# Перестановки

Теоретический материал

Примеры задач с решениями

Задачи для закрепления

Перестановкой из n элементов называется любой способ нумерации этих предметов

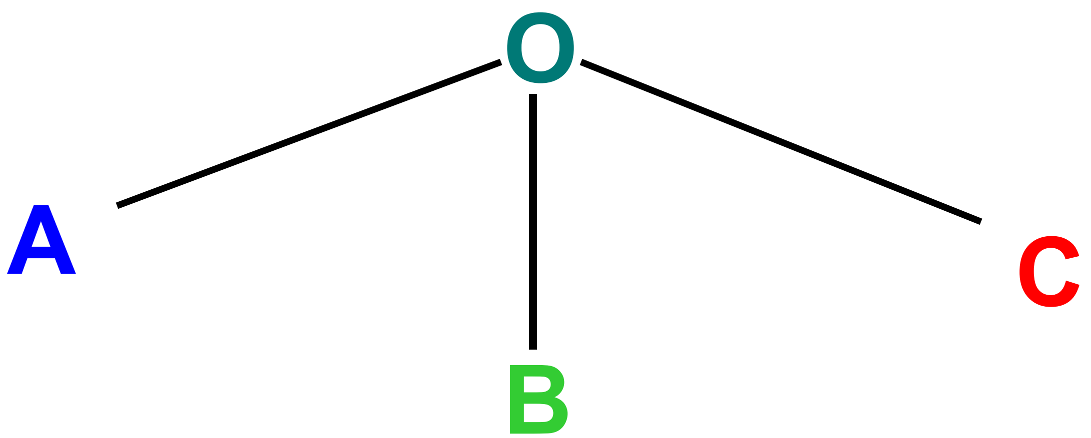
(способ их расположения в ряд)

Сколькими способами можно рассадить
в ряд на **3** стула **трех** учеников?

## Решение с помощью графа

**За корневую вершину графа возьмём произвольную точку плоскости О.**

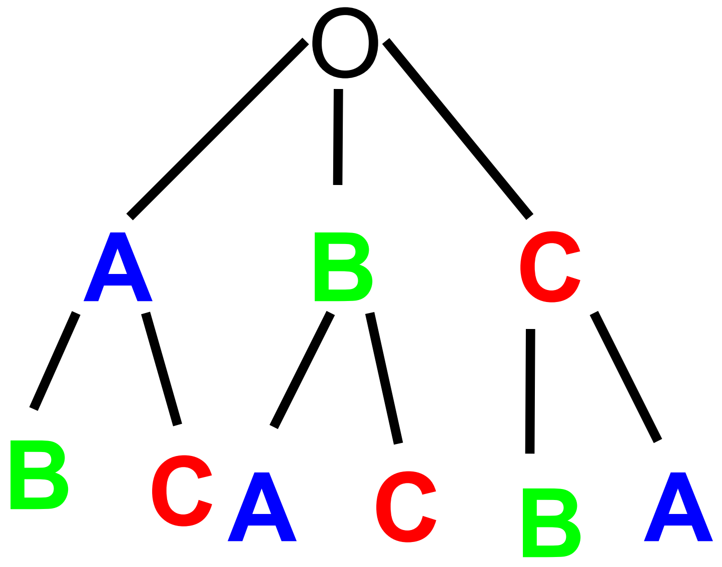
**На первый стул можно посадить любого из трех учеников - обозначим их А, В, С.**




Посадив на первый стул ученика А, на второй стул можно посадить ученика В или С.

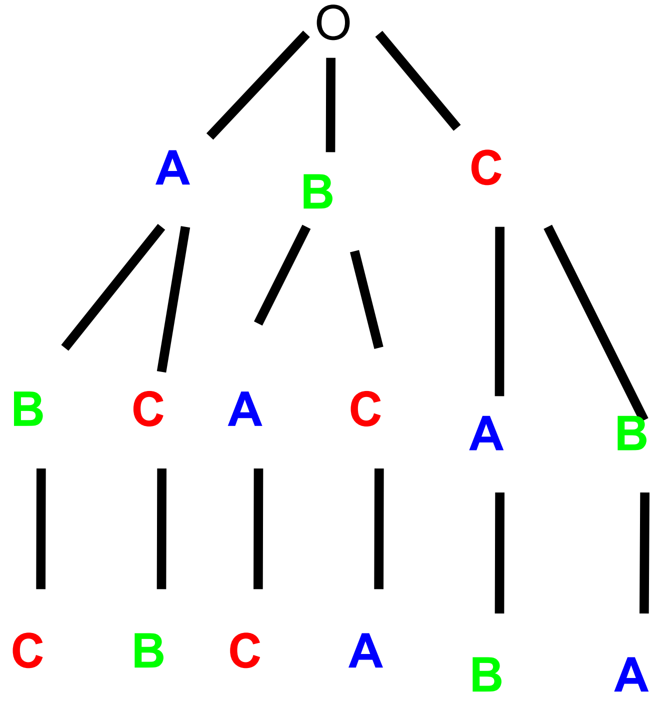
Если же на первый стул сядет ученик В, то на второй  можно посадить ученика А или С.

