Предмет теории вероятностей. Полная группа равновозможных событий. Классическое определение вероятности. Основные формулы комбинаторики

КАЛАБУХОВА Галина Валентиновна
К.социол.н., доцент

Вопросы темы

- Предмет теории вероятностей и ее значение для экономической науки.
- Испытания и события. Виды случайных событий.
- Классическое и геометрическое определения вероятности.
- Комбинаторика.
- Частота события, ее свойства, статистическая устойчивость частоты.
- Аксиомы теории вероятностей. Простейшие следствия из аксиом

Предмет теории вероятностей и ее значение для экономической науки

Определение

Теория вероятностей – раздел математики, в котором изучаются свойства вероятностей появления случайных событий, подчиняющихся вероятностным закономерностям, и устанавливаются соотношения между вероятностями событий, связанных друг с другом каким-либо образом.

Определение

предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать

Применение теории вероятностей

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках.

Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства: при анализе технологических процессов, предупредительном и приемочном контроле качества продукции и для многих других целей

Историческая справка

1. Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма в XVI-XVII вв.)
2. Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Якоба Бернулли (1654-1705). Доказанная им теорема, получившая впоследствии название «Закона больших чисел», была первым теоретическим обоснованием накоплением ранее фактов
3. Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону

Историческая справка

4. Новый, наиболее плодотворный период связан с именем П. Л.Чебышева (1821-1894) и его учеников А.А.Маркова (1856-1922) и А.М.Ляпунова (1857-1918). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой.
5. Последующее развитие обязано в первую очередь русским и советским математикам (С.Н.Бернштейн, В.И.Романовский, А.Н. Колмогоров, А.Я.Хинчин, Б.В.Гнеденко, Н.В.Смирнов и др.)

Испытания и события.
Виды случайных событий

Испытанием называется наблюдение (опыт, измерение, эксперимент), осуществленное при определенной совокупности некоторых условий.

Испытание можно многократно повторить с одним и тем же объектом с сохранением исходных условий.

Результатом (исходом) испытания является ***событие*** (обозначаются заглавными буквами A, B, C, …).

Типология событий

- ***Достоверным*** называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S
- ***Невозможным*** называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S
- ***Случайным*** называют событие, которое при осуществлении условий S может либо произойти, либо не произойти

Виды случайных событий

События называют ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании

Виды случайных событий

События называют ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании

- Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» - несовместные

Виды случайных событий

События называют ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании

- Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» - несовместные
- Брошена монета. Появление «герба» исключает появление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» - несовместные

Виды случайных событий

Несколько событий образуют ***полную группу***, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности, *если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий*

Виды случайных событий

Несколько событий образуют ***полную группу***, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности, *если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий*

- Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет ТОЛЬКО одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу

Виды случайных событий

События называют ***равновозможными***, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое

Виды случайных событий

События называют ***равновозможными***, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое

- Появление «герба» и появление надписи при бросании монеты – равновозможные события. Действительно, предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не оказывает влияние на выпадение той или иной стороны монеты

Классическое и геометрическое определения вероятности

Определение

Мерой возможности появления события называется число, называемое ***вероятностью*** случайного события (P(A)).

Определение

Мерой возможности появления события называется число, называемое ***вероятностью*** случайного события (P(A)).

Закономерности, появляющиеся при проведении достаточно большого количества испытаний с каким-либо объектом, называются ***вероятностными*** или ***статистическим*** закономерностями.

Определение

Вероятностью *событию* ***A*** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу:

$$P\,(A) = m/n,$$

где $\boldsymbol{m}$ – число элементарных исходов, благоприятствующих $\boldsymbol{A}$;
$\boldsymbol{n}$ – число всех возможных элементарных исходов испытания

Определение

Геометрическая вероятность – вероятность попадания точки в область.

Если обозначить меру (длину, площадь, объем) области через ***mes***, то вероятность попадания точки, брошенной наудачу в область ***g*** – часть области ***G***, равна

$$P = \text{mes } g \,/\, \text{mes } G$$

Определение

1. Пусть отрезок ***l*** составляет часть отрезка ***L***. На отрезок ***L*** наудачу поставлена точка. Это означает выполнение следующих предположений: поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка ***L*** , вероятность попадания точки на отрезок ***l*** пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка ***L***. В этих предположениях вероятность попадания точки на отрезок *l* определяется равенством

$$P = \text{Длина } l/\text{Длина } L$$

Определение

2. Пусть плоская фигура ***g*** составляет часть плоской фигуры ***G***. На фигуру ***G*** наудачу брошена точка. Это означает выполнение следующих предположений: брошенная точка может оказаться в любой точке фигуры ***G***, вероятность попадания брошенной точки на фигуру ***g*** пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от её расположения относительно ***G***, ни от формы ***g***. В этих предположениях вероятность попадания точки в фигуру ***g*** определяется равенством

$$P = \text{Площадь } g / \text{ Площадь } G$$

Комбинаторика

Определение

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества

Определение

Перестановками называют комбинации, состоящие **из одних и тех** же ***n*** различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Определение

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же ***n*** различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок:

$$P_n = n!$$

где $n! = 1*2*3 \ldots n$

При этом: $0! = 1$

Типичная смысловая нагрузка

СКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ МОЖНО РАССТАВИТЬ N ОБЪЕКТОВ?

Пример

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Пример

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

РЕШЕНИЕ.

Пример

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

РЕШЕНИЕ.

Искомое число трехзначных чисел $P_3 = 3! =$

Пример

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

РЕШЕНИЕ.

Искомое число трехзначных чисел $P_3 = 3! = 1*2*3 =$

Пример

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

РЕШЕНИЕ.

