Электронный тематический журнал

Уравнения высших степеней

Автор: Нечаев Евгений Владимирович
Руководитель: Смалева Елена Владимировна

Адрес учебного заведения:
155523, Ивановская область, город Фурманов,
ул. Тимирязева, д. 42
Телефон (49341)2-50-75; E-mail: fursosh1@mail.ru
Адрес автора:
155523, Ивановская область, город Фурманов,
ул. Тимирязева, д. 14, кв. 14
Телефон +79158143052; E-mail: Smaleva-Elena@yandex.ru

Главное меню

Далее

Подумайте, хотели бы Вы побывать в горах? Лично я думаю, нет в мире человека, который был бы равнодушен к горам. Есть люди, которые их страшатся, есть люди, которые в них живут и каждый день любуются их красотой, есть те, которые их покоряют…

Решение уравнений высоких степеней, нахождение различных способов решений можно сравнить с покорением горной вершины. Уравнения, как и сияющие вершины, поддаются только людям упорным, людям, влюбленным в них

Меню:

Далее

Введение

Уравнения в школьном курсе алгебры занимают ведущее место. На их изучение отводится времени больше, чем на любую другую тему. Действительно, уравнения не только имеют важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Подавляющее число задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов уравнений. Овладевая способами их решения, мы находим ответы на различные вопросы из науки и техники.

В этой работе мне хотелось бы отразить различные способы решения уравнений высших степеней. Для этого приводятся уравнения, которые не изучаются в школьной программе.

Задачи проекта:

- Улучшить навыки решения уравнений высших степеней;
- Наработать новые способы решения уравнений высших степеней.

Объект исследования – элементарная алгебра.

Предмет исследования – уравнения высших степеней. Выбор этой темы основывался на том, что многие геометрические задачи, задачи по физике, химии и биологии решаются с помощью уравнений. Уравнения решали 25 веков назад. Они создаются и сегодня — как для использования в учебном процессе, так и для конкурсных испытаний в ВУЗы, для олимпиад самого высокого уровня.

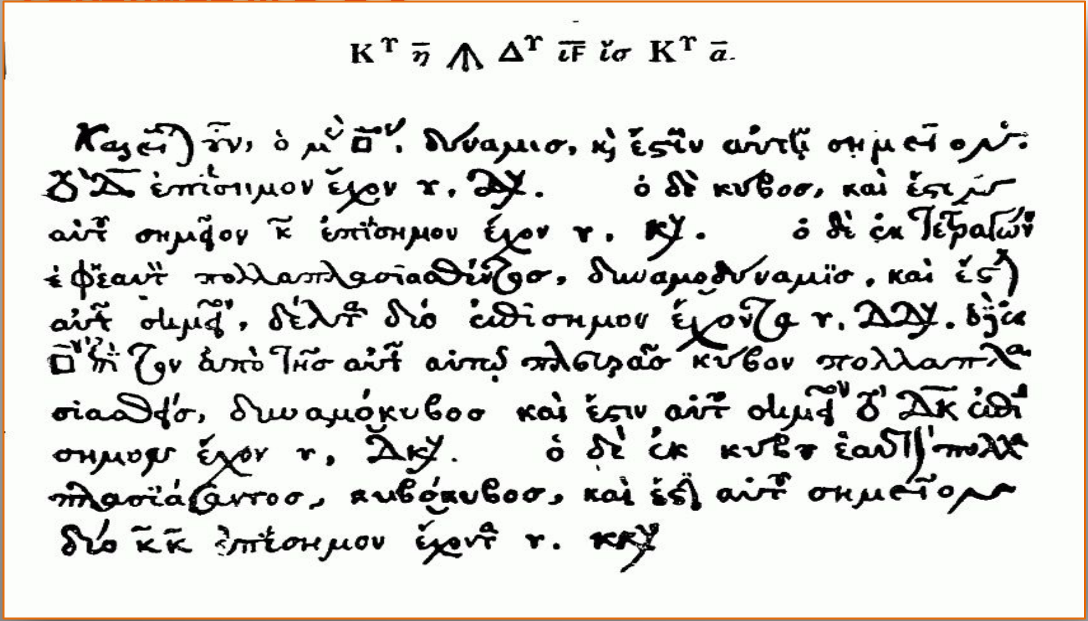
Меню

Далее

Основоположники

Диофант Александрийский – древнегреческий математик.

О подробностях его жизни практически ничего не известно. Возможное уточнение времени жизни Диофанта основано на том, что его Арифметика посвящена «достопочтеннейшему Дионисию». Полагают, что этот Дионисий — не кто иной, как епископ Дионисий Александрий-ский, живший в середине III в. н.э.