Если на первый стул сядет ученик С , то на второй можно посадить ученика А или В.




Очевидно, что третий стул в каждом случае займет оставшийся ученик.

Это соответствует одной ветви графа, которая «вырастает» на каждой из предыдущих ветвей.



# Запомните

Граф можно ***не строить***, если не требуется выписывать все возможные варианты, а нужно указать их число.

В этом случае рассуждать нужно так:

- на первый стул можно усадить одного из трех человек,
- на второй одного из двух оставшихся
- на третий – одного оставшегося:

Получаем **3 * 2 *1 = 6** вариантов

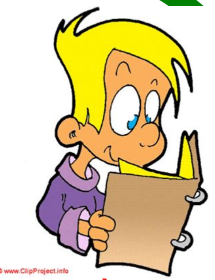
**(по правилу произведения)**


# Задача №2

В гостинице семь одноместных номеров. Семь гостей желают в них разместиться. Причем трое заранее зарезервировали конкретные номера.

Найдите число способов расселения семи гостей по семи номерам.

# Первый способ решения:
# с помощью графа



Так как три номера у нас были зарезервированы (то есть заняты), то мы их не рассматриваем

Пусть 1-ый гость – , 2-ой гость – , 3-ий гость – , 4-ый гость –

1. За начало берем произвольную точку.

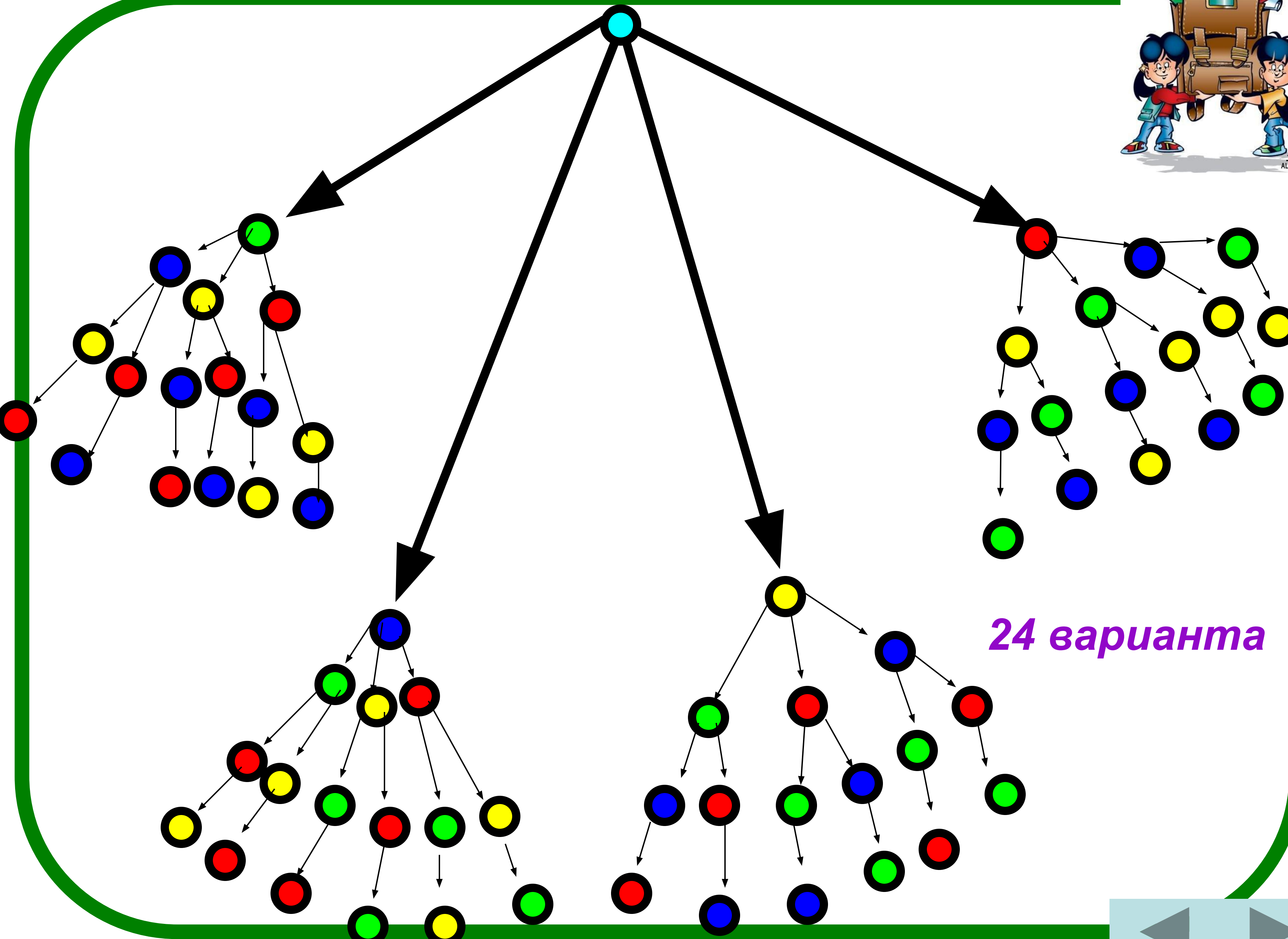
2. В первый номер можно расселить любого из гостей гостиницы. Вы можете видеть это на графе.

