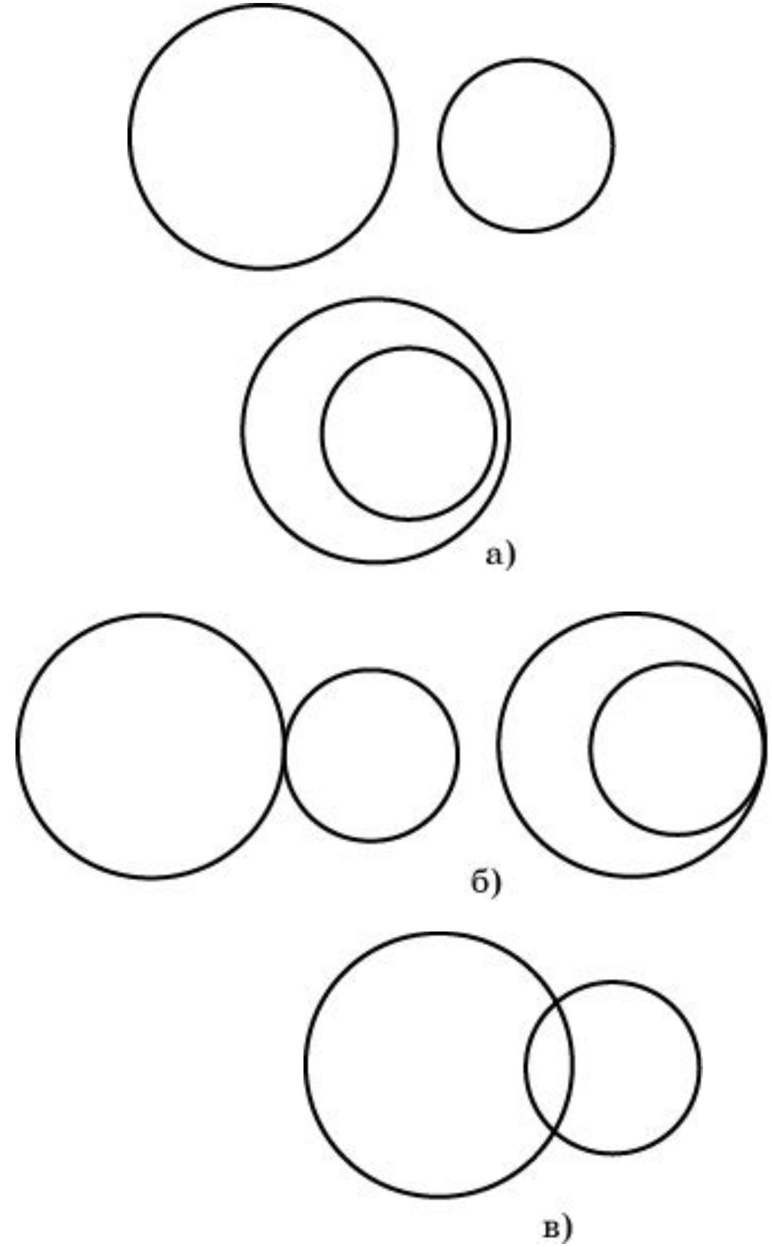
Две окружности

Две окружности могут:

а) не иметь общих точек;

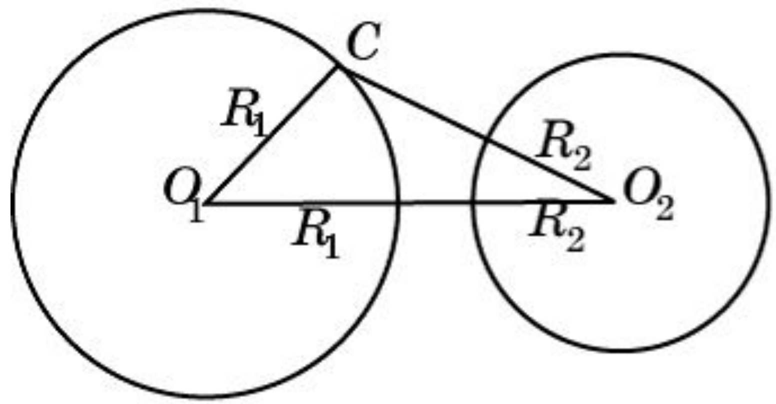
б) иметь только одну общую точку. В этом случае окружности касаются к окружности. Общая точка называется точкой касания;

