

Скалярное произведение векторов

УСТНО:

1. $\cos 45^{\circ} =$

2. $\operatorname{tg} 45^{\circ} =$

3. $\cos 60^{\circ} =$

4. $\sin 30^{\circ} =$

5. $\sin 60^{\circ} =$

6. $\sin 90^{\circ} =$

7. $\cos 90^{\circ} =$

8. $\operatorname{tg} 45^{\circ} =$

9. $\operatorname{tg} 90^{\circ} =$

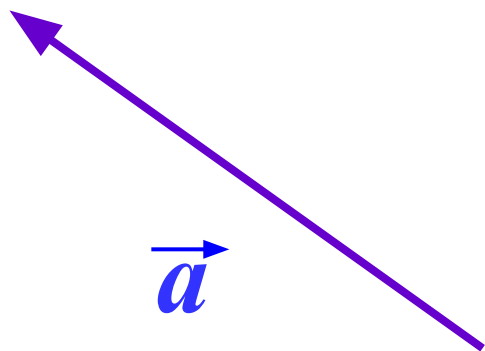
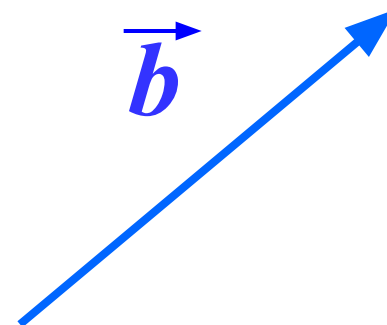
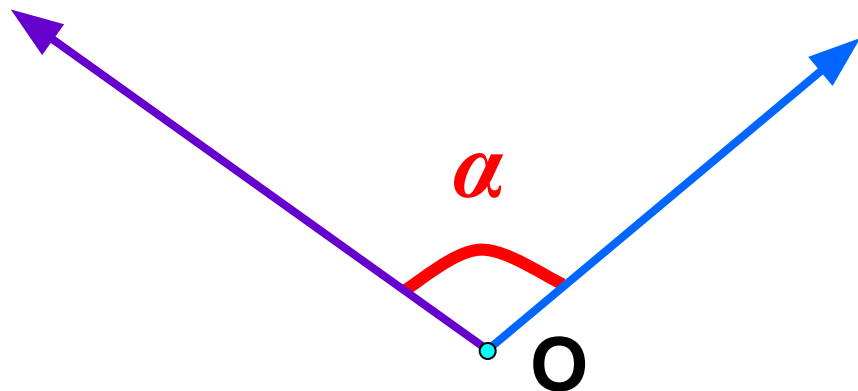
10. $\sin^2 x + \cos^2 y =$

Диктант

Даны точки $A(2; -3)$, $B(-1; 2)$, $C(0; -4)$

1. Найдите координаты вектора \overrightarrow{AB} $\overrightarrow{AB} = (-3, 5)$
2. Найдите координаты вектора \overrightarrow{BC} $\overrightarrow{BC} = (1, -6)$
3. Найдите длину вектора \overrightarrow{AB} $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$
4. Найдите длину вектора \overrightarrow{BC} $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$
5. Произведение $5 \cdot \overrightarrow{AB}$: $5 \cdot \overrightarrow{AB} = (-15, 25)$

