Доказательство числовых неравенств

Ученик, который учится без желания, подобен птице без крыльев.

Саади

персидский мыслитель и писатель, 13 в.н.э.

Основные утверждения

1. Свойство транзитивности неравенств.

Для любых действительных чисел a, b и c из справедливости неравенств $a < b$ и $b < c$ следует справедливость неравенства $a < c$.

2. Одноименные числовые неравенства можно почленно складывать.

Для любых действительных чисел a, b, c и d из справедливости неравенств $a < b$ и $c < d$ следует справедливость неравенства $a + c < b + d$.

Основные утверждения

3. Одноимённые числовые неравенства с положительными членами можно почленно перемножать.

Для любых положительных чисел a, b, c и d из справедливости неравенств $a < b$ и $c < d$ следует справедливость неравенства $ac < bd$.

4. К обеим частям неравенства можно прибавить любое число.

Для любых действительных чисел a, b, и c из справедливости неравенства $a < b$ следует справедливость неравенства $a + c < b + c$.

Основные утверждения

5. Неравенство можно умножить или разделить на любое положительное число.

Для любых действительных чисел a, b и любого положительного числа c из справедливости неравенства $a < b$ следует справедливость неравенства $ac < bc$.

ПРИМЕР 1.

Докажем, что для любых положительных чисел *a* и *b* справедливо неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\,b}.(1)$$

Доказательство.

Так как $\sqrt{a}$ u $\sqrt{b}$ — действительные числа для любых положительных чисел a и b, то неравенство

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (2)$$

справедливо для любых положительных чисел *a* и *b*. Применяя формулу квадрата разности и учитывая, что для любых положительных чисел a и b верны равенства $(\sqrt{a})^2 = a\,,(\sqrt{b})^2 = b.$

Перепишем неравенство *(2)* в виде $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0. \quad (3)$

На основании утверждения 4 из справедливости (3) следует справедливость неравенства

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}\ (4)$$

На основании утверждения 5 из справедливости (4) следует справедливость неравенства (1), ч.т.д.

ПРИМЕР 1.

Среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\,b}$$

ПРИМЕР 2.

Докажем, что для любых положительных *x* справедливо неравенство

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \qquad (2)$$

Доказательство.

Умножим обе части неравенства (2) на $\frac{1}{2}$,

Получим неравенство

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 1,$$

в левой части которого записано среднее арифметическое чисел x и $\frac{1}{x}$,

а в правой- их среднее геометрическое.

Неравенство (2) справедливо на основании неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

ПРИМЕР 3.

Докажем, что для любых положительных чисел *a*, *b* и *c* справедливо неравенство

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc. \quad (3)$$

Доказательство.

На основании неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (пример 1), имеем

$$(a+b) \geq 2\sqrt{ab},$$
$$(a+c) \geq 2\sqrt{ac},$$
$$(b+c) \geq 2\sqrt{bc}.$$

Перемножая почленно эти неравенства, на основании утверждения 3 получим справедливость неравенства (3), ч.т.д.

ПРИМЕР 4.

Докажем, что для любых положительных чисел *a* и *b* справедливо неравенство $4(a^3+b^3)\geq(a+b)^3$ (4)

Доказательство. Рассмотрим выражение

$A=4(a^3+b^3)-(a+b)^3.$ Преобразуем его

$$A=4(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)(a+b)^2=$$

$$=(a+b)(4a^2-4ab+4b^2-a^2-2ab-b^2)=$$

$$=(a+b)(3a^2-6ab+3b^2)=$$

$$=3(a+b)(a^2-2ab+b^2)=3(a+b)(a-b)^2.$$

Т.к. a>0, b>0, то $A\geq 0.$ Из неравенства

$$4(a^3+b^3)-(a+b)^3\geq 0$$

Следует справедливость неравенства (4) ч. т. д.

ПРИМЕР 5.

Докажем, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{2}{(2n+1)^2} < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}. \quad (5)$$

Доказательство.

Левую часть неравенства запишем в виде $\frac{2}{4n^2+4n+1}$,

рассмотрим правую часть

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{n+1-n}{2n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2n^2+2n}$$

Т. к. $4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 + 4n > 0$

для любого натурального числа n, то по утверждению 5

$$\frac{2}{4n^2+4n+1} < \frac{2}{4n^2+4n}$$ и неравенство (5) доказано.

ПРИМЕР 6.

Докажем, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}. \qquad (6)$$

Доказательство.

Применяя неравенство (пример 5) и утверждение 2

$$\frac{2}{(2n+1)^2}<\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}. \qquad (5)$$

$$\textit{При } n=1\ \frac{2}{9}<\frac{1}{2}-\frac{1}{4},\quad \textit{при } n=2\ \frac{2}{25}<\frac{1}{4}-\frac{1}{6},\quad \textit{при } n=3\ \frac{2}{49}<\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\,\textit{т.д.}$$

Получим неравенство

$$2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)}\right)<\frac{1}{2}.$$

Поделив обе части этого неравенства на 2, получим неравенство (6), ч. т. д.

ПРИМЕР 7.

Пусть а и b – любые действительные числа, такие, что а + b = 2.

Доказать,

что справедливо неравенство $$a^4 + b^4 \geq 2. \quad (7)$$

Доказательство.

Обозначим а = 1+ с, тогда b = 1 – с, где с – некоторое действительное число, и

$$a^4 + b^4 = (1+c)^4 + (1-c)^4 = (1+c)^2(1+c)^2 + (1-c)^1(1-c)^2 =$$
$$= (1+2c+c^2)(1+2c+c^2) + (1-2c+c^2)(1-2c+c^2) =$$
$$= 1 + 2c + c^2 + 2c + 4c^2 + 2c^3 + c^2 + 2c^3 + c^4 +$$
$$+ 1 - 2c + c^2 - 2c + 4c^2 - 2c^3 + c^2 - 2c^3 + c^4 = 2 + 12c^2 + 2c^4 \geq 2$$

т.к. $12c^2 + 2c^4 \geq 0$

для любого действительного числа с, Значит неравенство (7) справедливо, ч.т.д.

Используемые ресурсы

- Алгебра и начала анализа: учебник для 10 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин].
  - М. : просвещение, 2008.