ✔ Последовательность

Целочисленные алгоритмы

Тема 1. Алгоритм Евклида

Вычисление НОД

НОД (наибольший общий делитель двух натуральных чисел) – это наибольшее число, на которое оба исходных числа делятся без остатка.

Перебор:

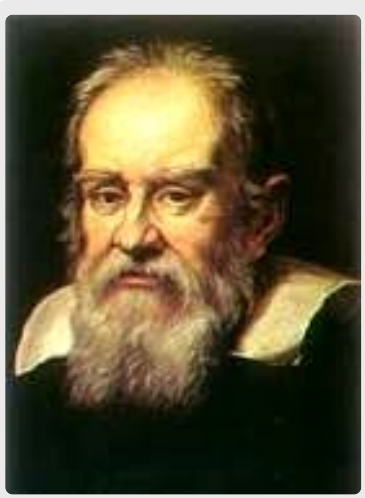
```
static void Main(string [ ] args)
    {
        int a = 100;
        int b = 86;
        int k = a;
        while (a % k != 0 || b % k != 0)
            k--;
        Console.WriteLine("НОД числа " + a + " и числа " + b + ": " + k);
        Console.ReadKey(); //Чтобы увидеть результат на экране
    }
```

Алгоритм Евклида

НОД (a, b) = **НОД** (a – b, b)

= **НОД** (a, b – a)

Заменяем большее из двух чисел **разностью** большего и меньшего до тех пор, пока они не станут равны. Это и есть НОД.



Евклид

(ок. *325 – 265* гг. до н. э.)

Пример:

НОД *(14, 21)* = НОД *(14, 21 - 14)* = НОД *(14, 7)* = НОД *(7, 7)* = 7

НОД *(2014, 2)* = НОД *(2012, 2)* = **…** = *2*

много шагов при большой разнице чисел.

Модифицированный Алгоритм Евклида

НОД (a, b) = **НОД** (a % b, b) = **НОД** (a, b % a)

Заменяем большее из двух чисел **остатком от деления** большего на меньшее до тех пор, пока меньшее не станет равно нулю. Тогда большее — это НОД.

Пример

НОД (14, 21) = НОД (14, 7) = НОД (0, 7) = 7

Еще один

НОД (2a, 2b) = 2НОД (a, b)

НОД (2a, b) = НОД (a, b) // при нечетном b

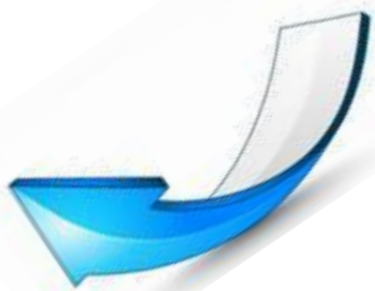
Реализация алгоритма Евклида

Без рекурсии

```
class Program
{
  static int NOD(int a, int b)
   { while (a * b != 0)
      {
         if (a > b)  a = a % b;
         else b = b % a;
      }
     return a + b;
   }
  static void Main(string[] args)
   {    Console.Write("a = ");
        int a = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
        Console.Write("b = ");
        int b = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
        Console.Write("Наибольший общий делитель = ");
        Console.WriteLine(NOD(a, b));
        Console.ReadKey();
   }
}
```

Реализация алгоритма Евклида

Рекурсивный способ



```
class Program
{
  static int NOD(int a, int b)
   {   if (a * b == 0)
          return a + b;
       if (a > b)
          return NOD(b, a % b);
       else
          return NOD(a, b % a);
   }
  static void Main(string[] args)
   {   Console.Write("a = ");
       int a = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
       Console.Write("b = ");
       int b = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
       Console.Write("Наибольший общий делитель = ");
       Console.WriteLine(NOD(a, b));
       Console.ReadKey();
   }
}
```

Целочисленные алгоритмы

Тема 2

Решето Эратосфена

Поиск простых чисел

Простые числа – это числа, которые делятся только на себя и на 1.

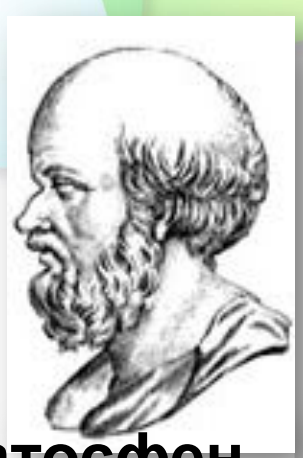
Наибольшее известное (апрель 2014 года): $2^{57885161}-1$ и содержит 17 425 170 десятичных цифр

Простое задание: Найти все простые числа в интервале от 1 до заданного N.

Простое решение:

```
static void Main(string[] args)
{
    Console.Write("n = ");
    bool isPrime = true;
    int n =
Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
    for (int i = 1; i <= n; i++)
    {
        for (int k = 2; k < i; k++)
        {
            isPrime = true;
            if (i % k == 0)
            {
                isPrime = false;
                break;
            }
        }
    // если переменная «true»
        if (isPrime)
            Console.Write(i + " ");
    }
    Console.ReadKey();
}
```

Решето Эратосфена



Эратосфен Киренский
(ок. *275-194* до н.э.)

Алгоритм:

1) начать с **k = 2**;
2) «выколоть» все числа через **k**, начиная с **2·k**;
3) перейти к следующему «невыколотому» **k**;
4) если **k·k <= N**, то перейти к шагу 2;
5) напечатать все числа, оставшиеся «невыколотыми».