Κ^{Υ} η̄ ⋔ Δ^{Υ} ιϛ̄ ἴσ Κ^{Υ} ᾱ.

Так выглядело решение уравнений во время Диофанта


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Латинский перевод Арифметики

Мухаммад ибн Муса Хорезми

(ок. 783 — ок. 850) — великий математик, астроном и географ, основатель классической алгебры.

Сведений о жизни учёного сохранилось крайне мало.

Ал-Хорезми известен прежде всего своей «Книгой о восполнении и противопоставлении», от названия которой произошло слово «алгебра».

В теоретической части своего трактата ал-Хорезми даёт классификацию уравнений 1-й и 2-й степени и выделяет шесть их видов: 1) квадраты равны корням; 2) квадраты равны числу; 3) корни равны числу; 4) квадраты и корни равны числу; 5) квадраты и числа равны корням; 6) корни и числа равны квадрату.

Для приведения квадратно канонических видов ал-Хорезми вводит два действия. Первое из них состоит в перенесении отрицательного члена из одной части в другую для получения в обеих частях положительных членов. Второе действие состоит в приведении подобных членов в обеих частях уравнения.

«Алгебра» ал-Хорезми, положившая начало развития новой самостоятельной научной дисциплины, была дважды переведена в XII веке на латинский язык и сыграла чрезвычайно важную роль в развитии

Памятник ал-Хорезми в Тегеранском университете

Назад Меню Далее

Франсуа Виет

(1540 — 13 декабря 1603) — выдающийся французский математик, один из основоположников алгебры.

Родился в Фонтене-ле-Конт французской провинции Пуату — Шарант. Учился сначала в местном францисканском монастыре, а затем — в университете Пуатье, где получил степень бакалавра.
Около 1570 года подготовил «Математический Канон» — труд по тригонометрии, — который издал в Париже в 1579 году.
Благодаря связям матери и браку своей ученицы с принцем де Роганом, Виет сделал блестящую карьеру и стал советником сначала короля Генриха III, а после его убийства — Генриха IV.
Изучая труды классиков (Кардано, Бомбелли, Стевина) выпустил несколько работ, в которых Виет предложил новый язык «общей арифметики».
Главным трудом Виета стала работа: «Введение в аналитическое искусство». Есть некоторые указания, что учёный умер насильственной смертью. Сборник трудов Виета

Франсуа Виет

Назад | Меню | Далее

Этьен Безу (31 марта 1730 — 27 сентября 1783) — французский математик, член Парижской академии наук (1758).

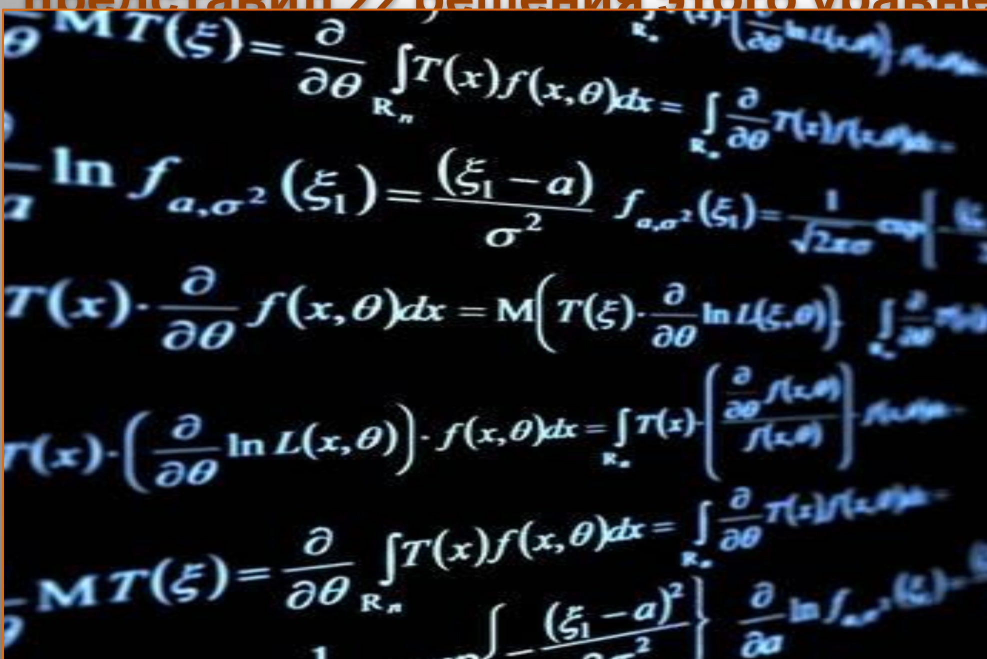
Преподавал математику в Училище гардемаринов (1763) и Королевском артиллерийском корпусе (1768). Основные его работы относятся к алгебре (исследование систем алгебраических уравнений высших степеней, исключение неизвестных в таких системах и др.). Автор шеститомного «Курса