в) иметь две общие точки. В этом случае говорят, что окружности пересекаются.



Теорема 1

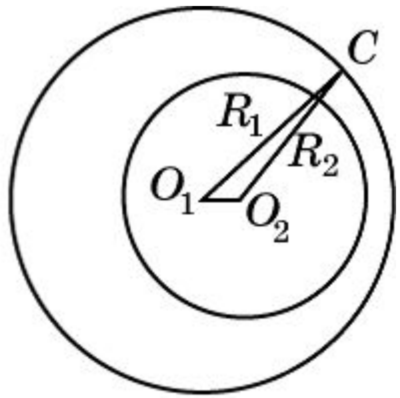
Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов, то эти окружности не имеют общих точек.



Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами соответственно R_1, R_2, $O_1O_2 > R_1 + R_2$. Рассмотрим точку C на первой окружности, $O_1C = R_1$. Тогда $O_2C > O_1O_2 - O_1C > R_1 + R_2 - R_1 = R_2$ и, следовательно, точка C не принадлежит второй окружности. Значит, эти окружности не имеют общих точек.

Теорема 1'

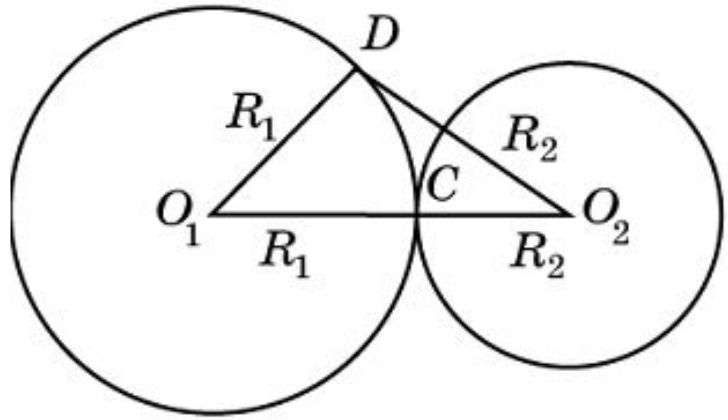
Если расстояние между центрами двух окружностей меньше разности их радиусов, то эти окружности не имеют общих точек.



Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами соответственно R_1, R_2 $(R_1 > R_2)$, $O_1O_2 < R_1 - R_2$. Рассмотрим точку C на первой окружности, $O_1C = R_1$. Тогда $O_2C > O_1C - O_1O_2 > R_1 - (R_1 - R_2) = R_2$ и, следовательно, точка C не принадлежит второй окружности. Значит, эти окружности не имеют общих точек. Аналогичным образом доказывается, что если $O_1O_2 < R_1 - R_2$, то окружности также не имеют общих точек.

Теорема 2

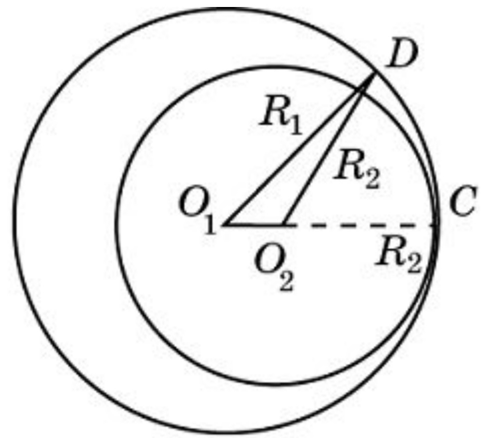
Если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме их радиусов, то эти окружности касаются.



Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами соответственно R_1, R_2, $O_1O_2 = R_1+R_2$. Рассмотрим точку C на отрезке O_1O_2, для которой $O_1C = R_1$, $O_2C = R_2$. Она будет общей точкой для данных окружностей. Если D – точка на первой окружности, отличная от C, то из неравенства треугольника следует, что $O_2D > O_1O_2 - O_1D = R_1 + R_2 - R_1 = R_2$. Следовательно, точка D не принадлежит второй окружности. Значит, данные окружности имеют только одну общую точку, т.е. касаются.

Теорема 2'

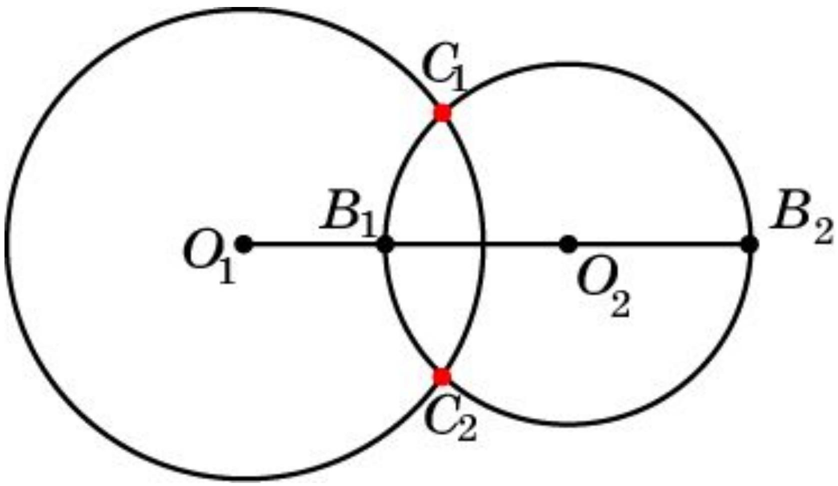
Если расстояние между центрами двух окружностей равно разности их радиусов, то эти окружности касаются.



Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами соответственно R_1, R_2, $O_1O_2 = R_1 - R_2$. Рассмотрим точку C на отрезке O_1O_2, для которой $O_1C = R_1$, $O_2C = R_2$. Она будет общей точкой для данных окружностей. Если D – точка на первой окружности, отличная от C, то из неравенства треугольника следует, что $O_2D > O_1D - O_1O_2 = R_1 - (R_1 - R_2) = R_2$. Следовательно, точка D не принадлежит второй окружности. Значит, данные окружности имеют только одну общую точку, т.е. касаются.

Теорема 3

Если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разностей, то эти окружности пересекаются.



Вопрос 1

Сколько общих точек могут иметь две окружности?

Ответ: Ни одной, одну или две.

Вопрос 2

Какие две окружности называются касающимися?

Ответ: Две окружности называются касающимися, если они имеют только одну общую точку.

Вопрос 3

Какие две окружности называются пересекающимися?

Ответ: Две окружности называются пересекающимися, если они имеют две общие точки.

Вопрос 4

Какие окружности называются концентрическими?

Ответ: Окружности называются концентрическими, если они имеют общий центр.

Вопрос 5

В каком случае две окружности не имеют общих точек?

Ответ: Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов или меньше их разности.

Вопрос 6

В каком случае две окружности касаются: а) внешним образом; б) внутренним образом?

Ответ: а) Если расстояние между их центрами равно сумме радиусов;

б) если расстояние между их центрами равно разности радиусов.

Вопрос 7

В каком случае две окружности пересекаются?

Ответ: Если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разностей.

Упражнение 1

Дана окружность радиуса 3 см и точка A на расстоянии, равном 5 см, от центра окружности. Найдите радиус окружности, касающейся данной и имеющей центр в точке A.