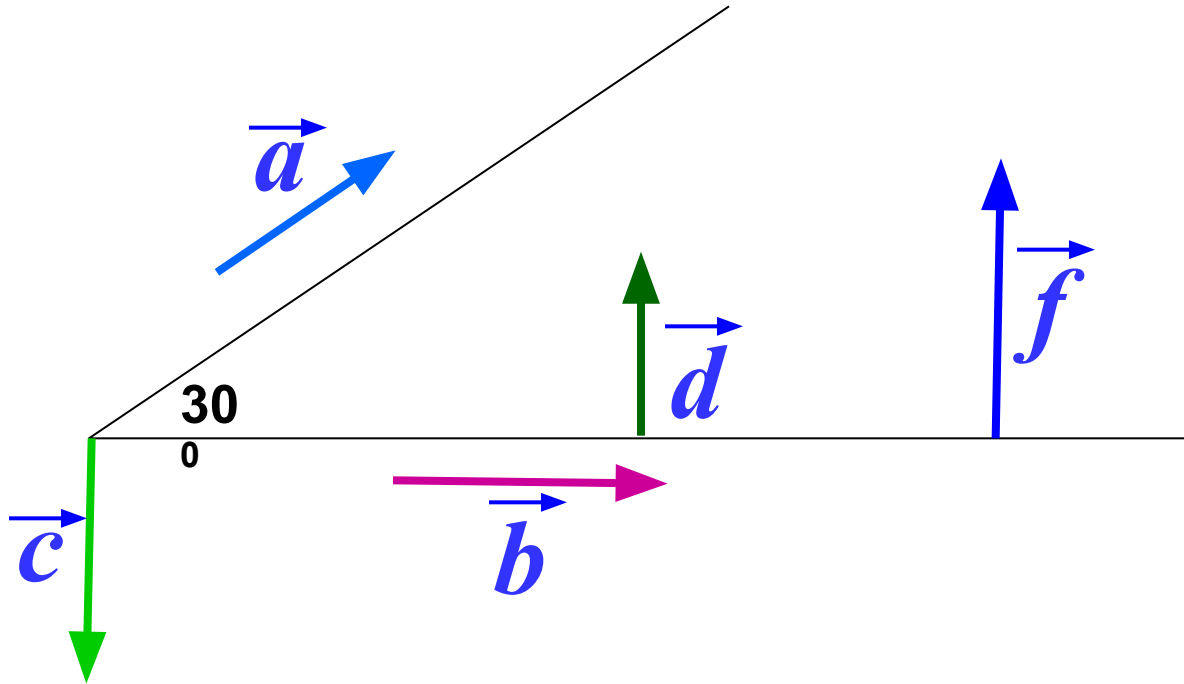
Угол между векторами



Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен α .

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = \alpha$$

Найдите угол между векторами



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^\circ$$

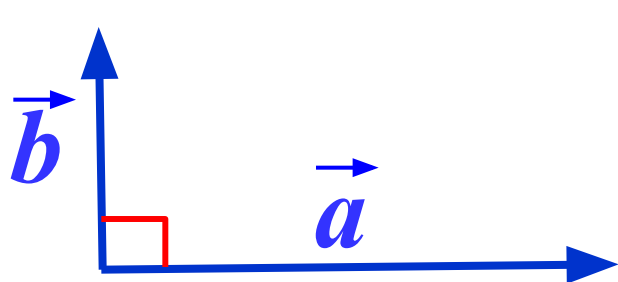
Определение

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – **число!**

Частный случай №1



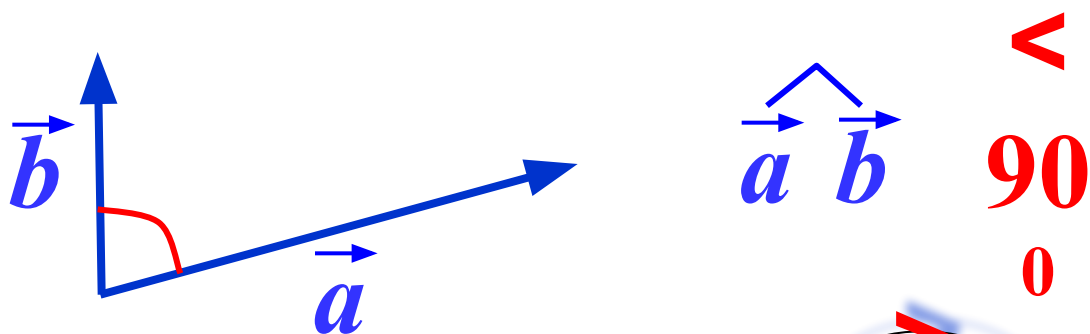
$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 90^\circ$$

$$= 0$$

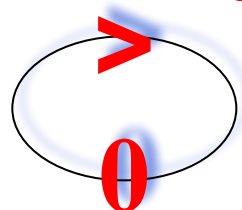
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

Частный случай №2



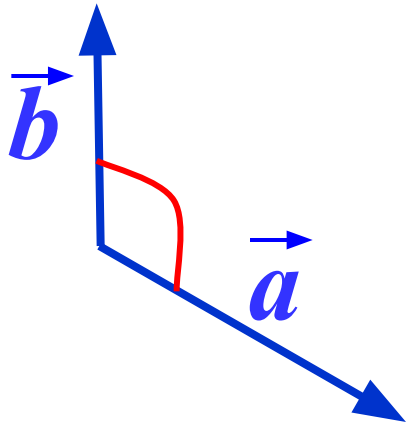
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha > 0$$