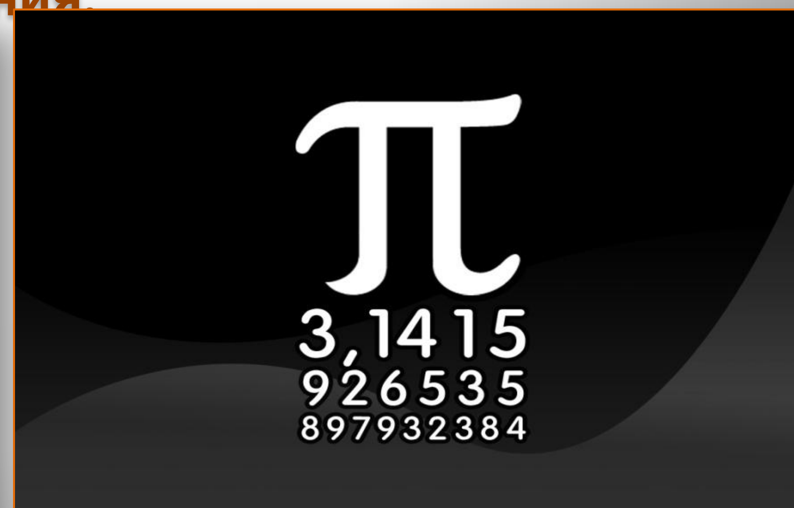
Предполагаемый портрет ученого-математика

Надгробие ученого

Назад **Меню** **Далее**

Это интересно: Однажды в ноябре 1594 года во дворе Генриха IV (Франция) Нидерландский посланник рассказал об известной задаче знаменитого математика Адриска Ван Ромена. Это был вызов математикам всего мира. Речь шла о решении уравнения 45-й степени. В списке тех, кому следовало направить его научный вызов, Ван Ромен не указал ни одного француза и посланник заметил, что по видимому, во Франции нет математиков. “Но почему же? - возразил король. У меня есть математик и весьма выдающийся”. Он послал за Виетом Франсуа. Один корень Виет нашел сразу же, а на следующее утро представил 22 решения этого уравнения.





Назад Меню Далее

Основные виды уравнений высших степеней

1. Очевидная замена.
Биквадратные: ***$ax^4+bx^2+c=o$, где $a\neq0$,***
приводимые к (би)квадратным
Примеры: $2x^4+x^2-1=0$
$(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$
$(x+2)^4-3(x+2)^2+2=0$

2. Неочевидная (завуалированная) замена.
Примеры: $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$
$(8x^2-3x+1)^2=32x^2-12x+1$
$(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$

3. Выгодный способ группировки множителей.
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=A$
или $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=Bx^2$
Примеры: $(x+3)(x+1)(x+5)(x+7)=-16$
$(x-4)(x+2)(x+8)(x+14)=1204$
$(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$
$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2=0$

4. Возвратные уравнения.
$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, где $a\neq0$
Пример: $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0$

5. Однородные уравнения.
$au^2+buv+cv^2=0$, где $a,b,c\neq0$
Примеры: $(x^2-2x+2)^2+3x(x^2-2x+2)=10x^2$
$(2x-1)^2+(2x-1)(x+2)-2(x+2)^2=0$
$(x^2-x+1)^4-6x^2(x^2-x+1)^2+5x^4=0$

6. Особые случаи.
$(x+a)^n+(x+b)^n=C$
Примеры: $(x+1)^4+(x+5)^4=32$
$(x+1)^5+(x+5)^5=242(x+1)$
$(x-6)^6+(x-4)^6=64$

Решение урвнений с помощью замены

Чтобы разобраться в основных приемах решения уравнений высоких степеней, разберем примеры, представленные в пункте «Виды уравнений высших степеней».