3. А) Гость займет 1-ый номер, гость - 2-ой, гость - 3-ий, гость - 4-ый номер.

   Б) Если в первый номер заселить гостя то во второй можно заселить либо гостя , либо - , либо -

Далее продолжаем по аналогии.

Рассмотрим граф:



**24 варианта**

# Второй способ решения

У гостя есть возможность заселиться в любой из четырех (4) номеров,

у гостя - в любой из трех,

у гостя – в любой из двух,

у гостя - в один оставшийся,

Гости могут заселяться в любом порядке:

То есть гость не обязательно первый, гость второй и так далее,

Эта задача решается с помощью последовательного умножения количества вариантов заселения гостей - то есть ***факториал***.

# Факториал

Факториалом натурального числа **n** называется произведение всех натуральных чисел **от 1 до n**. Обозначается **n!**

$$n! = 1*2*3*\ldots*(n-1)*n$$

Так как три номера уже занято, значит (7-3)=4  номера свободно.

Поскольку мы меняем местами **четырех** человек по свободным номерам,

значит это будет ***перестановка*** из

**4-х** элементов.

**$P_{(7-3)}$= (7-3)! =4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24 - варианта перестановок**

# Перестановка

**Перестановкой из n предметов называется любой способ нумерации этих предметов (способ их расположения в ряд)**

$$P_n = n! = n*(n-1)*(n-2)*(n-3)\ldots(n-k)$$

# Задача №3

Сколькими способами можно рассадить 4 человек за круглым столом.

***(перестановка по кругу)***

9

96

6

52

# Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!

# Верно!!!

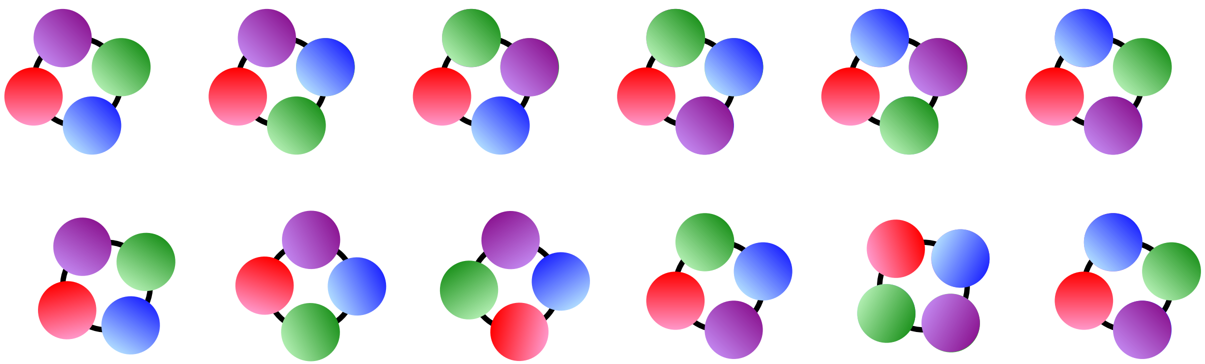
Сравните решение

# Решение к задаче №3

Пользуясь формулой перестановок по кругу «$P_n=(n-1)!$» n-1 по тому что при перестановках элементов 1 элементов остается статичным и не переставляется.