Искомое число трехзначных чисел $P_3 = 3! = 1*2*3 = 6$

Определение

Размещениями называют комбинации, составленные из ***n*** различных элементов по ***m*** элементов, которые отличаются либо составом элементов либо их порядком.

Определение

Размещениями называют комбинации, составленные из ***n*** различных элементов по ***m*** элементов, которые отличаются либо составом элементов либо их порядком.

Число всех возможных размещений:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

Типичная смысловая нагрузка

СКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ МОЖНО ВЫБРАТЬ M ОБЪЕКТОВ ИЗ N И В КАЖДОЙ ВЫБОРКЕ ПЕРЕСТАВИТЬ ИХ МЕСТАМИ (ЛИБО РАСПРЕДЕЛИТЬ МЕЖДУ НИМИ КАКИЕ-НИБУДЬ УНИКАЛЬНЫЕ АТРИБУТЫ)?

Пример

Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Пример

Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

РЕШЕНИЕ.

Пример

Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

РЕШЕНИЕ.

Искомое число сигналов $A_6^2 =$

Пример

Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

РЕШЕНИЕ.

Искомое число сигналов $A_6^2 = 6*5 =$

Пример

Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

РЕШЕНИЕ.

Искомое число сигналов $A_6^2 = 6*5 = 30$

Определение

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Определение

Сочетаниями называют комбинации, составленные из ***n*** различных элементов по ***m*** элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний: $$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Типичная смысловая нагрузка

СКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ МОЖНО ВЫБРАТЬ M ОБЪЕКТОВ ИЗ N ОБЪЕКТОВ?

Пример

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Пример

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

РЕШЕНИЕ.

Пример

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

РЕШЕНИЕ.

Искомое число способов $C_{10}^{2} =$

Пример

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

РЕШЕНИЕ.

Искомое число способов $C_{10}^{2} = \dfrac{10!}{2! \cdot 8!} =$

Пример

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

РЕШЕНИЕ.

Искомое число способов $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2! \cdot 8!} =$

Пример

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

РЕШЕНИЕ.

Искомое число способов $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10}{2!} =$

Пример

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

РЕШЕНИЕ.

Искомое число способов $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2!} =$

$$= \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} =$$

Пример

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

РЕШЕНИЕ.

Искомое число способов $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10}{2!} =$

$$= \frac{9\cdot 10}{1\cdot 2} = 45$$

Определение

Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае ***комбинации с повторениями*** вычисляют по другим формулам. Например, если среди $\boldsymbol{n}$ элементов есть $\boldsymbol{n_1}$ элементов одного вида, $\boldsymbol{n_2}$ элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями

$$P(n_1, n_2, \ldots.) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots}$$

Правила решения задач по комбинаторике

- ***Правило суммы***. Если некоторый объект ***A*** может быть выбран из совокупности объектов *m* способами, а другой объект ***B*** может быть выбран *n* способами, то выбрать либо ***A***, либо ***B*** можно **(*m*+*n*)** способами.

Правила решения задач по комбинаторике

- ***Правило суммы***. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект $\boldsymbol{B}$ может быть выбран n способами, то выбрать либо $\boldsymbol{A}$, либо $\boldsymbol{B}$ можно $\boldsymbol{(m+n)}$ способами.
- ***Правило произведения***. Если объект $\boldsymbol{A}$ можно выбрать из совокупности объектов $\boldsymbol{m}$ способами и после каждого такого выбора объект $\boldsymbol{B}$ можно выбрать $\boldsymbol{n}$ способами, то пара объектов $\boldsymbol{(A, B)}$ в указанном порядке может быть выбрана $\boldsymbol{(m \cdot n)}$ способами.

Частота события, ее свойства, статистическая устойчивость частоты

Определение

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом, относительная частота события ***A*** определяется формулой

$$W(A) = m/n,$$

где m – число появлений события, n – общее число испытаний

Эмпирические данные

- Пример.
  Событие А - появление герба.
  Вероятность Р(А)=0,5.
  По результатам многократного проведения опыта бросания монеты получены результаты:

Число бросаний	Число появлений «герба»	Относительная частота
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Сравнение:

ВЕРОЯТНОСТЬ	ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА
определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности. ***вероятность вычисляют до опыта***	определение относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. ***относительную частоту вычисляют после опыта***

Статистическая устойчивость частоты

Если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, что ***в различных опытах относительная частота изменяется мало*** (*тем меньше, чем больше произведено испытаний*), *колеблясь около некоторого постоянного числа*. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события

Аксиомы теории вероятностей. Простейшие следствия из аксиом

1. Каждому случайному событию ***A*** соответствует определенное число ***P(A)***, называемое его вероятностью и удовлетворяющее условию:

$$0 \le P(A) \le 1$$

2. Вероятность достоверного события равна единице

3. ***(аксиома сложения вероятностей).***
Пусть ***A*** и ***B*** — несовместные события. Тогда вероятность того, что произойдет хотя бы одно из этих двух событий, равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

4. ***Следствие 1***.
если события $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, An}$, попарно несовместны, то:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

5. ***Следствие 2*.**

Если пространство элементарных событий состоит из ***N*** равновозможных элементарных событий, то вероятность каждого из них:

$$p = \frac{1}{N}$$

6. ***Следствие 3.***

Если пространство элементарных событий состоит из ***N*** равновозможных элементарных событий, то вероятность события ***A***:

$$p = \frac{N_A}{N}$$

где N_A - количество элементарных событий, благоприятствующих наступлению события *A*

Событием, ***противоположным*** событию ***А***, называется событие ***Ā***, состоящее в ненаступлении события ***А***

7. ***Теорема***

   Для любого события вероятность противоположного события выражается равенством:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

8. ***Теорема***
Вероятность невозможного события равна нулю