Назад Меню Дале
е

Уравнение 1-ого вида:

$$(x+3)^4-3(x+3)^2+2=0$$

1. Так как замена очевидна выполним ее:

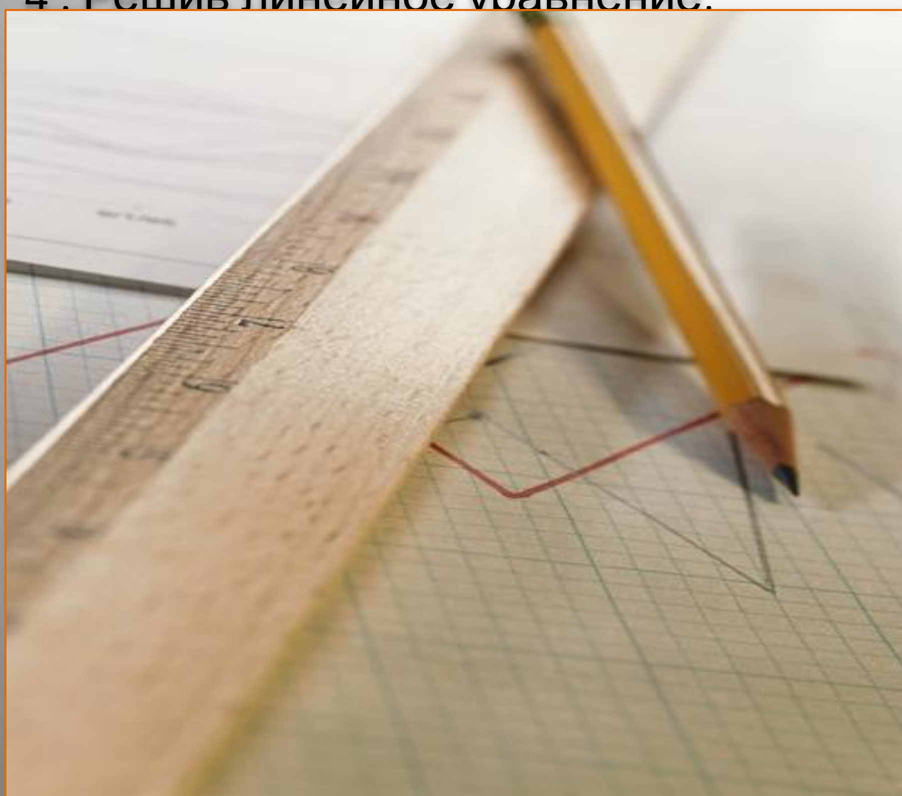
$$\mathbf{(x+3)^2=t,\ где\ t\geq 0;}$$

2. Получим квадратное уравнение

$$t^2-3t+2=0;$$

3. Решив квадратное уравнение, выполним обратную замену;

4 . Решив линейное уравнение,



Уравнение 2-ого вида:

$$(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$$

1. Здесь сделать замену сразу не получится, поэтому выполним некоторые преобразования по формулам сокращенного умножения

$$\underline{(x^2-6x)}^2-2(\underline{x^2-6x}+9)=81;$$

2. Теперь можно выполнить замену:

$$\mathbf{x^2-6x=t}$$

3. Получим квадратное уравнение

$$t^2-2(t+9)-81=0;$$

4. Решив квадратное уравнение, выполним обратную замену, получим два простых квадратных уравнения;

5. Решив квадратные уравнения, получим искомые корни.

Назад Меню Дале
е

Уравнение 3-его вида (1):

$$(x+a)\underline{(x+b)(x+c)}(x+d)=Bx^2$$

Условие группировки множителей

$$ad=bc$$

$$\underline{(x+2)}(x+3)(x+8)\underline{(x+12)}=4x^2$$

1.Необходимо сгруппировать множители специальным образом. Получим:

$$(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)=4x^2$$

2.Далее уравнение можно решить одним из способов:

- **Специальный прием**: делим на x^2

$$(x+11+24/x)(x+14+24/x)=4$$

Замена: $\mathbf{x+24/x = t}$

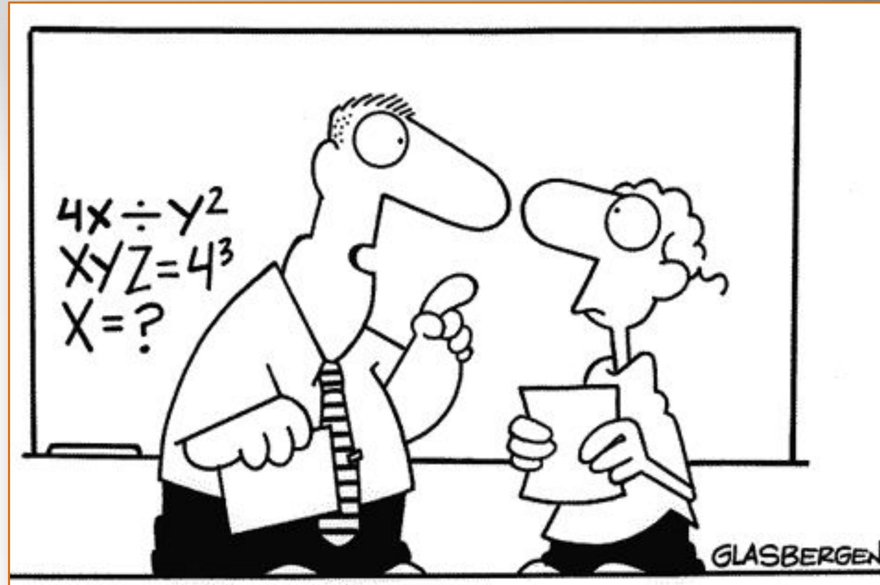
$$(t+11)(t+14)=4$$

- **Уравнение с двумя переменными**

Замена**:** $\mathbf{x^2+24=t}$

$(t+11x)(t+14x)=4x^2$

$t^2+25xt+150x^2=0$, где t-переменная



Назад Меню Далее

Уравнение 3-его вида (2):