Ответ: 2 см.

Упражнение 2

Расстояние между центрами двух окружностей равно 5 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 2 см и 3 см; б) 2 см и 2 см?

Ответ: а) Касаются;
б) не имеют общих точек.

Упражнение 3

Расстояние между центрами двух окружностей равно 2 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 3 см и 5 см; б) 2 см и 5 см?

Ответ: а) Касаются;
б) не имеют общих точек.

Упражнение 4

Чему равно расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых равны 4 см и 6 см, если окружности: а) касаются внешне; б) касаются внутренне?

Ответ: а) 10 см; б) 4 см.

Упражнение 5

Радиусы двух концентрических окружностей относятся как 3:7. Найдите диаметры этих окружностей, если ширина кольца, образованного ими, равна 24 см.

Ответ: 36 см и 84 см.

Упражнение 6

Две окружности касаются внешним образом. Радиусы окружностей относятся как 2:3. Найдите диаметры окружностей, если расстояние между их центрами равно 10 см.

Ответ: 8 см и 12 см.

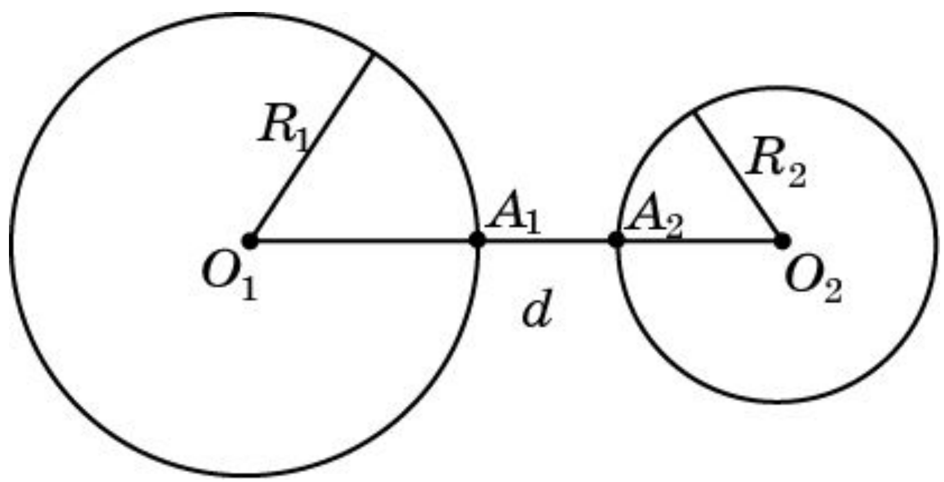
Упражнение 7

Две окружности касаются внутренним образом. Найдите радиусы этих окружностей, если они относятся как 5:2, а расстояние между центрами равно 15 см.

Ответ: 25 см и 10 см.

Упражнение 8

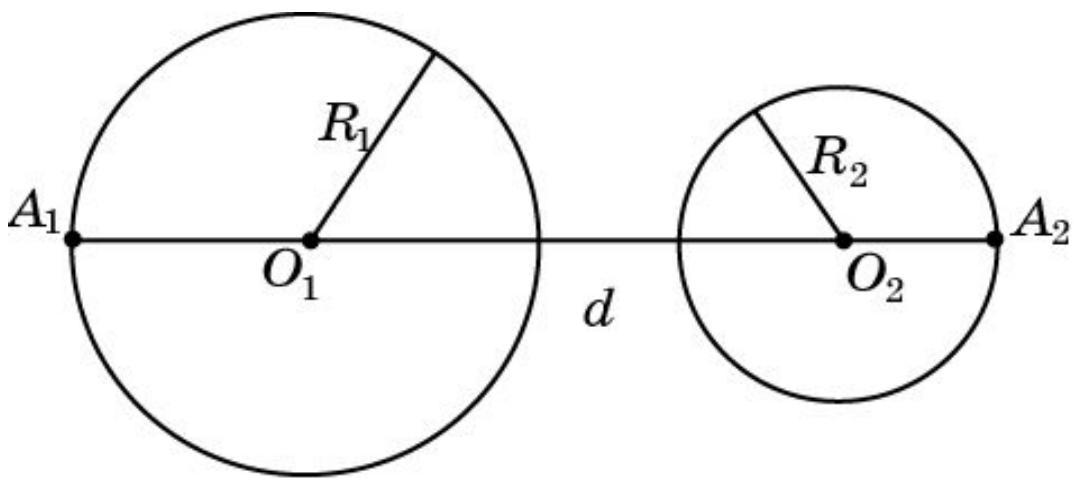
Расстояние между центрами двух окружностей равно d и больше суммы их радиусов R_1 и R_2. Найдите наименьшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.