Получаем $P_4=(4-1)!=3!=6$

# Перестановки по кругу



$$P_n=(n-1)$$

# Задача №4

Найдите число различных перестановок букв a,a,a,b,b,c,c

(см. перестановка с повторением)

| 210 | 60 | 7 | 5040 |
|---|---|---|---|

# Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!

# Верно!!!

Сравните решение

# Решение к задаче №4

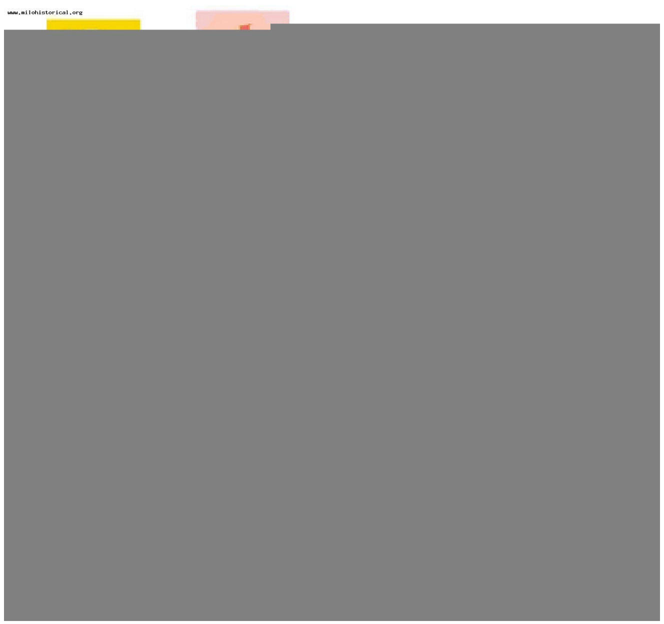
Эта задача решается с помощью формулы перестановок с повторением то есть получаем.

$$\frac{7!}{3!*2!*2!} = \frac{5040}{24} = 210$$

# Перестановки с повторением

**Кроме рассмотренных нами комбинаций в комбинаторике есть еще многие другие.**

**Одна из наиболее важных типов *перестановки с повторением.***



**Рассуждать нужно так:**

**Возьмем m элементов среди которых имеется $m_1$ одинаковых между собой элементов первого рода, $m_2$ одинаковых элементов второго рода и т.д. Будем переставлять их всевозможными способами.**

**Получившиеся комбинации носят название перестановки с повторяющимися элементами. Число различных между собой перестановок с повторяющимися элементами равно:**

$$\frac{P_m}{P_{m1} * P_{m2} \ldots\ldots P_{m_k}} \quad \text{или} \quad \frac{m!}{m_1! * m_2! * m_3! \ldots m_k!}$$

# Примеры задач с решениями

## перестановки

# Задача №1

Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде трех горизонтальных полос одинаковых по ширине, но разных по цвету: белый , **синий**, **красный**.

Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой, отличный от других, флаг?

7 4 6 2

# Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!

# Верно!!!

Сравните решение

# Решение задачи №1

Так как у флага три полосы и их нужно расположить всеми возможными способами, то мы используем перестановку из 3 элементов:

$P_3 = 3! = 3*2*1 = 6$

# Задача №2

Подсчитаем, сколько существует различных способов каждому из пяти человек присвоить номер от одного до пяти?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 700 | 10 | 61 | 120 |

# Решение задачи №2

Так как есть пять человек и нужно присвоить им пять номеров всеми возможными способами, то мы используем перестановку из 5 элементов:

$P_5=5!=5*4*3*2*1=120$(способов)

# Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!

# Верно!!!

Сравните решение

# Задача №3

В автосервис одновременно приехали 3 машины для ремонта.

Сколько существует способов выстроить их в очередь на обслуживание?