$$\underline{(x+a)}(x+b)(x+c)\underline{(x+d)}=A$$

Условие группировки множителей

$$a+d=b+c$$

$$\underline{(x+3)}(x+1)\underline{(x+5)}(x+7)=-16$$

I способ:

1. Необходимо сгруппировать множители специальным образом. Получим:

$$(\underline{x^2+8x}+15)(\underline{x^2+8x}+7)=-16;$$

2. Теперь можно выполнить замену

$$x^2+8x=t,$$

3. Получим квадратное уравнение

$$(t+15)(t+7)=-16$$

4. Решив квадратное уравнение, выполним обратную замену, получим квадратное уравнение.

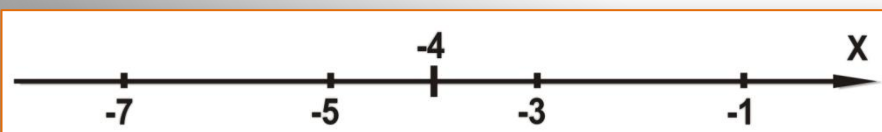


рис. 1

II способ:

1. Нанесем корни многочлена $(x+3)(x+1)(x+5)(x+7)$ на числовую ось.
2. Из рисунка 1 видно, что расстояние между соседними корнями одно и то же. В таком случае, когда корней четное число, удобно сделать замену переменных **$t=x-x_0$, где x_0 – середина между крайними корнями**. Тогда в уравнение войдут квадраты новой переменной, и уравнение станет биквадратным.
3. Замена: **$t=x+4$,** тогда **$x=t-4$**

Тогда: $(t-1)(t-3)(t+1)(t+3)=-16$

$$(t^2-1)(t^2-9)=-16$$

$$t^4-10t^2+25=0$$

$$t^2=5$$

$$t_{1,2}=\pm\sqrt{5}$$

Выполним обратную замену:

$x_{1,2}=-4\pm\sqrt{5}$

Назад Меню Далее

Уравнение 4-ого вида:

$x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0$

1.Специальный прием:

разделим каждый член уравнения на x^2,

где $x\neq 0$,

получим:

$$x^2-5x+6-5/x+1/x^2=0;$$

2. Сгруппируем таким образом:

$$(\underline{x^2+1/x^2})-5(\underline{x+1/x})+6=0;$$

3. Теперь можно выполнить замену:

$$\mathbf{x+1/x=t,}$$

$$\mathbf{x^2+1/x^2=t^2-2,}$$

получим квадратное уравнение

$$t^2-5t+4=0;$$

4. Решив квадратное уравнение, выполним обратную замену и найдем корни исходного уравнения.

Уравнение 5-ого вида:

$(x^2-2x+2)^2+3x(x^2-2x+2)=10x^2$

1. Специальный прием:

разделим обе части уравнения **на x^2,где $x\neq 0$,** получим уравнение, в котором есть повторяется выражение, содержащее переменную. **Заменим его на у.**

2. Получим квадратное уравнение:

$$y^2+3y-10=0$$

$$y=-5,\ y=2$$

3. Выполним обратную замену, решив квадратные уравнения

$$x^2+3x+2=0 \quad x^2-4x+2=0,$$

4. Найдем корни исходного уравнения.

Назад Меню Далее

Уравнение 6-ого вида (1):

$(x-2)^6+(x-4)^6=64$

Подстановка:

$x=t-(-2-4)/2$

$x=t+3$

$(t+1)^6+(t-1)^6=64$

$(t^2+1)(t^4+14t^2+1)=32$

$t^6+15t^4+15t^2-31=0$

Искать целые корни будем среди делителей свободного члена:

$t= \pm1; \pm31$

Подбор: **$t=1$** *– является корнем*

$(t^6+15t^4+15t^2-31):(t-1)=t^5+t^4+16t^2+31t+31$

$(t^5+t^4+16t^3+16t^2+31t+31):(t+1)=t^4+16t^2+31$

$t^4+16t^2+31=0$

Замена: **$t^2=a, a\geq0$**

$a^2+16a+31=0$

$D_1=64-31=33$, $D_1>0$, *2 корня*

$a_{1,2}<0$ — *не подходят*

ВОЗ:

$x-3=1$ $x-3=-1$

$x=4$ $x=2$

Ответ: 1; 4; 2.