Ответ: $d - R_1 - R_2$.

Упражнение 9

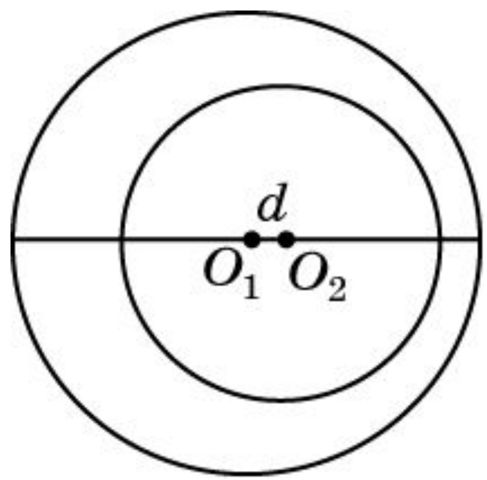
Расстояние между центрами двух окружностей равно d и больше суммы их радиусов R_1 и R_2. Найдите наибольшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.



Ответ: $d + R_1 + R_2$.

Упражнение 10

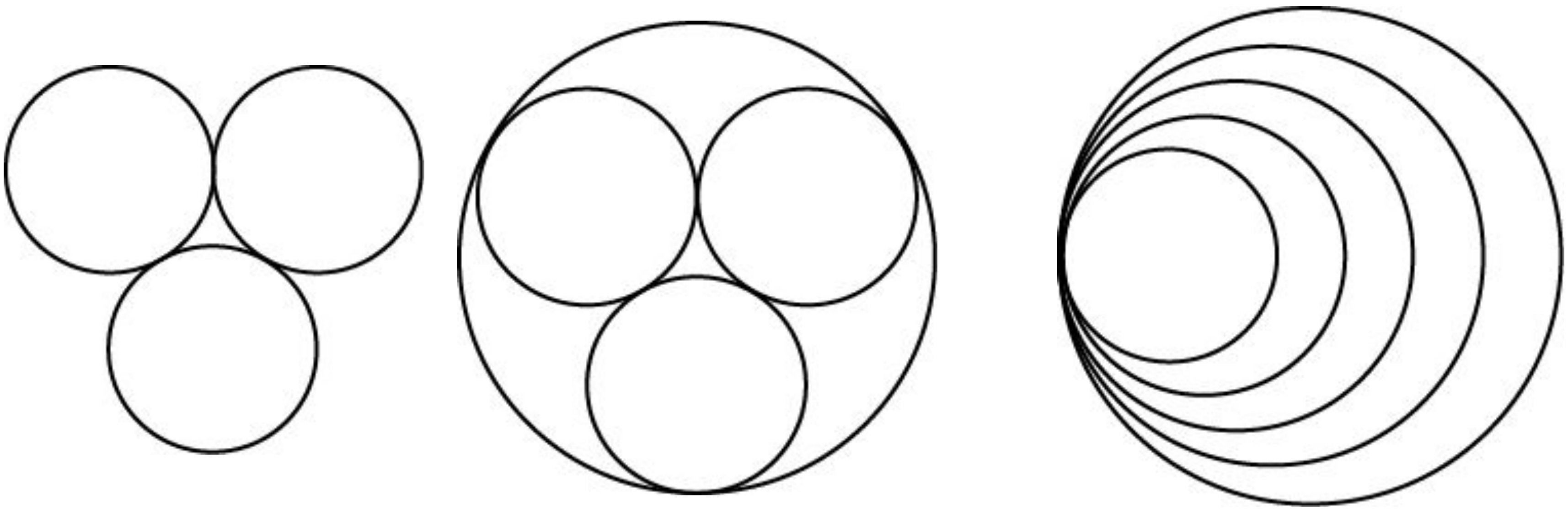
Расстояние между центрами двух окружностей равно d и меньше разности $R_1 - R_2$ их радиусов. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между точками, расположенными на данных окружностях.