25

6

11

15

# Решение задачи №3

Так как есть три машины, и нужно расставить их в очередь на ремонт всеми возможными способами, то мы используем перестановку из 3 элементов:

$P_3 = 3! = 3*2*1 = 6$

# Ошибка!!!

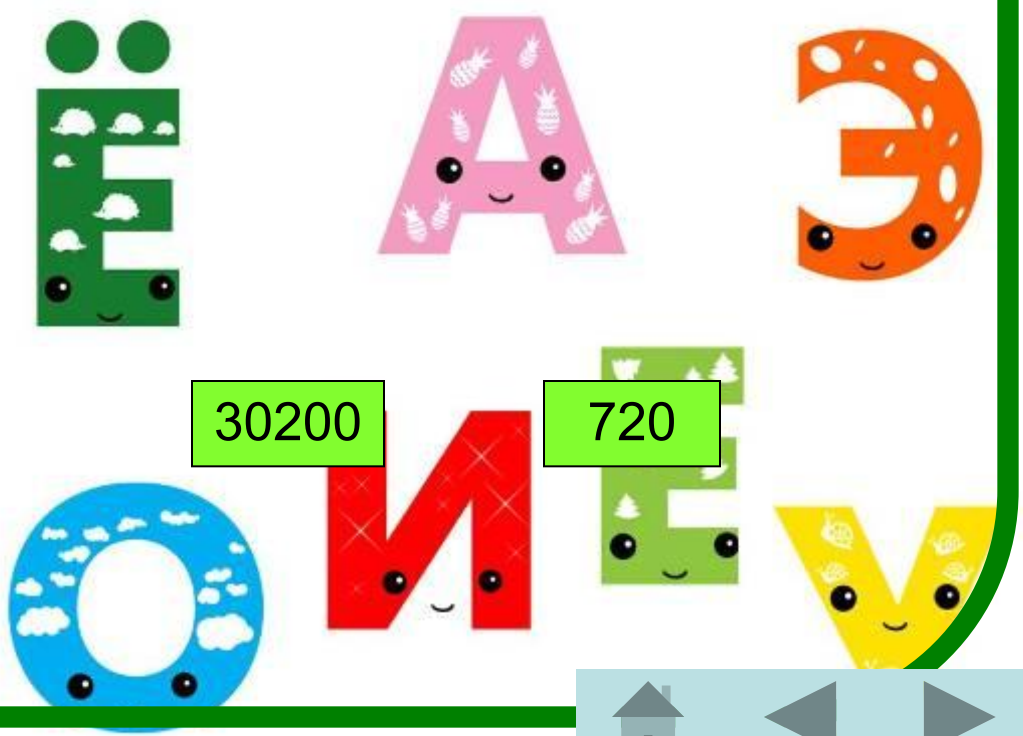
Попробуйте ещё раз!

# Верно!!!

Сравните решение

# Задача №4

Сколько различных последовательностей (не обязательно осмысленных) можно составить из букв слова «автор»?



120

100

30200

720

# Решение задачи №4

Так как в слове «автор» 5 букв, где все буквы разные и нужно расставить их всеми возможными способами, то мы используем перестановку из 5 элементов:

$P_5=5!=5*4*3*2*1=120$(способов)

# Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!

# Верно!!!

Сравните решение

# Задача №5

В гостинице семь одноместных номеров. Семь гостей желают в них разместиться. Причем двое заранее зарезервировали конкретные номера.

Сколько существует способов расселения семи гостей по семи номерам?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 120 | 1000 | 200 | 7520 |

# Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!

# Верно!!!

Сравните решение

# Решение задачи №5

Так как двое гостей уже зарезервировали номера, то остаётся пять посетителей и они могут расселиться по комнатам следующим способом:

$P_5$=5!=5*4*3*2*1=120

# Задача №6

Сколькими способами можно составить расписание на понедельник чтобы русский и литература стояли рядом.(Русский язык, Геометрия, Литература, Алгебра, Физкультура, История).

1000

120

200

7520

# Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!

# Верно!!!

Сравните решение

# Решение задачи №6

Так как русский язык и литература должны стоять рядом, то мы сгруппируем его в один элемент. Поэтому расписание можно составить следующим образом:

$P_5=5!=5*4*3*2*1=120$

# Решение к задаче №7

Перестановка из 7 элементов но при перестановке букв «а», получается одно слово, поэтому

$$\frac{P_7}{2!} = 2520$$

# Задача №8

Сколько можно составить слов из букв в слове **математика**?

151200

3542

100

720

# Ошибка!!!

Попробуйте ещё раз!

# Верно!!!

Сравните решение

# Решение к задаче №8

Перестановка из 10 элементов, но при перестановке букв «а», «м», «т» между собой, получается одно и то же слово, значит

$$\frac{P_{10}}{3!*2!*2!}=151200$$

# Задача №9

Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр **1,2,0,4,6**?