Уравнение 6-ого вида (2):

$(x+3)^4+(x+5)^4=16$

Подстановка:

$x=t-(3+5)/2$

$x=t-4$

$(t-1)^4+(t+1)^4=16$

$(t^2-2t+1)^2+(t^2+2t+1)^2=16$

$2t^4+12t^2-14=0$

$t^4+6t^2-7=0$

Замена: **$t^2=a, a\geq0$**

$a^2+6a-7=0$

$a_1=-7$ — *не подходит*

$a_2=1$

ВОЗ:

$t^2=1$

$t_1=1$ или $t_2=-1$

Найдем x:

$x_1=1-4=-3$

$x_2=-1-4=-5$

Ответ: -3; -5.

Назад Меню Далее

Решение уравнений методом разложения на множители

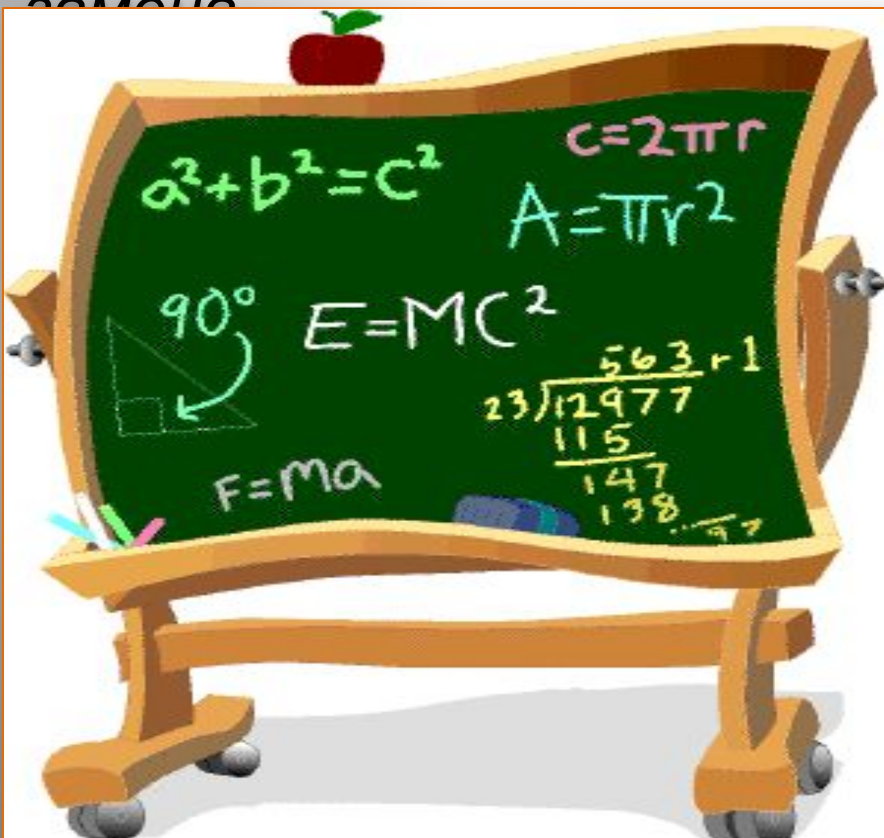
1. $x^7+7x^4-8x=0$

$x(x^6+7x^3-8)=0$

тогда:

$x=0$

$x^6+7x^3-8=0$ – *очевидная замена*



2. $(x-3)^3-x^2+9=0$

$(x-3)^3-(x^2-9)=0$

$(x-3)^3-(x-3)(x+3)=0$

$(x-3)((x-3)^2-(x+3))=0$

тогда:

$x=3$

$x^2-7x+6=0$

3. $4x^4+3x^3+32x+24=0$

$4x(x^3+8)+3(x^3+8)=0$

$(x^3+8)(4x+3)=0$

тогда:

$x^3+8=0$ **$x=-2$**

$4x+3=0$ **$x=-3/4$**

Методы решений уравнений одного типа (4-ая степень)

Уравнения, на первый взгляд, одного типа: в левой части многочлен IV-ой степени, в правой – 0, а способы решения различны.