Ответ: $R_1 - R_2 - d$; $R_1 + R_2 + d$.

Упражнение 11

Могут ли попарно касаться друг друга: а) три окружности; б) четыре окружности; в) пять окружностей?



Ответ: а) Да; б) да; в) да.

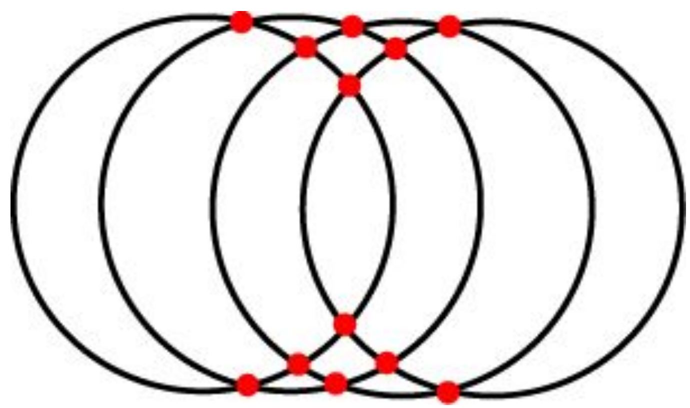
Упражнение 12

Могут ли попарно касаться друг друга четыре окружности одинакового радиуса?

Ответ: Нет.

Упражнение 13

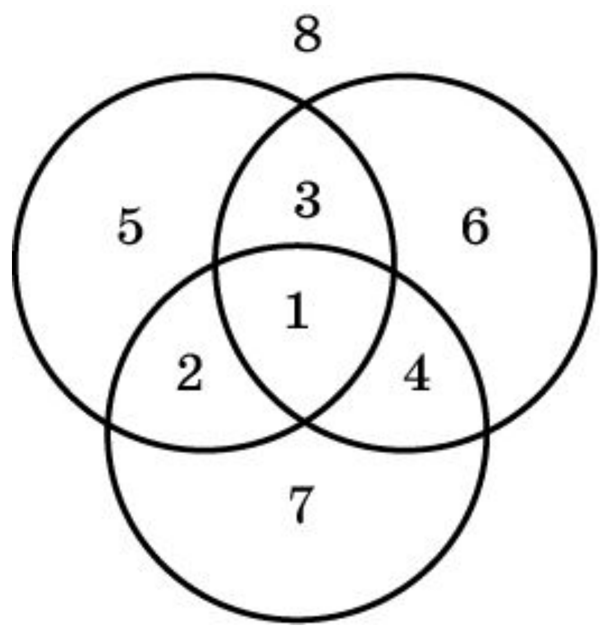
Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь а) две окружности; б) три окружности; в) четыре окружности?



Ответ: а) 2; б) 6; в) 12.

Упражнение 14

На какое наибольшее число частей могут делить плоскость: а) одна окружность; б) две окружности; в) три окружности?



Ответ: а) 2;
б) 4;
в) 8.

