Конспект лекцій 2015 (Демидов В.К.) Лекція 3

3D ГРАФІКА В НАУКАХ ПРО ЗЕМЛЮ

Що нового

- Багато різних систем координат в графіці
  - Глобальні, моделі, тіла, руки, ...
- Щоб зв'язати їх, ми повинні зробити трансформації між ними
- Крім того, для моделювання об'єктів. У нас є чайник, але
  - Необхідно помістити його на потрібне місце в глобальних координатах
  - Необхідно переглянути його з різних кутів (ЛБ2)
  - Необхідно його масштабувати, щоб зробити більшим або меншим
- Демо ЛБ2

Задачі

- Повторити основну математику цих перетворень
  - Представляти перетворення, використовуючи матричне і матрично-векторне множення.
- Зробити Демо лекції: ЛБ2 і аплету
- Трансформації аплету
  - Програмне забезпечення Brown University Exploratories
  - http://www.cs.brown.edu/exploratories/home.html
  - Розроблено: Andries Van Dam і Jean Laleuf

Основні ідеї

- Об'єкт в модельних координатах
- Перетворення координат у глобальні
- Представлення точки на об'єкті як вектори
- Матричне множення
- Демо аплету

Терміни

- 2D перетворення: обертання, масштабування, зсув
- Композитне перетворення
- 3D обертання
- Переміщення: однорідні координати
- Трансформація нормалей

Масштаб(нерівномірний)

$$\text{Scale}(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} s_x^{-1} & 0 \\ 0 & s_y^{-1} \end{pmatrix}$$

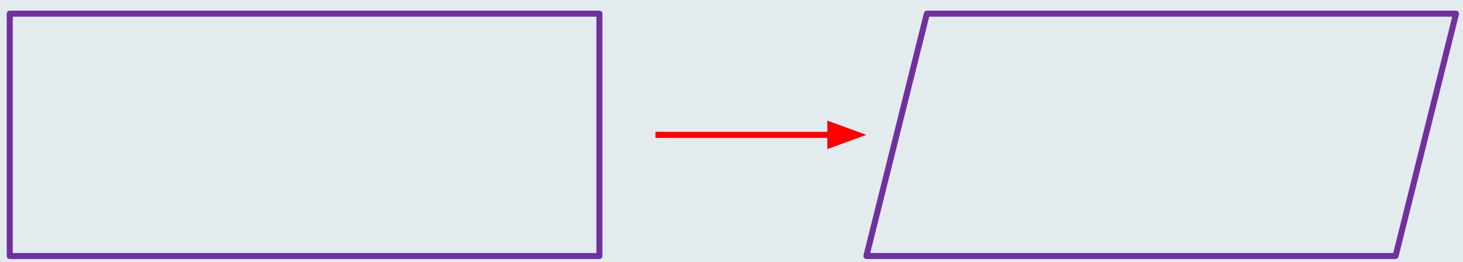
$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \end{pmatrix}$$

transformation_game.jar

Зсув

$$\text{Shear} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Поворот

- 2D простий, 3D складний. [Похідні? Приклади?]
- 2D?
- Тригонометрия

$$R(X+Y)=R(X)+R(Y)$$

- Лінійний
- Комутативний – не важен порядок для 2 Д(поворот 2д.раб стол)

transformation_game.jar

Поворот

- 2D простий, 3D складний. [Похідні? Приклади?]
- 2D?

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

R(X+Y)=R(X)+R(Y)

- Лінійний
- Комутативний

transformation_game.jar

Поворот

- У просторі R^2 дано вектор $\vec{i} = \binom{7.0}{1.0}$, який буде результат 2D обертання на190.0 градусів?

Іншими словами $\vec{j} = R(190)\binom{7.0}{1.0}$

$$\vec{j}_x = ?$$
$$\vec{j}_y = ?$$

Композитні трансформації

- Часто є задачі поєднання трансформацій
- Наприклад спочатку змінити масштаб на 2, а потім повернути на 45 градусів
- Перевага матричного запису: все є матрицями
- Не комутативні!! Порядок має значення

Приклад композитного повороту та масштабування

$$x_3 = Rx_2 \; x_2 = Sx_1$$
$$x_3 = R(Sx_1) = (RS)x_1$$
$$x_3 \neq SRx_1$$

transformation_game.jar

Обернені композитні трансформації

- Припустимо, ми хочемо зробити обернені перетворення з 3 трансформацій
- Варіант 1: Знайти композитну матрицю, інвертувати
- Варіант 2: Інвертувати кожну трансформацію **і змінити порядок**
- Очевидно з властивостей матриць, демо
  - $M = M_1 M_2 M_3$
    $M^{-1} = M_3^{-1} M_2^{-1} M_1^{-1}$
    $M^{-1}\, M = M_3^{-1}(M_2^{-1}(M_1^{-1} M_1)\, M_2)\, M_3$

при інвертуванні
змінюється порядок

Поворот

- Задано простір R^2 . Розглянемо кожне ціле в інтервалі від 1 до 180 включно.
- $R(\theta) = R(1)R(2)R(3) \ldots R(180)$.
- $\theta -?$ Запишіть відпоідь у виді числа від 0 до 360