Уравнение (1)

См. ур-е 4-ого вида

Уравнение (2):

$x^4+7x^3+11x^2+7x+10=0$

Разложим левую часть уравнения на множители способом группировки:

$(x^4+x^2)+(7x^3+7x)+(10x^2+10)=0$

$x^2(x^2+1)+7x(x^2+1)+10(x^2+1)=0$

$(x^2+1)(x^2+7x+10)=0$

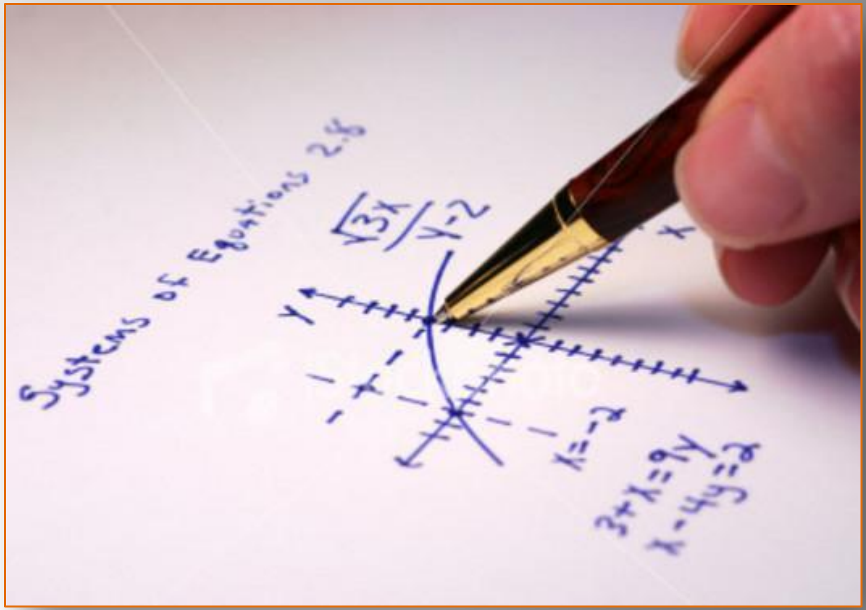
$x^2+7x+10=0; \quad x^2+1\neq0$

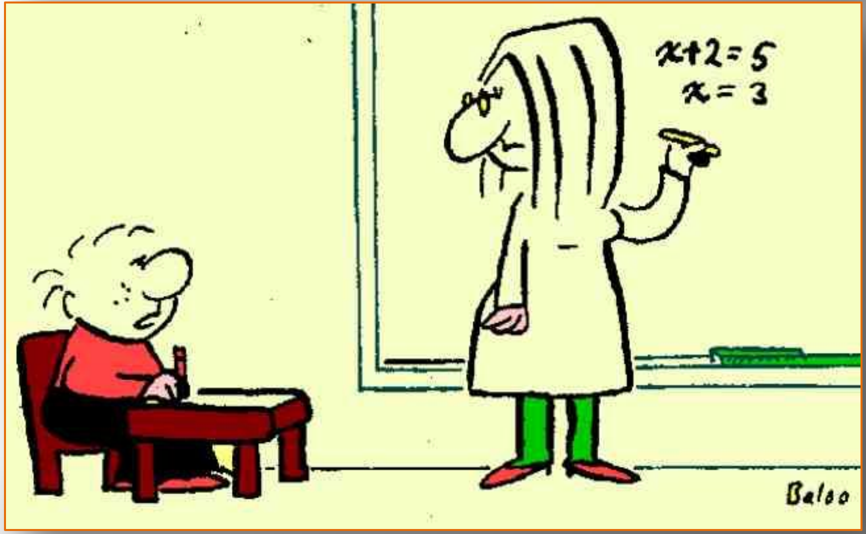
По теореме Виета:

$x_1+x_2=-7$ $\quad$ $\mathbf{x_1=-2}$

$x_1 x_2=10$ $\quad$ $\mathbf{x_2=-5}$

Ответ: -2; -5.





Пример 3:

$x^4-2x^3-18x^2-6x+9=0$

1 *способ:*

Искать целые корни будем среди делителей свободного члена:

$x=\pm 1;\ \pm 3$

1) **$x=1$;** $1-2-18-6+9\neq 0$

$x=-1$; $1+2-18+6+9=0$,

$x=-1$ — *является корнем*

$(x^4-2x^3-18x^2-6x+9):(x+1)=x^3-3x^2-15x+9$

2) **$x=3$**; $27-27-45+9\neq 0$

$x=-3$; $-27-27+45+9=0$,

$x=-3$ — *является корнем*

3) Делим многочлен на многочлен:

$$(x^3-3x^2-15x+9):(x+3)=x^2-6x+3$$

$$x^2-6x+3=0$$

Решим квадратное уравнение найдем искомые корни.

2 *способ:*

Решим это уравнение как **возвратное** уравнение.