Упражнение 15

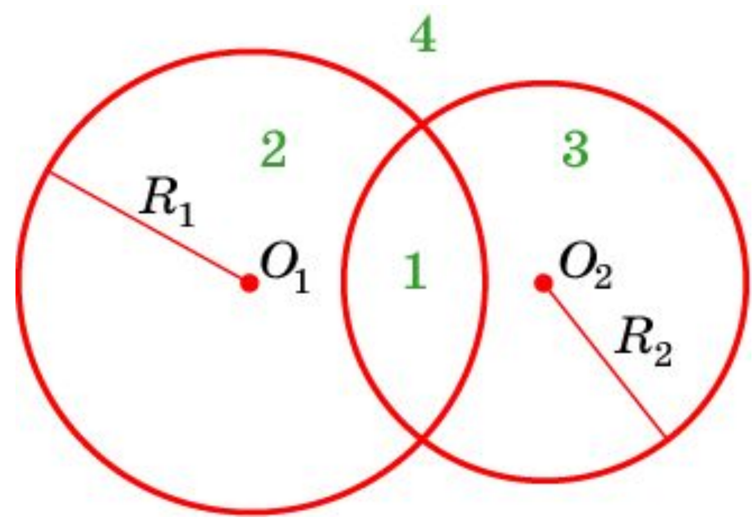
Две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2 разбили плоскость на четыре области. Какой области принадлежит точка A, для которой выполняются неравенства:

а) $AO_1 < R_1$ и $AO_2 < R_2$;

б) $AO_1 < R_1$ и $AO_2 > R_2$;

в) $AO_1 > R_1$ и $AO_2 < R_2$;

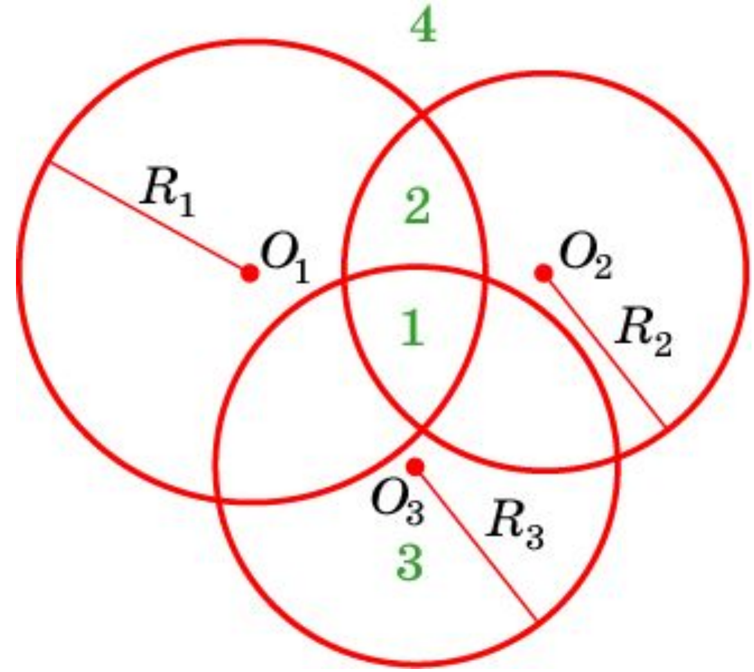
г) $AO_1 > R_1$ и $AO_2 > R_2$.



Ответ: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

Упражнение 16

Три окружности разбили плоскость на восемь областей. Напишите неравенства, которым удовлетворяет точка A, принадлежащая области: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.



Ответ:

а) $AO_1 < R_1$, $AO_2 < R_2$, $AO_3 < R_3$;

б) $AO_1 < R_1$, $AO_2 < R_2$, $AO_3 > R_3$;

в) $AO_1 > R_1$, $AO_2 > R_2$, $AO_3 < R_3$;

г) $AO_1 > R_1$, $AO_2 > R_2$, $AO_3 > R_3$.