Поворот

- Згадаємо 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Ортогональний

$$R^T R = I$$

Поворот в 3D

- Поворот навколо координатної вісі, простий

$$R_z=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad R_x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$R_y=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$

- Завжди лінійний, ортогональний

$$R^T R = I$$

$$R(X+Y)=R(X)+R(Y)$$

- Рядки/колонки ортонормальні

Геометрична інтерпретація 3D поворотів

- Рядками матриці є три одиничних вектори з нової координатної системи
- Можна побудувати матрицю обертання від 3 ортонормальних векторів

$$R_{uvw} = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{pmatrix} \quad u = x_u X + y_u Y + z_u Z$$

$$R_p = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = ?$$

Геометрична інтерпретація 3D поворотів

- Рядками матриці є три одиничних вектори з нової координатної системи
- Можна побудувати матрицю обертання від 3 ортонормальних векторів

$$R_{uvw} = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{pmatrix} \quad u = x_u X + y_u Y + z_u Z$$

$$R_p = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = ? \qquad \begin{pmatrix} u \cdot p \\ v \cdot p \\ w \cdot p \end{pmatrix}$$

Геометрична інтерпретація 3D поворотів

- $$R_p = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = ? \quad \begin{pmatrix} u \cdot p \\ v \cdot p \\ w \cdot p \end{pmatrix}$$

- Рядками матриці є три одиничних вектори з нової координатної системи
- Можна побудувати матрицю обертання від 3 ортонормальних векторів
- Ефективно, проекція точки в новій координатній системи
- Нова координатна система UVW представляється в декартових компонентах XYZ
- Інверсія або транспонування бере XYZ в UVW

Не комутативні

- Не коммутативні (на відміну від 2D) !!
- Поворот x навколо y не такий же, як y навколо x
- Порядок застосування поворотів має значення
- Слідує з властивостей матриць - множення НЕ комутативне

  R1 * R2 не те ж що R2 * R1
- Демо: ЛБ2, порядок вправо або вгору матиме значення

Довільна формула обертання

- Повернемо на кут θ навколо довільної осі **a**
  - ЛБ2 : повинен обертати погляд, за напрямом
  - Кілька математичних похідних, але формула корисна
- Задача: Поворот вектор **b** на кут θ навколо осі **a**
- Корисний представити **b** як X, **a** як Z, переконайтеся, що зробили правильно
- Для ЛБ2, ви, ймовірно, потребуватиме остаточну формулу

Формула повороту навколо осі (**Axis–angle representation**)

- Крок 1: **b** має компоненту паралельну і перпендикулярну **a**
  - Паралельна компонента не змінюється (обертання навколо осі площини таке, що вісь обертання залишається незмінною після обертання, наприклад, поворот навколо **z**)

Формула повороту навколо осі (**Axis–angle representation**)

- Крок 2: Визначимо **c** ортогональний **a** і **b**
  - Аналогічно визначимо Y вісь
  - Використовуємо векторний добуток і матричну формулу для цього

Формула повороту навколо осі (**Axis–angle representation**)

- Крок 3: Стосовно перпендикулярної компоненти **b**
  - $\cos\theta$ залишається незмінним
  - $\sin\theta$ – його проекція на **c**

Формула повороту навколо осі (**Axis–angle representation**)

- $(b\backslash \mathrm{a})_{ROT} = (I_{3x3} cos\theta - aa^T cos\theta)b + (A^* sin\theta)b$
- $(b\backslash \mathrm{a})_{ROT} = (aa^T)b$
- $R(a, \theta) = I_{3x3} cos\theta + aa^T(1 - cos\theta) + A^* sin\theta$

cos, що не змінюється

Компонента вздовж a (відповідно не змінюється)

Перпендикуляр (компонента що повертається)

Формула повороту навколо осі (**Axis–angle representation**)

- $(b\backslash a)_{ROT} = (I_{3x3}cos\theta - aa^T cos\theta)b + (A^* sin\theta)b$
- $(b\backslash a)_{ROT} = (aa^T)b$
- $R(a,\theta) = I_{3x3}cos\theta + aa^T(1 - cos\theta) + A^* sin\theta$
- $R(a,\theta) = cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - cos\theta) \begin{pmatrix} x^2 & -z & y \\ z & y^2 & -x \\ -y & x & z^2 \end{pmatrix} + A^* sin\theta$

x,y,z – декартові координати **a**

https://www.youtube.com/watch?v=sgoeQFOxwYA

Формула повороту навколо осі (**Axis–angle representation**)

- Використовуючи формулу обертання Родріга, що заперечуює наявність вісі обертання?
- $R(-a, \theta) = R(a, \theta)$
- $R(-a, \theta) = R(a, \theta + \ \pi)$
- $R(-a, \theta) = -R(a, \theta)$
- $R(-a, \theta) = R(a, -\theta)$
- **Результат невизначений**
- **Жодна з відповідей**