Общий вид: ***$ax^4+bx^3+cx^2+bmx+am^2=0$, где $a\neq 0$.***

Приводится к виду ***$a(x^2+m^2/x^2)+b(x+m/x)+c=0$*** *и заменой* ***$y=x+m/x$***

$y^2-2m=x^2+m^2/x^2$

Здесь $m=3$.

Специальный прием:

разделим **на x^2**, получим:

$$x^2-2x-18-6/x+9/x^2=0$$

Приведем к квадратному уравнению с помощью замены: **$y=x+3/x$**

$$y^2-6=x^2+9/x^2$$

$$y^2-6-2y-18=0$$

$$y^2-2y-24=0$$

$$y=6,\ y=-4$$

Выполним обратную замену и решим квадратные уравнения.

Назад Меню Далее

Уравнения 12-ой и n-ой степени

Уравнение 12-ой степени:

$x^{12}-x^9+x^8-x^5+1=0$

Используем метод разбиения задачи на части:

1) $x<0$:

$+ + + + + >0$

Решений нет.

2) $x=0$:

$1=0$

Решений нет.

3) $x>1$:

$x^5(x^3-1)(x^4+1) +1=0$

$+ + + + >0$

Решений нет.

4) $x=1$:

$0+1=0$

Решений нет.

5) $0<x <1$

$x^{12}+x^8(1-x)+(1-x^5)=0$

$+ + + >0$

Решений нет.

Ответ: Уравнение корней не имеет.

Уравнение n-ой степени:

$x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+\ldots=4$

Левая часть уравнения – сумма бесконечной геометрической прогрессии, где

$\mathbf{b_1=x,\ q=x,}$ тогда

$\mathbf{S=b_1 /(1-q) \rightarrow S=x/(1-x).}$

Получим:

$x/(1-x)=4$

$x=4-4x$

$5x=4$

$\mathbf{x=0.8}$

Ответ: 0.8

Опасность при восхождении

Потеря корня!

Пример:

$x^3 - x = 4x^2 - 4$

$x(x^2-1) = 4(x^2-1)$

$x = 4$

Делить на (x^2-1) НЕЛЬЗЯ!

Это приводит к потере корней!

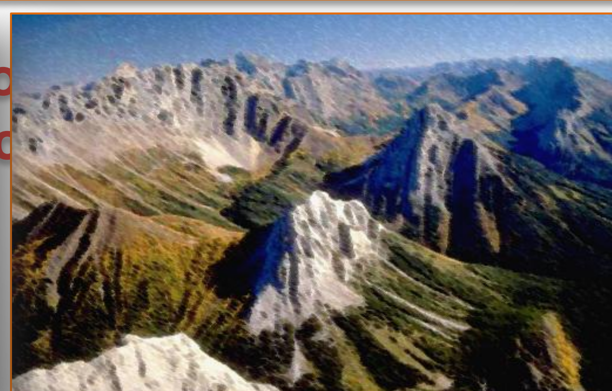
Назад Меню Далее

Вывод

В данной работе приведены различные способы решения уравнений высших степеней. В основном, это способы решения для уравнений частного характера, то есть к каждой группе уравнений, объединенных какими-либо общими свойствами или видом, приведено особое правило, которое применяется только для этой группы уравнений. Каждое решение пригодится в дальнейшей учебе. Эта работа поможет классифицировать старые знания и познать новое.

К сожалению, здесь рассмотрены не все уравнения высоких степеней.

Ведь как у любого альпиниста — за только что покоренной вершиной вдалеке виднеется еще более заманчивая, так и у нас — еще много неразгаданного и неизвестного в этом удивительном мире уравнений.



…ды покорения
…иями.

Назад | Меню | Далее

Литература:

- С.И. Колесникова — «Математика. Решение сложных задач ЕГЭ» С.И. Колесникова — 2-е издание, ИСПР. *М.: Айрис-пресс, 2006 г. – 272 с.*
- Т.М. Королева и др. — «Пособие по математике в помощь участникам централизованного тестирования» *М.: Центр тестирования МОРФ, 2004 г.*
- А.Т. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир — «Алгебрический тренажер: Пособие для школьников и абитуриентов». *М.: Илекса, 2004 г. — 320с.*
- Мордкович и др. — «Алгебра и начало анализа. 10 класс» (в 2 частях). Часть 2: «Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)». *М.: Мнемозина , 2008 г. – 343 с.*
- Чаплыгин В.Ф., Чаплыгина Н.Б. — «Конкурсные задачи по математике: Сборник задач». *Ярославль 2005 г. – 178 с.*

P.S.: Все картинки взяты с сайта: http://images.yandex.ru
Информация об «Основоположниках» взята с сайта: http://ru.wikipedia.org