высокая скорость, количество операций

$O((N \cdot \log N) \cdot \log \log N)$

нужно хранить в памяти все числа от **1** до **N**

Реализация алгоритма

```
static void Main(string[] args)
 {
    Console.WriteLine("Введите n:");
    int n =
Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
    int[] a = new int[n + 1];
    // сначала все числа не выколоты
    for (int i = 1; i <= n; i++)
       a[i] = 1;
    // основной цикл
    for (int k = 2; k * k <= n; k++)
       if (a[k] != 0)
          for (int i = k + k; i <= n; i += k)
             a[i] = 0;
```

```
// выводим оставшиеся числа
 for (int i = 1; i <= n; i++)
  {  if (a[i] == 1)
      Console.WriteLine("\n" + i);
  }
  Console.ReadKey();
}
```

Массив **A[N+1]**, где

A[i]=1, если число **i** не «выколото»,

A[i]=0, если число **i** «выколото».

Целочисленные алгоритмы

Тема 3

Длинные числа

Что такое длинные числа?

Задача. Вычислить (точно)

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$$

Проблема:

это число содержит более 100 цифр…

Решение:

хранить цифры в виде массива, по группам (например, 6 цифр в ячейке).

$$100! < \underbrace{100^{100}}_{\text{201 цифра}}$$

201/6 ≈ 34 ячейки

Хранение длинных чисел

$1234\,568901\,734567 = 1234 \cdot 1000000^2 + 568901 \cdot 1000000^1 + 734567 \cdot 1000000^0$

Хранить число по группам из 6 цифр – это значит представить его в системе счисления с основанием **d = 1000000**.

Алгоритм:

{A} – длинное число, хранящееся как массив

```
{A} = 1;
for ( k = 2; k <= 100; k ++ )
   { A} = {A} * k;
... // вывести { A}
```

умножение длинного числа на «короткое»

Вычисление

$n!$

```
class Program
    {
        static int Factorial(int n)
        {
            int result = 1;
            for (int i = 1; i <= n; i++)
            {
                result = result * i;
            }
            return result;
        }
        static void Main(string[] args)
        {
            Console.Write("Введите n: ");
            int n = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
            Console.Write(n + "! = ");
            Console.WriteLine(Factorial(n));
            Console.ReadKey();
        }
    }
```

15! = 2004310016

Целочисленные алгоритмы

Тема 4

Последовательность Фибоначчи

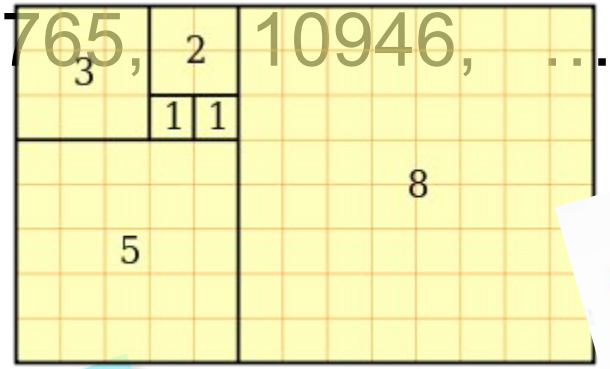
Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1180 – 1240)

Итальянский купец Леонардо из Пизы был одним из самых известных математиков средневековья.

Числа Фибоначчи

Чи́сла Фибона́ччи — элементы числовой последовательности, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, …



Геометрическое доказательство формулы для суммы квадратов первых *n* чисел Фибоначчи

Числа Фибоначчи

Более формально, последовательность чисел Фибоначчи задается линейным рекуррентным соотношением:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Задача 1:

Вывести на экран все числа последовательности Фибоначчи до N-го числа последовательности (использовать динамическое программирование)

Задача 2:

Вывести на экран N -ое число последовательности Фибоначчи (рекурсией)

Решение задачи №1

```
public static void Fib(double[] a)
  {
      double n = a.Length;
      a[0] = 1;
      a[1] = 1;
      Console.Write("1 1");
      for (int i = 2; i <= n; i++)
      {
        a[i] = a[i - 1] + a[i - 2];
        Console.Write(" " + a[i]);
   }
```

```
static void Main(string[] args)
  {
     Console.Write("Введите нужное
                  количество чисел (n): ");
      int n = Convert.ToInt32(Console.
                                  ReadLine());
      Console.Write("  Первые " + n +
            " чисел последовательности
                                Фибоначчи: ");
          double[] a = new double[n];
          Fib(a);
          Console.ReadKey();
      }
   }
```

Решение задачи №2

Рекурсивный спос

```
class Program
    {
        static private int Fib(int x)
        {
            if (x == 1 || x == 2)
                return 1;
            return Fib(x - 2) + Fib(x - 1);
        }
        static void Main(string[] args)
        {
            Console.Write("Введите номер нужного числа (n):
            int n = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
            Console.Write(n + "-ое число последовательности Фибоначчи = ");
            Console.WriteLine(Fib(n));
            Console.ReadKey(true);
        }
}
```

Целочисленные алгоритмы

Тема 5

Последовательность квадратов

Последовательность квадратов

Задача :

Вывести на экран квадраты всех чисел от 0 до N

```
static void Main(string[] args)
        {
            Console.Write("Введите n: ");
            long n =
Convert.ToInt64(Console.ReadLine());
            long t = 1;
            for (long k = 0; k <= n; k++)
            {
                t = t + 2 * k - 1;
                Console.WriteLine(k + "^2 = " + t);
            }
            Console.ReadKey();
        }
```

Реализация алгоритма


The end