10

96

120

520

# Решение к задаче №9

$P_5$ – количество перестановок где «0» на первом месте поэтому получается $P_4$

$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 4!(5-1) = 4!*4 = 96$

# Ошибка!!!

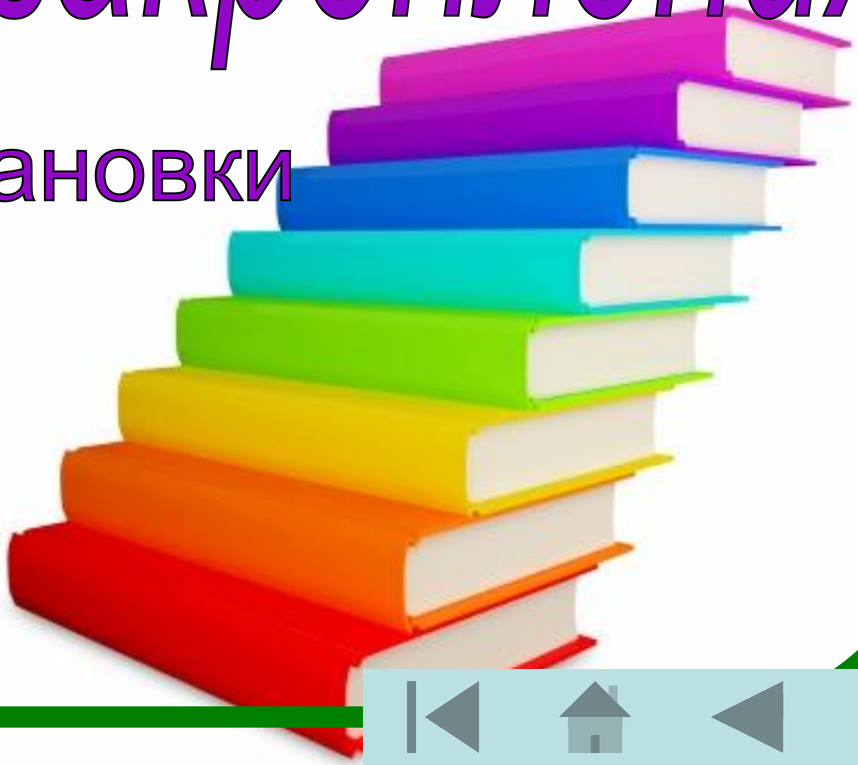
Попробуйте ещё раз!

# Верно!!!

Сравните решение

# Задачи для закрепления

перестановки



***Задача*** **№6.** У Спящей Красавицы 7 платьев. Сколькими способами она может их надевать, меняя каждый день, в течение недели?

***Задача*** **№7.**Старушка Бэйбэрикээн заказала у кузнеца 5 колокольчиков для своих пяти коров. Сколькими способами она может надеть колокольчики на своих коровах?

***Задача*** **№8.** Сколько различных восьмизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8 при условии, что ни одно из них не повторяется?

***Задача*** **№9**. Всего 6 различных красок. Сколькими способами можно раскрасить слово «Эврика», если все буквы должны быть раскрашены разными цветами?

# Ответы к задачам 6-9:

***Задача* №6:** **7!=5040**

***Задача* №7:** **5!=120**

***Задача* №8:** **8!=30200**

***Задача* №9:** **6!=720**

***Задача*** **№15.** Слово - любая конечная последовательность букв русского алфавита. Выясните, сколько различных слов можно составить из слов

а) ``ВЕКТОР";

б) ``ЛИНИЯ";

в) ``ПАРАБОЛА";

г) ``БИССЕКТРИСА";

д) ``МАТЕМАТИКА";

***Задача*** **16.** Сколькими способами 28 учеников могут выстроиться в очередь в столовую?

***Задача*** **17.** Сколько существует различных возможностей рассадить 5 юношей и 5 девушек за круглый стол с 10-ю креслами так, чтобы они чередовались?

# Ответы к задачам 15-17:

***Задача* №15:**

**а)6!=720**

**б)5!-2!=120-2=118**

**в)8!-3!=30200-6=30194**

**г)11!-3!-2!=39916800-6-2=39916792**

**д)9!-2!-2!-3!=362880-2-2-6=362870**

***Задача* №16:** **28!**

***Задача* №17:** **(5-1)!*2!=4!*2!=48**