Частный случай №3



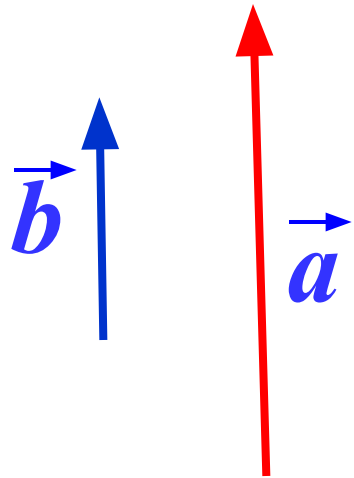
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$\alpha > 90^\circ$

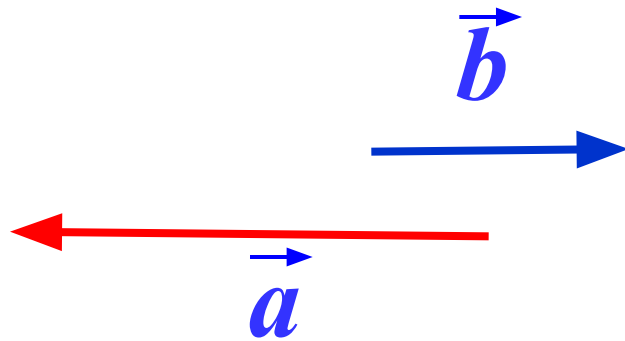
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff \alpha > 90^\circ$$

Частный случай №4



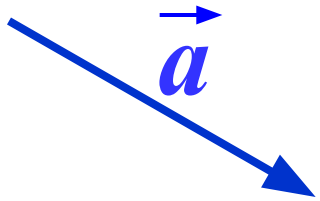
$$\begin{aligned} \widehat{a \ b} &= 0^\circ \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \widehat{a \ b} &= 180^\circ \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{aligned}$$

Частный случай №5

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0^0$$



$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cos \overset{1}{0^0} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|^2$$

Скалярное произведение $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$ называется
скалярным квадратом вектора \overrightarrow{a} и обозначается \overrightarrow{a}^2

$$\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$$

Примеры:

- $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ $\alpha = 60^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos(60^0) = 3$
- $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 1$ $\alpha = 30^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 \cdot \cos(30^0) = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}$
- $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 4$ $\alpha = 45^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 4 \cdot \cos(45^0) = 14 \cdot \sqrt{2}$
- $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$ $\alpha = 120^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(120^0) = \frac{-1}{2}$
- $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 5$ $\alpha = 90^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 5 \cdot \cos(90^0) = 0$

1

ТЕСТ

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = |\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}| \cos \widehat{BC, BA} = 6 \cdot 3 \cos 60^\circ = 18 \cdot \frac{1}{2}$$

1

$9\sqrt{3}$

ПОДУМАЙ!

2

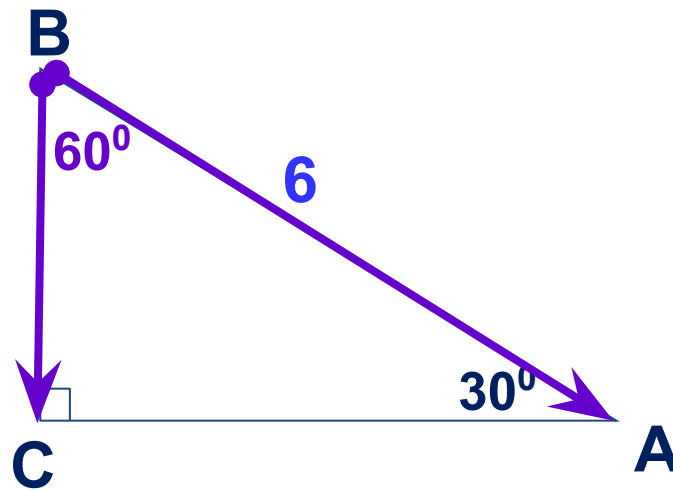
9

ВЕРНО!

3

18

ПОДУМАЙ!



Проверка

2 Скалярное произведение координатных векторов

\vec{i} и \vec{j} равно нулю, т.к. угол между векторами прямой

1

1

ПОДУМАЙ!

2

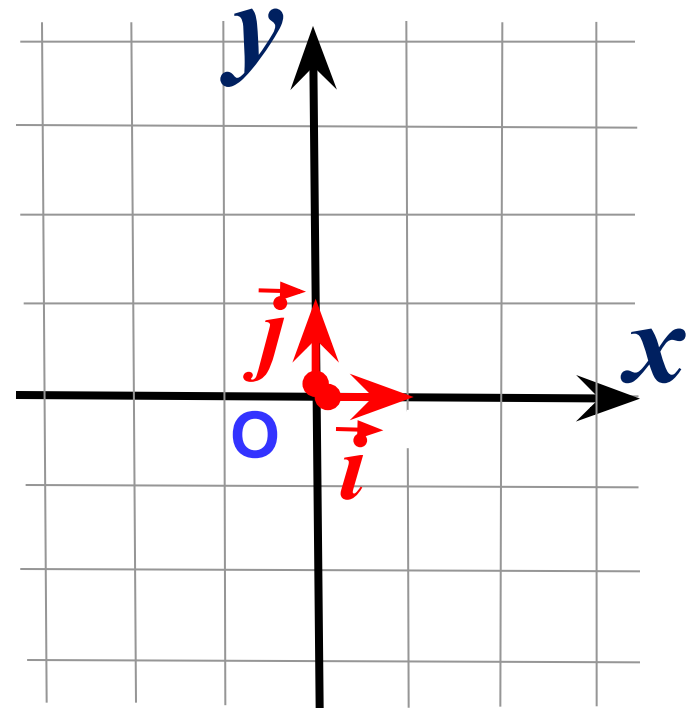
-1

ПОДУМАЙ!

3

0

ВЕРНО!



Проверка

3

Скалярный квадрат вектора \vec{i} равен:

ВЕРНО!

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

1

1

2

-1

ПОДУМАЙ!

$$\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1^2 = 1$$

3

0

ПОДУМАЙ!

Проверка

4 Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$,

то векторы \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \widehat{a \ b}$$

$$12 = 3 \cdot 4 \cos \widehat{a \ b}$$

$$\cos \widehat{a \ b} = 1$$

$$\widehat{a \ b} =$$

если $\vec{a} \overset{0^\circ}{\uparrow\uparrow} \vec{b}$

ВЕРНО!

1 сонаправлены;

2 перпендикулярны;

ПОДУМАЙ!

3 противоположно направлены.

ПОДУМАЙ!

Проверка

5 Если $\vec{x} \cdot \vec{y} = -20$, $|\vec{x}| = 4$, $|\vec{y}| = 5$,
то векторы \vec{x} и \vec{y}

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos \widehat{x y}$$

$$-20 = 4 \cdot 5 \cos \widehat{x y}$$

ПОДУМАЙ!

1

сонаправлены;

ПОДУМАЙ!

2

перпендикулярны;

ВЕРНО!

3

противоположно направлены.

$$\cos \widehat{x y} = -1$$

$$\widehat{x y} = 180^\circ$$

$$\vec{x} \updownarrow \vec{y}$$

Проверка

6 Найдите угол между векторами \vec{m} и \vec{n} , если

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -15, \quad |\vec{m}| = 5, \quad |\vec{n}| = 6.$$

ПОДУМАЙ!

1 50°

ПОДУМАЙ!

2 60°

ВЕРНО!

3 120°

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**

Проверка

Формула для нахождения
скалярного произведения
через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Пример №1

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{-6; 9\} \qquad \vec{b} \{-1; 0\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot (-1) + 9 \cdot 0 = 6$$

Пример №2

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{0; 0\} \qquad \vec{b} \{22; 1\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 22 + 0 \cdot 1 = 0$$

Вычислите скалярное произведение

векторов:

- $a(1,1); b(1,2)$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$
- $a(-2,5); b(-9,-2)$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot (-9) + 5 \cdot (-2) = 8$
- $a(-3,4); b(4,5)$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 8$
- $a(5,2); b(-9,4)$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot (-9) + 2 \cdot 4 = -37$
- $a(-1,1); b(1,1)$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\angle \vec{a} \vec{b})$$

$$\cos(\angle \vec{a} \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\cos(\angle \vec{a} \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Дано: $\vec{a}(1, 3)$ | $\vec{b}(5, 2)$

1. Вычислите скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 11$$

2. Вычислите длину вектора a :

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

3. Вычислите длину вектора b :

$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

4. Вычислите косинус угла между

векторами:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{11}{(\sqrt{10} \cdot \sqrt{29})} = \frac{11}{\sqrt{290}}$$

5. Сделайте вывод: **тупой**, **прямой** или

острый угол мы получили

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) > 0 \Rightarrow \text{угол острый}$$